Софийски университет „Св. Климент Охридски”

Факултет по математика и информатика

Катедра „Математическа логика и приложенията й”

Дипломна работа
на тема
Субрекурсивна изчислимост в анализа

Иван Димитров Георгиев
факултетен номер M22363

Ръководител катедра: доц. Александра Соскова
Научен ръководител: проф. Димитър Скордев

София 2009 г.

Съдържание

Глава 1

Увод.

Навсякъде с $\mathbb{N}$ означаваме множеството на неотрицателните цели числа,

с $\mathbb{Q}$ означаваме множеството на рационалните числа,

с $\mathbb{R}$ означаваме множеството на реалните числа.

Едно реално число е *изчислимо*, ако съществува ефективен метод, чрез който се генерират произволно близки негови рационални приближения.
Едно обобщение на това понятие се получава като се релативизира изискването за съществуване на „ефективен метод”.

Следвайки [6], нека $\mathcal{F}$ е клас от тотални функции в $\mathbb{N}$.

Казваме, че реалното число α е *$\mathcal{F}$-изчислимо*, ако съществуват три едноаргументни функции f, g, $h \in \mathcal{F}$, такива че

$$\left|\frac{f(n)-g(n)}{h(n)+1}-\alpha\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Когато $\mathcal{F}$ е класът на всички рекурсивни функции, получаваме добре изученото понятие *рекурсивно* реално число, което представлява (съгласно тезиса на Чърч-Тюринг) математически еквивалент на понятието изчислимо реално число. Естествено, когато $\mathcal{F}$ е класът на всевъзможните тотални функции в $\mathbb{N}$, получаваме цялото множество от реални числа.

В нашите разглеждания ролята на $\mathcal{F}$ ще се играе от субрекурсивните класове $\mathcal{E}^2$, $\mathcal{L}^2$ и $\mathcal{M}^2$, които представляват собствени подкласове на класа на примитивно рекурсивните функции. Ролята на числото α ще приемат известни константи, възникнали при изследването на различни клонове на математиката.

Целта е да се покаже, че много от тези константи удовлетворяват свойството $\mathcal{F}$-изчислимост (за $\mathcal{F}$ един от тези три класа). Такова свойство говори за тяхната ниска изчислителна сложност.

Глава 2

Общи дефиниции и свойства. Основни методи.

2.1. Класовете $\mathcal{E}^2$, $\mathcal{L}^2$ и $\mathcal{M}^2$.

Казваме, че един клас $\mathcal{F}$ от тотални функции в естествените числа е затворен относно ограничена примитивна рекурсия, ако всеки път когато функциите
$g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$, $b : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$) са от класа $\mathcal{F}$, функцията $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, която удовлетворява условията
$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$,
$f(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$,
$f(x_1, \ldots, x_n, y) \leq b(x_1, \ldots, x_n, y)$, за всички $x_1 \in \mathbb{N}, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$,
също принадлежи на класа $\mathcal{F}$.

Дефиниция 2.1.1. $\mathcal{E}^2$ е най-малкият клас от тотални функции в естествените числа, който съдържа константата 0, функцията наследник $\lambda x.x+1$, проекциите $\lambda x_1, \ldots, x_n.x_i$, $n \geq 1$, $i \in [1, n]$, i, n – естествени числа, събирането и умножението и е затворен относно суперпозиция и ограничена примитивна рекурсия.

Класът $\mathcal{E}^2$ е известен като втория клас в йерархията на Гжегорчик.

Казваме, че един клас $\mathcal{F}$ от тотални функции в естествените числа е затворен относно ограничено сумиране, ако всеки път когато функцията $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$) е от класа $\mathcal{F}$, функцията $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, дефинирана с $f(x_1, \ldots, x_n, y) = \sum_{z=0}^{y} g(x_1, \ldots, x_n, z)$ за всички естествени $x_1, \ldots, x_n, y$, също принадлежи на класа $\mathcal{F}$.

Дефиниция 2.1.2. $\mathcal{L}^2$ е най-малкият клас от тотални функции в естествените числа, който съдържа константата 0, функцията наследник, проекциите, събирането и функцията на Кронекер δ: $\delta(x, y) = 1$, ако $x = y$ и $\delta(x, y) = 0$, ако $x \neq y$, който е затворен относно суперпозиция и ограничено сумиране.

Класът $\mathcal{L}^2$ е известен като класът на ниско елементарните функции на Сколем.
Добре известен факт е, че $\mathcal{L}^2 \subseteq \mathcal{E}^2$, тъй като ограниченото сумиране се изразява с помощта на ограничена примитивна рекурсия.
Отворен въпрос е дали това включване е строго.

Казваме, че един клас $\mathcal{F}$ от тотални функции в естествените числа е затворен относно ограничена минимизация, ако всеки път когато функцията $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$) е от класа $\mathcal{F}$, функцията $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, дефинирана с
$f(x_1, \ldots, x_n, y) =$ най-малкото $z \leq y$, такова че $g(x_1, \ldots, x_n, z) = 0$, ако има такова z,
$f(x_1, \ldots, x_n, y) = y+1$, ако за всяко $z \leq y$, $g(x_1, \ldots, x_n, z) > 0$, за всички $x_1, \ldots, x_n$, y – естествени числа, също принадлежи на класа $\mathcal{F}$. За функцията f използваме означението $f(x_1, \ldots, x_n, y) = \mu z \leq y\, [g(x_1, \ldots, x_n, z) = 0]$.

Дефиниция 2.1.3. $\mathcal{M}^2$ е най-малкият клас от тотални функции в естествените числа, който съдържа константата 0, функцията наследник, проекциите, отсечената разлика $\lambda x, y.\ x \dot{-} y$, функцията квадрат $\lambda x.x^2$ и е затворен относно суперпозиция и ограничена минимизация.

Класът $\mathcal{M}^2$ е може би най-естественият субрекурсивен клас, поради следната характеризация: една тотална функция f в естествените числа е от класа $\mathcal{M}^2$ тогава и само тогава, когато f е ограничена от полином и графиката на f е Δ_0-определима релация. Тук Δ_0-определима релация означава, че тя се дефинира с формула от езика на Пеановата аритметика с използване само на ограничени квантори.

Добре известен факт е, че $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{L}^2$, тъй като ограничената минимизация се изразява с помощта на ограничено сумиране. Отворен въпрос е дали това включване е строго.

Оттук нататък с $\mathcal{F}$ ще означаваме кой да е от трите класове $\mathcal{E}^2$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{M}^2$.
Знаем, че $\mathcal{F}$ е затворен относно суперпозиция. Може да се покаже, че $\mathcal{F}$ е затворен относно ограничена минимизация (това се проверява и в трите случая).
Също така, всички константи, събирането, умножението и функциите
$\lambda x,y.\ x \dot{-} y$, $\lambda x,y.\min(x, y)$, $\lambda x,y.\max(x, y)$, $\lambda x,y.[x/(y+1)]$, $\lambda x,y.(x \bmod (y+1))$, $\lambda x,y.|x - y|$ са от класа $\mathcal{F}$.

Нека R е n-местна релация в естествените числа. Ще считаме, че R е $\mathcal{F}$-релация точно тогава когато характеристичната функция χ_R на R е от класа $\mathcal{F}$
($\chi_R(x_1, \ldots, x_n) = 0$, ако $(x_1, \ldots, x_n) \in R$, $\chi_R(x_1, \ldots, x_n) = 1$, ако $(x_1, \ldots, x_n) \notin R$).
Като се използва споменатата характеризация на $\mathcal{M}^2$, лесно се вижда, че
R е $\mathcal{M}^2$-релация точно когато R е Δ_0-определима.
$\mathcal{L}^2$-релациите ще наричаме още ниско елементарни релации.
Проверява се, че класът на $\mathcal{F}$-релациите е затворен относно булевите операции и относно ограничено квантифициране. Също така, класът на $\mathcal{F}$-релациите съдържа релациите $=, \neq, \leq, \geq, <, >$.

Свойство 2.1.4. Нека $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ и $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ е тотална функция. Ако графиката на f е $\mathcal{F}$-релация, то функцията $\varphi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, дефинирана с

$$\varphi(t, n_1, \ldots, n_k) = \min(t, f(n_1, \ldots, n_k))$$

е от класа $\mathcal{F}$.
Доказателство. Имаме $\varphi(t, n_1, \ldots, n_k) = \mu y \leq t\,[y = t \vee y = f(n_1, \ldots, n_k)]$.

Сега ще се спрем върху някои свойства на класа $\mathcal{L}^2$.
Следната релация е ниско елементарна (виж [5, стр. 67]): prime $(p) \leftrightarrow p$ е просто число.
Следната функция е от класа $\mathcal{L}^2$ (в [5, стр. 68] в изразите за Q и e заместваме първо p_n с p и после n с p) $\lambda m, p.\exp(m, p)$ – показателя на p в разлагането на m.
Следната функция е от класа $\mathcal{L}^2$ (виж [5, стр. 67]): $\lambda k.\mathrm{p}_k$ – $(k+1)$-то просто число.

По-нататък цитираме едно свойство от [9], което ще бъде полезно в глава 4.

Свойство 2.1.5. Нека k е естествено число, $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ и $f \in \mathcal{L}^2$. Тогава графиката на функцията $\varphi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, дефинирана с $\varphi(n_1, \dots, n_k, n) = \prod_{i=0}^{n} f(n_1,\dots,n_k,i)$ е ниско елементарна релация.

Доказателство. Ако $l = 0$, то $\varphi(n_1, \dots, n_k, n) = l \leftrightarrow \exists i \le n\, f(n_1, \dots, n_k, i) = 0$.
Ако $l > 0$, то $\varphi(n_1, \dots, n_k, n) = l \leftrightarrow \forall i \le n\, (f(n_1, \dots, n_k, i) > 0 \wedge f(n_1, \dots, n_k, i) \le l) \wedge$ $\forall p \le l\, (\mathrm{prime}\,(p) \Rightarrow \exp\,(l, p) = \sum_{i=0}^{n} \exp\,(f\,(n_1,\dots,n_k,i), p))$. Тук използваме, че $\mathcal{L}^2$ е затворен относно ограничено сумиране.

Накрая ще цитираме две съвсем нетривиални свойства на класа $\mathcal{M}^2$, които ще използваме в параграф 2.5 и в глава 5.

Свойство 2.1.6. Нека k е естествено число, $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ и графиката на f е Δ_0-определима релация. Тогава графиката на функцията $\varphi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, дефинирана с $\varphi(n_1, \dots, n_k, n) = \sum_{i=0}^{[\log_2 (n+1)]} f(n_1,\dots,n_k,i)$ също е Δ_0-определима релация.
В частност, ако $f \in \mathcal{M}^2$, то $\varphi \in \mathcal{M}^2$.
Доказателството на свойство 2.1.6 по същество е направено в [4].

Свойство 2.1.7. Нека k е естествено число, $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ и графиката на f е Δ_0-определима релация. Тогава графиката на функцията $\varphi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, дефинирана с $\varphi(n_1, \dots, n_k, n) = \prod_{i=0}^{n} f(n_1,\dots,n_k,i)$ също е Δ_0-определима релация.
Доказателство на свойство 2.1.7 може да се намери в [1].

2.2. $\mathcal{F}$-изразимост и $\mathcal{F}$-изчислимост.

Навсякъде $\mathcal{F}$ е един от класовете $\mathcal{E}^2$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{M}^2$. В този параграф ще изложим дефинициите от [6] за $\mathcal{F}$-изразимост и $\mathcal{F}$-изчислимост на функции и ще докажем някои свойства.

Дефиниция 2.2.1. Нека $k \ge 1$ и $A : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ е функция. Казваме, че A е $\mathcal{F}$-*изразима*, ако съществуват три k-аргументни функции f, g, h от класа $\mathcal{F}$, такива че

$$A\,(n_1, \dots, n_k) = \frac{f(n_1,\dots,n_k) - g(n_1,\dots,n_k)}{h(n_1,\dots,n_k)+1}$$

за всички естествени $n_1, \dots, n_k$.

С прости сметки се проверяват следните факти:
1. Ако $A : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $B : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ са $\mathcal{F}$-изразими, то сумата, разликата и произведението на функциите A и B са $\mathcal{F}$-изразими функции.
2. Ако $A : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ е $\mathcal{F}$-изразима и $A\,(n_1, \dots, n_k) \ne 0$ за всички естествени $n_1, \dots, n_k$, то частното $\lambda n_1, \dots, n_k . \dfrac{1}{A(n_1,\dots,n_k)}$ е $\mathcal{F}$-изразима функция.

3. Ако $A : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ е $\mathcal{F}$-изразима и в нея извършим суперпозиция на функции от $\mathcal{F}$, то отново получаваме $\mathcal{F}$-изразима функция.

Дефиниция 2.2.2. Нека $k \geq 1$ и $\theta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ е функция. Казваме, че θ е $\mathcal{F}$-*изчислима*, ако съществува $\mathcal{F}$-изразима функция $A : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, такава че

$$|A(t, n_1, \ldots, n_k) - \theta(n_1, \ldots, n_k)| \leq \frac{1}{t+1}$$

за всички естествени $t, n_1, \ldots, n_k$.

Ясно е, че ако $\theta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ е $\mathcal{F}$-изчислима и в нея извършим суперпозиция на функции от $\mathcal{F}$, то отново получаваме $\mathcal{F}$-изчислима функция.
Също е ясно, че произволна $\mathcal{F}$-изразима функция $A : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, разгледана като функция с област от стойности подмножество на $\mathbb{R}$, е $\mathcal{F}$-изчислима.

Свойство 2.2.3. Нека $k \geq 1$, $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ е функция, $A : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ е $\mathcal{F}$-изразима функция и нека $t|A(t, n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k)|$ е ограничено (като функция на $t, n_1, \ldots, n_k$).
Тогава f е $\mathcal{F}$-изчислима функция.
Доказателство. Нека c е ненулево естествено число, такова че
$t|A(t, n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k)| \leq c$ за всички естествени $t, n_1, \ldots, n_k$.
Дефинираме $B : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ с $B(t, n_1, \ldots, n_k) = A(ct + c, n_1, \ldots, n_k)$. Тогава B е $\mathcal{F}$-изразима и

$$|B(t, n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k)| = |A(ct + c, n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k)| \leq \frac{c}{ct+c} = \frac{1}{t+1}.$$

Следователно, f е $\mathcal{F}$-изчислима функция.

Ще покажем две свойства, чрез които по-нататък често ще доказваме $\mathcal{F}$-изчислимост.

Свойство 2.2.4. Нека $k \geq 1$ и $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ е такава функция, че $f(n_1, \ldots, n_k) \neq 0$ за всички естествени $n_1, \ldots, n_k$. Нека $\lambda t, n_1, \ldots, n_k.\min(t+1, f(n_1, \ldots, n_k)) \in \mathcal{F}$. Тогава

$\lambda n_1, \ldots, n_k.\dfrac{1}{f(n_1, \ldots, n_k)}$ е $\mathcal{F}$-изчислима функция.

Доказателство. В сила е неравенството $\left|\dfrac{1}{\min(t+1, f(n_1, \ldots, n_k))} - \dfrac{1}{f(n_1, \ldots, n_k)}\right| \leq \dfrac{1}{t+1}$.
Действително, да фиксираме $t, n_1, \ldots, n_k$.
Първи случай: $f(n_1, \ldots, n_k) \leq t+1$. Тогава $\min(t+1, f(n_1, \ldots, n_k)) = f(n_1, \ldots, n_k)$ и неравенството очевидно е изпълнено: $0 \leq \dfrac{1}{t+1}$.

Втори случай: $f(n_1, \ldots, n_k) > t+1$. Тогава $\min(t+1, f(n_1, \ldots, n_k)) = t+1$ и $\dfrac{1}{t+1} > \dfrac{1}{f(n_1, \ldots, n_k)}$.

Следователно,

$$\left|\frac{1}{\min(t+1, f(n_1, \ldots, n_k))} - \frac{1}{f(n_1, \ldots, n_k)}\right| = \left|\frac{1}{t+1} - \frac{1}{f(n_1, \ldots, n_k)}\right| = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{f(n_1, \ldots, n_k)} \leq \frac{1}{t+1}.$$

Остава да използваме, че $\lambda t, n_1, \ldots, n_k.\dfrac{1}{\min(t+1, f(n_1, \ldots, n_k))}$ е $\mathcal{F}$-изразима функция.

Свойство 2.2.5. Нека $k \geq 1$ и $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ е такава функция, че $f(n_1, \ldots, n_k) \neq 0$ за всички естествени $n_1, \ldots, n_k$. Нека графиката на f е $\mathcal{F}$-релация. Тогава

$\lambda n_1, \ldots, n_k. \dfrac{1}{f(n_1, \ldots, n_k)}$ е $\mathcal{F}$-изчислима функция.

Доказателство. От свойство 2.1.4 получаваме, че функцията $\lambda t, n_1, \ldots, n_k. \min(t, f(n_1, \ldots, n_k))$ е от класа $\mathcal{F}$. Със суперпозиция получаваме, че $\lambda t, n_1, \ldots, n_k. \min(t+1, f(n_1, \ldots, n_k)) \in \mathcal{F}$. Остава да приложим свойство 2.2.4.

2.3. Запазване на $\mathcal{F}$-изчислимостта на функции при аритметичните операции.

Навсякъде $\mathcal{F}$ е един от класовете $\mathcal{E}^2$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{M}^2$.

В този параграф ще изследваме въпроса как се отразяват аритметичните операции върху свойството $\mathcal{F}$-изчислимост на функции. Доказателствата в общи линии следват [6], където са направени за $\mathcal{F}$-изчислими реални числа.

Твърдение 2.3.1. Нека $k \geq 1$ и $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ са $\mathcal{F}$-изчислими функции. Тогава сумата $f+g$ също е $\mathcal{F}$-изчислима функция.

Доказателство. Тъй като f е $\mathcal{F}$-изчислима, съществува $\mathcal{F}$-изразима функция $A : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, такава че $|A(t, n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k)| \leq \dfrac{1}{t+1}$ за всички естествени $t, n_1, \ldots, n_k$. Тъй като g е $\mathcal{F}$-изчислима, съществува $\mathcal{F}$-изразима функция $B : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, такава че $|B(t, n_1, \ldots, n_k) - g(n_1, \ldots, n_k)| \leq \dfrac{1}{t+1}$ за всички естествени $t, n_1, \ldots, n_k$. При това положение,

$|(A(t, n_1, \ldots, n_k) + B(t, n_1, \ldots, n_k)) - (f(n_1, \ldots, n_k) + g(n_1, \ldots, n_k))| =$
$|(A(t, n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k)) + (B(t, n_1, \ldots, n_k) - g(n_1, \ldots, n_k))| \leq$
$|A(t, n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k)| + |B(t, n_1, \ldots, n_k) - g(n_1, \ldots, n_k)| \leq \dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{t+1} = \dfrac{2}{t+1}$.

Тъй като $A + B$ е $\mathcal{F}$-изразима и функцията $\lambda t. \dfrac{2t}{t+1}$ е ограничена, можем да приложим свойство 2.2.3 и по този начин получаваме, че $f + g$ е $\mathcal{F}$-изчислима.

Твърдение 2.3.2. Нека $k \geq 1$ и $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ е $\mathcal{F}$-изчислима функция. Тогава $-f$ също е $\mathcal{F}$-изчислима функция.

Доказателство. Тъй като f е $\mathcal{F}$-изчислима, съществува $\mathcal{F}$-изразима функция $A : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, такава че $|A(t, n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k)| \leq \dfrac{1}{t+1}$ за всички естествени $t, n_1, \ldots, n_k$. При това положение,

$|((-A(t, n_1, \ldots, n_k)) - (-f(n_1, \ldots, n_k))| = |A(t, n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k)| \leq \dfrac{1}{t+1}$.

Тъй като $-A$ е $\mathcal{F}$-изразима, получаваме, че $-f$ е $\mathcal{F}$-изчислима.

Като следствие от твърдения 2.3.1 и 2.3.2 получаваме, че разлика на $\mathcal{F}$-изчислими функции е $\mathcal{F}$-изчислима функция.

Твърдение 2.3.3. Нека $k \geq 1$ и $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ са $\mathcal{F}$-изчислими ограничени функции. Тогава произведението $f.g$ също е $\mathcal{F}$-изчислима функция.

Доказателство. Нека $|f(n_1, \ldots, n_k)| \leq C$ и $|g(n_1, \ldots, n_k)| \leq D$ за всички естествени $n_1, \ldots, n_k$, където C и D са естествени числа.

Тъй като f е $\mathcal{F}$-изчислима, съществува $\mathcal{F}$-изразима функция $A : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, такава че $|A(t, n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k)| \leq \dfrac{1}{t+1}$ за всички естествени $t, n_1, \ldots, n_k$.

От това неравенство лесно следва $|A(t, n_1, \ldots, n_k)| \leq |f(n_1, \ldots, n_k)| + \dfrac{1}{t+1} \leq C+1$ за всички естествени $t, n_1, \ldots, n_k$. Тъй като g е $\mathcal{F}$-изчислима, съществува $\mathcal{F}$-изразима функция $B : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, такава че $|B(t, n_1, \ldots, n_k) - g(n_1, \ldots, n_k)| \leq \dfrac{1}{t+1}$ за всички естествени $t, n_1, \ldots, n_k$. При това положение,

$|A(t, n_1, \ldots, n_k).B(t, n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k).g(n_1, \ldots, n_k)| =$

$|A(t, n_1, \ldots, n_k).B(t, n_1, \ldots, n_k) - A(t, n_1, \ldots, n_k).g(n_1, \ldots, n_k) +$

$A(t, n_1, \ldots, n_k).g(n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k).g(n_1, \ldots, n_k)| =$

$|A(t, n_1, \ldots, n_k).(B(t, n_1, \ldots, n_k) - g(n_1, \ldots, n_k)) + (A(t, n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k)).g(n_1, \ldots, n_k)| \leq$

$|A(t, n_1, \ldots, n_k)|.|B(t, n_1, \ldots, n_k) - g(n_1, \ldots, n_k)| +$

$|A(t, n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k)|.g(n_1, \ldots, n_k)| \leq \dfrac{C+1}{t+1} + \dfrac{D}{t+1} = \dfrac{C+D+1}{t+1}$.

Тъй като $A.B$ е $\mathcal{F}$-изразима и функцията $\lambda t.\dfrac{(C+D+1)t}{t+1}$ е ограничена, можем да приложим свойство 2.2.3 и по този начин получаваме, че $f.g$ е $\mathcal{F}$-изчислима.

Твърдение 2.3.4. Нека $k \geq 1$ и $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ е $\mathcal{F}$-изчислима. Нека $f(n_1, \ldots, n_k) \neq 0$ за всички $n_1, \ldots, n_k$ и частното $\dfrac{1}{f(n_1,\ldots,n_k)}$ е ограничено като функция на $n_1, \ldots, n_k$.

Тогава $\lambda n_1, \ldots, n_k.\dfrac{1}{f(n_1,\ldots,n_k)}$ е $\mathcal{F}$-изчислима функция.

Доказателство. Нека $\left|\dfrac{1}{f(n_1,\ldots,n_k)}\right| \leq D$ за всички естествени $n_1, \ldots, n_k$, където D е положително реално число. Избираме ненулево естествено B, такова че $B \geq 2D - 1$.

При това положение, $\left|\dfrac{1}{f(n_1,\ldots,n_k)}\right| \leq D \leq \dfrac{B+1}{2}$, следователно $|f(n_1, \ldots, n_k)| \geq \dfrac{2}{B+1}$ за всички естествени $n_1, \ldots, n_k$. Тъй като f е $\mathcal{F}$-изчислима, съществува $\mathcal{F}$-изразима функция $A : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, такава че $|A(t, n_1, \ldots, n_k) - f(n_1, \ldots, n_k)| \leq \dfrac{1}{t+1}$ за всички естествени $t, n_1, \ldots, n_k$. Нека $t \geq B$. Тогава

$|A(t, n_1, \ldots, n_k)| \geq |f(n_1, \ldots, n_k)| - |f(n_1, \ldots, n_k) - A(t, n_1, \ldots, n_k)| \geq \dfrac{2}{B+1} - \dfrac{1}{t+1} \geq \dfrac{1}{B+1}$

за всички естествени $n_1, \ldots, n_k$. Оттук следва, че за $t \geq B$ и произволни $n_1, \ldots, n_k$ имаме $A(t, n_1, \ldots, n_k) \neq 0$ и $\left|\dfrac{1}{A(t,n_1,\ldots,n_k)} - \dfrac{1}{f(n_1,\ldots,n_k)}\right| = \dfrac{|A(t,n_1,\ldots,n_k) - f(n_1,\ldots,n_k)|}{|A(t,n_1,\ldots,n_k)||f(n_1,\ldots,n_k)|} \leq \dfrac{h}{t+1}$,

където $h = \dfrac{(B+1)^2}{2}$. Дефинираме $C : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ с $C(m, n_1, \ldots, n_k) = \dfrac{1}{A(m+B, n_1,\ldots,n_k)}$.

Тогава C е $\mathcal{F}$-изразима и $\left|C(m,n_1,\dots,n_k)-\dfrac{1}{f(n_1,\dots,n_k)}\right|\le\dfrac{h}{m+B+1}$.

Остава да използваме, че функцията $\lambda m.\dfrac{mh}{m+B+1}$ е ограничена и свойство 2.2.3.

Окончателно, $\lambda n_1, \dots, n_k.\dfrac{1}{f(n_1,\dots,n_k)}$ е $\mathcal{F}$-изчислима функция.

2.4. Метод за доказване на $\mathcal{E}^2$-изчислимост и $\mathcal{L}^2$-изчислимост.

Методът, който ще използваме за да доказваме $\mathcal{E}^2$-изчислимост и $\mathcal{L}^2$-изчислимост на реалнозначни функции на естествени аргументи и на реални числа, се съдържа в следната теорема и следствието след нея.
В този параграф $\mathcal{F}$ е един от класовете $\mathcal{E}^2$ и $\mathcal{L}^2$.

Теорема 2.4.1. Нека k е естествено число и $\theta : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ е $\mathcal{F}$-изчислима функция. Нека редът $\sum_{s=0}^{\infty}\theta(n_1,\dots,n_k,s)$ е сходящ и $\sigma(n_1, \dots, n_k)$ е неговата сума за всички естествени $n_1, \dots, n_k$. Нека съществува функция $p : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ от класа $\mathcal{F}$, такава че

$$\left|\sum_{s=t+1}^{\infty}\theta(n_1,\dots,n_k,s)\right|\le\frac{1}{n+1}$$

за произволни естествени числа $n_1, \dots, n_k$, n и $t = p(n_1, \dots, n_k, n)$.
Тогава функцията σ също е $\mathcal{F}$-изчислима.

Като частен случай от теорема 2.4.1 (при $k = 0$) получаваме

Следствие 2.4.2. Нека $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е $\mathcal{F}$-изчислима функция. Нека редът $\sum_{s=0}^{\infty}\theta(s)$ е сходящ и α е неговата сума. Нека съществува функция $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ от класа $\mathcal{F}$, такава че

$$\left|\sum_{s=t+1}^{\infty}\theta(s)\right|\le\frac{1}{n+1}$$

за произволно естествено число n и $t = p(n)$.
Тогава реалното число α също е $\mathcal{F}$-изчислимо.

Доказателство на теоремата може да се намери в [8, параграф 2]. То се опира съществено на факта, че класът $\mathcal{F}$ е затворен относно ограничено сумиране.

По този начин, за да се докаже $\mathcal{F}$-изчислимост на сумата на един ред трябва да се решат следните две задачи:

1. Доказателство за $\mathcal{F}$-изчислимост на общия член на реда.
2. Намиране на подходяща оценка за скоростта на сходимост на реда.

2.5. Метод за доказване на $\mathcal{M}^2$-изчислимост.

Методът, който ще използваме за да доказваме $\mathcal{M}^2$-изчислимост, е подобен на метода от параграф 2.4. Изрично ще отбележим, че методът от параграф 2.4 не е приложим за класа $\mathcal{M}^2$, тъй като не е известно дали този клас е затворен относно ограничено сумиране. Модифицираният метод се основава на свойство 2.1.6 и се съдържа в следната

Теорема 2.5.1. Нека $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е такава $\mathcal{M}^2$-изчислима функция, че редът

$$\sum_{s=0}^{\infty} \theta(s)$$

е сходящ и нека числото α е сумата на реда. Нека съществува едноаргументна функция $p \in \mathcal{M}^2$, такава че

$$\left| \sum_{s=[\log_2(t+1)]+1}^{\infty} \theta(s) \right| \le \frac{1}{n+1}$$

за всяко естествено n и $t = p(n)$. Тогава числото α също е $\mathcal{M}^2$-изчислимо.

Доказателството на теоремата се получава чрез малки изменения на доказателството, направено в [8, параграф 2] – твърдения 2, 3 и теоремата.

Лема 2.5.2. Нека $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е $\mathcal{M}^2$-изчислима функция. Съществуват функции $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ и $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ от класа $\mathcal{M}^2$, такива че $\left| \frac{f(s,n) - g(s,n)}{n+1} - \theta(s) \right| \le \frac{1}{n+1}$ за всички естествени n и s.

Доказателство. Тъй като θ е $\mathcal{M}^2$-изчислима, съществуват функции $f_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ и $h_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ от $\mathcal{M}^2$, такива че $\left| \frac{f_1(s,n) - g_1(s,n)}{h_1(s,n)+1} - \theta(s) \right| \le \frac{1}{n+1}$ за всички естествени n и s. Дефинираме $f_0(s, n) = f_1(s, 2n+1)$, $g_0(s, n) = g_1(s, 2n+1)$, $h_0(s, n) = h_1(s, 2n+1)$ за естествени n, s.

Тогава f_0, g_0, h_0 са функции от $\mathcal{M}^2$ и $\left| \frac{f_0(s,n) - g_0(s,n)}{h_0(s,n)+1} - \theta(s) \right| =$

$$\left| \frac{f_1(s,2n+1) - g_1(s,2n+1)}{h_1(s,2n+1)+1} - \theta(s) \right| \le \frac{1}{2n+1+1} = \frac{1}{2(n+1)} \quad (*).$$

Нека $A(i, j) = \left[\frac{i}{j+1} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{2i+j+1}{2(j+1)} \right]$ за естествени i, j. Ясно е, че $A \in \mathcal{M}^2$.

Лесно се вижда, че за всички естествени i, j е в сила неравенството

$$\left| A(i,j) - \frac{i}{j+1} \right| \le \frac{1}{2} \quad (**).$$

Сега дефинираме

$f(s, n) = A((n+1)(f_0(s, n) \dot{-} g_0(s, n)), h_0(s, n))$,

$g(s, n) = A((n+1)(g_0(s, n) \dot{-} f_0(s, n)), h_0(s, n))$ за $s, n \in \mathbb{N}$. Ясно е, че $f \in \mathcal{M}^2$ и $g \in \mathcal{M}^2$.

Ще покажем, че е в сила неравенството

$\left| f(s, n) - g(s, n) - (n+1) \frac{f_0(s,n) - g_0(s,n)}{h_0(s,n)+1} \right| \le \frac{1}{2}$. Фиксираме n и s.

Първи случай: $f_0(s, n) \le g_0(s, n)$. Тогава $f(s, n) = A(0, h_0(s, n)) = 0$ и неравенството приема вида $\left| -g(s, n) - (n+1) \frac{f_0(s,n) - g_0(s,n)}{h_0(s,n)+1} \right| \le \frac{1}{2}$, което е равносилно с $|\, g\,(s,\ n) - (n+1)\ \dfrac{g_0\,(s,n) - f_0\,(s,n)}{h_0(s,n)+1}\,| \le \dfrac{1}{2}$.

Последното е изпълнено заради (**).

Втори случай: $f_0\,(s,\ n) > g_0\,(s,\ n)$. Тогава $g\,(s,\ n) = A\,(0,\ h_0\,(s,\ n)) = 0$ и неравенството приема вида $|\, f\,(s,\ n) - (n+1)\ \dfrac{f_0\,(s,n) - g_0\,(s,n)}{h_0(s,n)+1}\,| \le \dfrac{1}{2}$.

Последното е изпълнено заради (**).

От доказаното неравенство с умножение на $\dfrac{1}{n+1}$ получаваме

$|\, \dfrac{f\,(s,n) - g\,(s,n)}{n+1} - \dfrac{f_0\,(s,n) - g_0\,(s,n)}{h_0(s,n)+1}\,| \le \dfrac{1}{2(n+1)}$. От това неравенство, (*) и неравенството на триъгълника получаваме

$$\left|\frac{f\,(s,n) - g\,(s,n)}{n+1} - \theta(s)\right| \le \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$ за всички естествени n, s.

Лема 2.5.3. Нека $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е $\mathcal{M}^2$-изчислима функция. Нека $\theta^{\Sigma} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е дефинирана с $\theta^{\Sigma}\,(t) = \sum_{s=0}^{[\log_2(t+1)]} \theta(s)$ за всички естествени t. Тогава θ^{Σ} е $\mathcal{M}^2$-изчислима.

Доказателство. От лема 2.5.2 съществуват функции $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ и $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ от класа $\mathcal{M}^2$, такива че $\left|\dfrac{f\,(s,n) - g\,(s,n)}{n+1} - \theta(s)\right| \le \dfrac{1}{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$.

Нека $b\,(t) = [\log_2(t+1)]$ за естествено t. Като се използва свойство 2.1.7, лесно се съобразява, че графиката на функцията $\lambda k.2^k$ е Δ_0-определима. От еквивалентността $y = b\,(t) \leftrightarrow \exists z \le t+1\ (z = 2^y \wedge 2z > t+1)$ получаваме, че графиката на b е Δ_0-определима. Освен това е ясно, че b е ограничена от полином на t. Следователно, $b \in \mathcal{M}^2$.

Разглеждаме функциите $f^{\Sigma}: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ и $g^{\Sigma}: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, дефинирани с

$$f^{\Sigma}\,(t,\ n) = \sum_{s=0}^{b(t)} f\,(s, nb(t)+n+b(t)),\quad g^{\Sigma}\,(t,\ n) = \sum_{s=0}^{b(t)} g\,(s, nb(t)+n+b(t)).$$

Тези функции са от класа $\mathcal{M}^2$, тъй като този клас е затворен относно log-ограничено сумиране (свойство 2.1.6). Като използваме неравенството от по-горе заместваме n с $nb\,(t)+n+b\,(t)$ и получаваме

$$\left|\frac{f\,(s, nb(t)+n+b(t)) - g\,(s, nb(t)+n+b(t))}{nb(t)+n+b(t)+1} - \theta(s)\right| \le \frac{1}{nb(t)+n+b(t)+1} = \frac{1}{(b(t)+1)(n+1)}$$

за всички s, n, t – естествени числа. Като сумираме тези неравенства за $s = 0, 1, \ldots, b\,(t)$ и използваме неравенството на триъгълника получаваме

$$\left|\frac{f^{\Sigma}(t,n) - g^{\Sigma}(t,n)}{nb(t)+n+b(t)+1} - \theta^{\Sigma}(t)\right| \le (b(t)+1)\frac{1}{nb(t)+n+b(t)+1} = \frac{1}{n+1}$$ за всички естествени n, t.

Така получаваме, че θ^{Σ} е $\mathcal{M}^2$-изчислима.

Вече сме готови да докажем теоремата.

Доказателство на теорема 2.5.1. Нека θ^{Σ} е функцията от лема 2.5.3.

От същата лема получаваме, че θ^{Σ} е $\mathcal{M}^2$-изчислима. Следователно, съществуват функции $f_1: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ и $h_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ от класа $\mathcal{M}^2$, такива че

$$\left|\frac{f_1\,(t,n) - g_1\,(t,n)}{h_1\,(t,n)+1} - \theta^{\Sigma}(t)\right| \le \frac{1}{n+1}$$ за n, $t \in \mathbb{N}$.

Дефинираме $f(n) = f_1(p(2n+1), 2n+1)$, $g(n) = g_1(p(2n+1), 2n+1)$, $h(n) = h_1(p(2n+1), 2n+1)$. Естествено, f, g и h са от $\mathcal{M}^2$ (тъй като $p \in \mathcal{M}^2$). Сега имаме:

$$\left|\frac{f(n)-g(n)}{h(n)+1}-\alpha\right| = \left|\frac{f(n)-g(n)}{h(n)+1}-\sum_{s=0}^{\infty}\theta(s)\right| =$$

$$\left|\frac{f(n)-g(n)}{h(n)+1}-\left(\sum_{s=0}^{[\log_2(p(2n+1)+1)]}\theta(s)+\sum_{s=[\log_2(p(2n+1)+1)]+1}^{\infty}\theta(s)\right)\right| \leq$$

$$\left|\frac{f_1(p(2n+1),2n+1)-g_1(p(2n+1),2n+1)}{h_1(p(2n+1),2n+1)+1}-\theta^{\Sigma}(p(2n+1))\right| + \left|\sum_{s=[\log_2(p(2n+1)+1)]+1}^{\infty}\theta(s)\right| \leq$$

$\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n+1}$ за всички естествени n. Окончателно, α е $\mathcal{M}^2$-изчислимо.

Така за да се докаже $\mathcal{M}^2$-изчислимост на сумата на един ред трябва да се решат следните две задачи:

1. Доказателство за $\mathcal{M}^2$-изчислимост на общия член на реда.
2. Намиране на подходяща оценка за скоростта на сходимост на реда.

2.6. Някои неравенства.

В този параграф ще отбележим някои известни или лесно доказуеми неравенства, които по-нататък ще бъдат полезни при оценяването на скоростта на сходимост на редове. За по-голяма пълнота, за някои от тях ще дадем доказателство.

Твърдение 2.6.1. Нека $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е монотонно намаляваща редица, която има граница 0. Нека $N \in \mathbb{N}$. Тогава редът $\sum_{s=N}^{\infty}(-1)^s a_s$ е сходящ и $\left|\sum_{s=N}^{\infty}(-1)^s a_s\right| \leq a_N$.
Доказателството може да се намери във всяка по-подробна книга по анализ (критерий на Лайбниц за сходимост на редове с алтерниращи членове).

Твърдение 2.6.2. Нека N е естествено число и $f : [N, \infty) \to \mathbb{R}$ е неотрицателна монотонно намаляваща функция. Тогава за всяко естествено $M \geq N$ е изпълнено неравенството:

$$\sum_{n=N}^{M} f(n) \leq f(N) + \int_N^M f(x)dx.$$

В частност, ако интегралът $\int_N^{\infty} f(x)dx$ е сходящ, то редът $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ е сходящ и е в сила оценката $\sum_{n=N}^{\infty} f(n) \leq f(N) + \int_N^{\infty} f(x)dx$.
Доказателство може да се намери във всяка по-подробна книга по анализ (интегрален критерий за сходимост на редове).

Твърдение 2.6.3. Нека $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е строго монотонно растяща редица.
Тогава е изпълнено неравенството $k(n) \geq n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.
Доказателство. Тривиална индукция по n.

Твърдение 2.6.4. Нека $a \geq 2$ е реално число. Тогава за всяко $k \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството $a^k \geq k+1$.

Доказателство. Индукция по k. При $k = 0$ неравенството е вярно, защото
$a^0 = 1 \geq 1 = 0+1$. Нека $k \geq 0$ и $a^k \geq k+1$. Тогава $a^{k+1} = a.a^k \geq 2.(k+1) = 2k+2 \geq k+2$.

Твърдение 2.6.5. За всяко естествено k, $2^k > 3k - 3$.
Доказателство. Индукция по k. При $k = 0$ неравенството е вярно, защото
$2^0 = 1 > -3 = 3.0 - 3$. При $k = 1$ неравенството също е вярно, тъй като $2^1 = 2 > 0 = 3.1 - 3$.
При $k = 2$ неравенството отново е вярно: $2^2 = 4 > 3 = 3.2 - 3$.
Нека $k \geq 2$ и $2^k > 3k - 3$. Тогава $2^{k+1} = 2.2^k > 2.(3k - 3) = 6k - 6 \geq 3k = 3(k+1) - 3$.

Твърдение 2.6.6. За всяко естествено k, $16^{2^k} - 1 \geq 8^{2^k+k-1}$.
Доказателство. Имаме $16^{2^k} = 2^{2^k}.8^{2^k}$ и $8^{2^k+k-1} = 8^{2^k}.2^{3k-3}$. От твърдение 2.6.5 получаваме $2^k > 3k - 3$. Оттук следва, че $2^{2^k} > 2^{3k-3}$.
Така $16^{2^k} = 2^{2^k}.8^{2^k} > 8^{2^k}.2^{3k-3} = 8^{2^k+k-1}$. Тъй като и от двете страни на последното неравенство имаме естествени числа, $16^{2^k} - 1 \geq 8^{2^k+k-1}$.

Твърдение 2.6.7. За всяко $n \in \mathbb{N}$, $2^n \leq (n+1)!$.
Доказателство. При $n = 0$, неравенството очевидно е вярно: $2^0 = 1 \leq 1 = (0+1)!$.
При $n > 0$, $2^n = \underbrace{2.2.\ldots.2.2}_{n \text{ пъти}} \leq 2.3.\ \ldots\ n.(n+1) = (n+1)!$.

Твърдение 2.6.8. За всяко $n \in \mathbb{N}$, $2^n \leq \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$.

Доказателство. При $n = 0$ неравенството е вярно, тъй като $2^0 = 1 = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При $n > 0$, $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2n-k}{n-k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2n-2k+k}{n-k} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(2 + \frac{k}{n-k}\right) \geq \prod_{k=0}^{n-1} 2 = 2^n$.

Твърдение 2.6.9. За всяко естествено k, $p_k \geq k+2$, където p_k е $(k+1)$-то просто.
Доказателство. Използваме твърдение 2.6.3, приложено за редицата $\lambda k.p_k - 2$.

Твърдение 2.6.10. Съществува естествено число g, такова че $p_k < (k+1)^2$ за всяко естествено $k > g$.

Доказателството на твърдението използва теоремата на Чебишов за разпределението на простите числа и може да бъде намерено в [5, стр. 67].

Твърдение 2.6.11. За всяко реално $x \in [0, 1)$ са изпълнени неравенствата:
$-\ln(1 - x) \leq x.\ \frac{1}{1-x}$ и $\ln(1+x) \leq x$.
Доказателство. Използваме, че за всяко $x \in (-1, 1]$ е изпълнено равенството
(*) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$. При това положение, за $x \in [0, 1)$, $-x \in (-1, 0]$, така че
$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$. Оттук $-\ln(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \leq \sum_{s=1}^{\infty} x^s = x.\ \frac{1}{1-x}$.
От (*) и твърдение 2.6.1 получаваме $|\ln(1+x)| = \ln(1+x) \leq x$ за $x \in [0, 1)$.

Глава 3

$\mathcal{E}^2$-изчислимост на верижни дроби.

3.1. Общи положения за верижните дроби.

За всяка непразна крайна редица $s_0, s_1, \ldots, s_k$ от ненулеви реални числа дефинираме $[s_0, s_1, \ldots, s_k]$ – *крайна верижна дроб*, породена от редицата
по следния начин:

$$[s_0, s_1, \ldots, s_k] = \cfrac{1}{s_0 + \cfrac{1}{s_1 + \cfrac{1}{s_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{s_{k-1} + \cfrac{1}{s_k}}}}}}.$$

Нека $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{\,0\,\}$ е редица от ненулеви естествени числа.

Образуваме редицата $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ по следния начин: $b_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

Да дефинираме две редици $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ чрез следните рекурентни връзки:
$h_0 = 1$, $h_1 = a_1$, $h_{n+2} = a_{n+2}.h_{n+1} + h_n$ за всяко естествено n,
$k_0 = a_0$, $k_1 = a_1.a_0 + 1$, $k_{n+2} = a_{n+2}.k_{n+1} + k_n$ за всяко естествено n.

Изпълнени са следните свойства [10, глава 1]:
1. $k_n < k_{n+1}$ за всяко естествено n.
2. $b_n = \dfrac{h_n}{k_n}$ за всяко естествено n.
3. $b_n = \dfrac{1}{a_0} + \sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{(-1)^s}{k_s.k_{s-1}}$ за всяко естествено n.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ съществува.

Дефиниция 3.1.1. Означаваме $\overline{a} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. $\overline{a}$ се нарича *безкрайна верижна дроб*, породена от редицата a. По-нагледно (и по-неформално),

$$\overline{a} = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Може да се покаже, че за всяка редица $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{\,0\,\}$ от ненулеви естествени числа, безкрайната верижна дроб $\overline{a}$ е ирационално число. Обратно, всяко ирационално число от интервала (0, 1) е представимо като безкрайна верижна дроб при подходяща редица от ненулеви числа $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Съответствието между ирационалните числа от (0, 1) и верижните дроби, породени от редици от ненулеви естествени числа е взаимноеднозначно. Доказателства на тези факти могат да се намерят в [10, глава 2].

3.2. Основен резултат.

Нашата цел е да покажем следната

Теорема 3.2.1. Нека $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{0\}$ е редица от ненулеви числа, която е от класа $\mathcal{E}^2$. Тогава числото $\overline{a}$ е $\mathcal{E}^2$-изчислимо.

Доказателство. Използваме следните равенства от параграф 3.1:

$$\overline{a} = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_0} + \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^s}{k_s.k_{s-1}} = \frac{1}{a_0} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{k_s.k_{s-1}} = \frac{1}{a_0} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{k_{s+1}.k_s}.$$

Тъй като рационалните числа са $\mathcal{E}^2$-изчислими и $\mathcal{E}^2$-изчислимите числа образуват поле (виж [6]), достатъчно е да покажем $\mathcal{E}^2$-изчислимост на сумата на реда.

За целта използваме основният метод от параграф 2.4. По въпроса със сходимостта използваме твърдение 2.6.1: $\left| \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{k_{s+1}.k_s} \right| \le \frac{1}{k_{t+2}.k_{t+1}} \le \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1}$ при $t = n$, тъй като $k_t \ge t$ за всяко естествено t от твърдение 2.6.3.

Остава да покажем, че редицата $\lambda s.\frac{(-1)^{s+1}}{k_{s+1}.k_s}$ е $\mathcal{E}^2$-изчислима.

Достатъчно е да покажем $\mathcal{E}^2$-изчислимост на редиците $\lambda s.(-1)^{s+1}$, $\lambda s.\frac{1}{k_s}$, $\lambda s.\frac{1}{k_{s+1}}$ и да използваме твърдение 2.3.3, което дава, че произведението на ограничени $\mathcal{E}^2$-изчислими редици е само по себе си $\mathcal{E}^2$-изчислима редица.

Имаме $(-1)^{s+1} = s \bmod 2 - (s+1) \bmod 2$ за всяко $s \in \mathbb{N}$, така че първата редица е дори $\mathcal{E}^2$-изразима. $\mathcal{E}^2$-изчислимост на третата редица следва от $\mathcal{E}^2$-изчислимост на втората, тъй като се получава от нея със суперпозиция на функцията $\lambda s.s+1 \in \mathcal{E}^2$.

За $\mathcal{E}^2$-изчислимост на втората редица дефинираме функцията $p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ с $p(s, t) = \min(k_s, t+1)$. Ще покажем, че p е от класа $\mathcal{E}^2$.

Лема 3.2.2. Нека $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$, $b : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ и
$f(0, t) = g_0(t)$, $f(1, t) = g_1(t)$,
$f(s+2, t) = h(s, t, f(s+1, t), f(s, t))$,
$f(s, t) \le b(s, t)$,
за всички естествени s, t. Ако g_0, g_1, h, b са от класа $\mathcal{E}^2$, то f също е от този клас.

Доказателство. Нека $\Pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $R : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ са дефинирани с
$\Pi(x, y) = (x+y)^2 + x$, $L(z) = z \dot{-} [\sqrt{z}]^2$, $R(z) = [\sqrt{z}] \dot{-} L(z)$.

Функцията $\lambda z.[\sqrt{z}]$ е от класа $\mathcal{E}^2$: $[\sqrt{z}] = \mu y \le z\,[y^2 \le z \wedge z < (y+1)^2]$ за всяко $z \in \mathbb{N}$.

От последния факт е ясно, че трите функции Π, L, R са от $\mathcal{E}^2$. Освен това лесно се проверяват равенствата $L(\Pi(x, y)) = x$, $R(\Pi(x, y)) = y$ за всички естествени x, y. Изображението Π може да се използва за кодиране на двойките естествени числа (функциите L и R са декодиращи).

Да дефинираме $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ с $F(s, t) = \Pi(f(s+1, t), f(s, t))$ за всички естествени s, t.

Ще покажем, че $F \in \mathcal{E}^2$. За $s, t \in \mathbb{N}$ имаме $F(0, t) = \Pi(f(1, t), f(0, t)) = \Pi(g_1(t), g_0(t))$,
$F(s+1, t) = \Pi(f(s+2, t), f(s+1, t)) = \Pi(h(s, t, f(s+1, t), f(s, t)), f(s+1, t)) =$
$\Pi(h(s, t, L(F(s, t)), R(F(s, t))), L(F(s, t)))$.

Също така, $F(s, t) = \Pi(f(s+1, t), f(s, t)) \le \Pi(b(s+1, t), b(s, t))$ и последната функция е от $\mathcal{E}^2$ (тук използваме очевидния факт, че Π е монотонна и по двата си аргумента).

Следователно, F се получава с ограничена примитивна рекурсия от функции от $\mathcal{E}^2$ и значи $F \in \mathcal{E}^2$. Тъй като $f(s, t) = R(F(s, t))$ за $s, t \in \mathbb{N}$, f също е от класа $\mathcal{E}^2$.

За функцията p от по-горе имаме следното представяне:
$p(0, t) = \min(k_0, t+1)$, $p(1, t) = \min(k_1, t+1)$,
$p(s+2, t) = \min(k_{s+2}, t+1) = \min(a_{s+2}k_{s+1} + k_s, t+1) = \min(a_{s+2}p(s+1, t) + p(s, t), t+1)$.
Единствено последното равенство не е очевидно. Да фиксираме s, t.
Първи случай: $k_{s+1} \leq t+1$. Тогава $k_s < t+1$. Следователно, $p(s+1, t) = k_{s+1}$ и $p(s, t) = k_s$, така че равенството е изпълнено.
Втори случай: $k_{s+1} > t+1$. Тогава $\min(a_{s+2}k_{s+1} + k_s, t+1) = t+1$ (тук използваме, че $a_{s+2} > 0$).
Също, $p(s+1, t) = t+1$ и $\min(a_{s+2}p(s+1, t) + p(s, t), t+1) = \min(a_{s+2}(t+1) + p(s, t), t+1) = t+1$, тъй като $a_{s+2} > 0$. Така отново имаме равенство.
Тъй като $a \in \mathcal{E}^2$ и $p(s, t) \leq t+1$ от лема 3.2.2 заключаваме, че $p \in \mathcal{E}^2$.
Остава да приложим свойство 2.2.4 и така получаваме, че редицата
$\lambda s. \dfrac{1}{k_s}$ е $\mathcal{E}^2$-изчислима, с което доказателството е завършено.

От теоремата получаваме още едно доказателство за един факт, доказан в [7].

Следствие: Числото e е $\mathcal{E}^2$-изчислимо.

Доказателство. Известен факт е, че е изпълнено $e = 2 + \overline{a}$, където a е редицата
1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, … , която има представянето
$a_n = 1$, ако ($n \bmod 3 = 0$ или $n \bmod 3 = 2$),
$a_n = 2([n/3]+1)$, ако $n \bmod 3 = 1$,
от където следва, че $a \in \mathcal{E}^2$.

Между другото в параграф 5.1 ще видим, че числото e дори е $\mathcal{M}^2$-изчислимо.

Глава 4

$\mathcal{L}^2$-изчислимост на известни константи.

В тази глава ще приложим метода от параграф 2.4 за да докажем $\mathcal{L}^2$-изчислимост на различни константи.

4.1. Логаритъм от положително цяло число.

В този параграф ще покажем, че числата $\ln N$ за $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ са $\mathcal{L}^2$-изчислими.

За целта използваме следното представяне: $\ln(1+\frac{1}{N}) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s+1)N^{s+1}}$ за $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

От него следва, че $\ln(N+1) = \ln N + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s+1)N^{s+1}}$ за $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Сега прилагаме индукция по $N \geq 1$. При $N = 1$, $\ln N = 0$, което очевидно е $\mathcal{L}^2$-изчислимо. Нека $N \geq 1$ и $\ln N$ е $\mathcal{L}^2$-изчислимо. За да докажем, че $\ln(N+1)$ е $\mathcal{L}^2$-изчислимо, използваме горното представяне и факта, че $\mathcal{L}^2$-изчислимите числа образуват поле (виж [6]). Достатъчно е да покажем, че сумата на реда е $\mathcal{L}^2$-изчислимо реално число.

За целта използваме основния метод. Функциите $\lambda s.(-1)^s$ и $\lambda s.\frac{1}{s+1}$ са $\mathcal{L}^2$-изразими, следователно $\mathcal{L}^2$-изчислими. Функцията $\lambda s.N^{s+1}$ има ниско елементарна графика, тъй като се получава с ограничено произведение от константа (свойство 2.1.5).

Следователно, $\lambda s.\frac{1}{N^{s+1}}$ е $\mathcal{L}^2$-изчислима от свойство 2.2.5. По този начин общия член на реда е произведение на три ограничени $\mathcal{L}^2$-изчислими функции, следователно този общ член сам по себе си е $\mathcal{L}^2$-изчислим (твърдение 2.3.3). По въпроса със сходимостта използваме неравенство 2.6.1: $\left|\sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s+1)N^{s+1}}\right| \leq \frac{1}{(t+2)N^{t+2}} \leq \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1}$ при $t = n$.

Окончателно, $\ln(N+1)$ е $\mathcal{L}^2$-изчислимо реално число.

4.2. Константа на Каталан.

Константата на Каталан G се дефинира по следния начин [3, стр. 53]:

$$G = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s+1)^2}.$$

Ще покажем, че G е $\mathcal{L}^2$-изчислима. За целта използваме основния метод.

Ясно е, че общия член е $\mathcal{L}^2$-изразима (и следователно $\mathcal{L}^2$-изчислима) функция на s:

$\frac{(-1)^s}{(2s+1)^2} = \frac{(s+1) \bmod 2 - s \bmod 2}{(4s^2+4s)+1}$ за всяко $s \in \mathbb{N}$. По въпроса със сходимостта използваме неравенство 2.6.1: $\left|\sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(2t+3)^2} \leq \frac{1}{2t+3} \leq \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1}$ при $t = n$.

Така G е $\mathcal{L}^2$-изчислима.

4.3. Константа на Ойлер.

Всъщност, $\mathcal{L}^2$-изчислимостта на константата на Ойлер γ е доказана в [9], но там се използва друго представяне.

Тук използваме следното представяне [3, стр. 30]:

$$\gamma = \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1}{s+1} - \ln(1+\frac{1}{s+1})\right) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j+2).(s+1)^{j+2}}.$$

За да покажем $\mathcal{L}^2$-изчислимост на γ използваме двукратно основния метод.

Първо ще покажем, че сумата на вътрешния ред е $\mathcal{L}^2$-изчислима функция на s.

След това ще покажем подходяща оценка за скоростта на сходимост на външния ред.

Функцията $\lambda s, j.(s+1)^{j+2}$ има ниско елементарна графика (свойство 2.1.5).

От свойство 2.2.5 получаваме, че $\lambda s, j.\dfrac{1}{(s+1)^{j+2}}$ е $\mathcal{L}^2$-изчислима функция.

Функциите $\lambda s, j.(-1)^j$ и $\lambda s, j.\dfrac{1}{(j+2)}$ са $\mathcal{L}^2$-изразими, следователно $\mathcal{L}^2$-изчислими.

По този начин общия член на вътрешния ред е произведение на три ограничени $\mathcal{L}^2$-изчислими функции, така че той сам по себе си е $\mathcal{L}^2$-изчислим (твърдение 2.3.3).

По въпроса със сходимостта използваме неравенство 2.6.1:

$$\left|\sum_{j=t+1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j+2).(s+1)^{j+2}}\right| \le \frac{1}{(t+3).(s+1)^{t+3}} \le \frac{1}{t+3} \le \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1} \text{ при } t = n.$$

По този начин общия член на външния ред $\lambda s.\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j+2).(s+1)^{j+2}}$ е $\mathcal{L}^2$-изчислим.

По въпроса със сходимостта отново използваме неравенство 2.6.1 (при $N = 0$):

$$\left|\sum_{s=t+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j+2).(s+1)^{j+2}}\right| \le \sum_{s=t+1}^{\infty}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j+2).(s+1)^{j+2}}\right| \le \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{2.(s+1)^2} = \frac{1}{2}.\sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{(s+1)^2} \le$$

$$\frac{1}{2}.\sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{2}.\sum_{s=t+1}^{\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{2}.\frac{1}{t+1} \le \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1} \text{ при } t = n.$$

4.4. Константа на Мертенс.

Константата на Мертенс B_1 има следното представяне [3, стр. 94]:

$B_1 = \gamma - \displaystyle\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+2).\mathrm{p}_s{}^{j+2}}$, където γ е константата на Ойлер, p_s е $(s+1)$-то просто число.

Тъй като γ е $\mathcal{L}$-изчислима (параграф 4.3) и разлика на $\mathcal{L}^2$-изчислими числа е $\mathcal{L}^2$-изчислимо число, достатъчно е да се съсредоточим върху $\mathcal{L}^2$-изчислимост на двойния ред. Отново ще приложим двукратно основния метод, както в параграф 4.3.

Функцията $\lambda s, j.\dfrac{1}{j+2}$ очевидно е $\mathcal{L}^2$-изчислима (тя дори е $\mathcal{L}^2$-изразима).

Тъй като $\lambda s.\mathrm{p}_s \in \mathcal{L}^2$ и $\mathrm{p}_s{}^{j+2} = \displaystyle\prod_{i=0}^{j+1}\mathrm{p}_s$ се получава с ограничено произведение, от свойство 2.1.5 $\lambda s, j.\mathrm{p}_s{}^{j+2}$ има ниско елементарна графика.

От свойство 2.2.5 получаваме, че $\lambda s, j.\dfrac{1}{\mathrm{p}_s{}^{j+2}}$ е $\mathcal{L}^2$-изчислима. Сега от твърдение 2.3.3 общия член на вътрешния ред е $\mathcal{L}^2$-изчислим.

По-нататък да разгледаме въпроса със скоростта на сходимост. Имаме

$$\sum_{j=t+1}^{\infty}\frac{1}{(j+2).\mathrm{p}_s^{\,j+2}} \le \sum_{j=t+1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{p}_s^{\,j+2}} = \frac{1}{\mathrm{p}_s^{\,t+3}}.\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{p}_s}} = \frac{1}{\mathrm{p}_s^{\,t+2}(\mathrm{p}_s-1)} \le \frac{1}{\mathrm{p}_s^{\,t+2}} \le$$

$$\frac{1}{\mathrm{p}_s^{\,t+1}} \le \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1}$$ при $t = n$. Използвахме неравенството 2.6.4 $\mathrm{p}_s^{t+1} \ge t+1$ ($\mathrm{p}_s \ge 2$).

Така общия член на външния ред $\lambda s.\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+2).\mathrm{p}_s^{\,j+2}}$ е $\mathcal{L}^2$-изчислим.

Следователно, за да получим $\mathcal{L}^2$-изчислимост на външния ред трябва да разгледаме скоростта на сходимост. Имаме

$$\sum_{s=t+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+2).\mathrm{p}_s^{\,j+2}} \le \sum_{s=t+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{p}_s^{\,j+2}} = \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{p}_s^{\,2}}.\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{p}_s}} = \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{p}_s.(\mathrm{p}_s-1)} \le$$

$$\sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{(s+1).s} = \sum_{s=t+1}^{\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1}$$ при $t = n$.

Използвахме неравенството 2.6.9 $\mathrm{p}_s \ge s+1$. Така B_1 е $\mathcal{L}^2$-изчислима.

4.5. Допълнение към константата на Мертенс.

Нека $w(n)$ е броят на различните прости делители на положителното цяло n.
В [3, стр. 94] се разглежда средното аритметично на $w(1), \ldots, w(n)$:

$\mathrm{E}_n(w) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w(i)$ и дисперсията: $\mathrm{Var}_n(w) = \mathrm{E}_n(w^2) - \mathrm{E}_n(w)$.

Изпълнено е: $\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{Var}_n(w)-\ln(\ln(n))\right) = B_1 - N - \frac{\pi^2}{6}$,

където B_1 е константата на Мертенс, $N = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{p}_s^{\,2}}$ (p_s е $(s+1)$-то просто).

Ще покажем $\mathcal{L}^2$-изчислимост на последната граница. В параграф 4.4 видяхме, че B_1 е $\mathcal{L}^2$-изчислима, освен това π е $\mathcal{L}^2$-изчислимо [8, стр. 867] и така е достатъчно да проверим $\mathcal{L}^2$-изчислимост на N.

Факт е, че $\lambda s.\mathrm{p}_s \in \mathcal{L}^2$, оттук също $\lambda s.\mathrm{p}_s^{\,2} \in \mathcal{L}^2$ и значи $\lambda s.\frac{1}{\mathrm{p}_s^{\,2}}$ е $\mathcal{L}^2$-изразима, следователно $\mathcal{L}^2$-изчислима функция. По въпроса със сходимостта: $\sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{p}_s^{\,2}} \le \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{p}_s.(\mathrm{p}_s-1)} \le$

$$\sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{(s+1).s} = \sum_{s=t+1}^{\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1}$$ при $t = n$.

Използвахме неравенството 2.6.9 $\mathrm{p}_s \ge s+1$. Окончателно, N е $\mathcal{L}^2$-изчислимо число, така че въпросната граница също има това свойство.

4.6. Константи на Лебег.

Фиксираме естествено число n.
Константата на Лебег L_n има следното представяне [3, стр. 251]:

$$L_n = \frac{16}{\pi^2}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{(2n+1)s}\frac{1}{4s^2-1}\frac{1}{2j-1} = \frac{16}{\pi^2}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{(2n+1)(s+1)-1}\frac{1}{4(s+1)^2-1}\frac{1}{2j+1}.$$

Тъй като числото π е $\mathcal{L}^2$-изчислимо, достатъчно е да докажем $\mathcal{L}^2$-изчислимост на сумата на реда.

Нека $\theta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ е функцията, дефинирана с $\theta(s, j) = \dfrac{1}{4(s+1)^2-1}\dfrac{1}{2j+1}$ за $k, j \in \mathbb{N}$.

Ясно е, че θ е $\mathcal{L}^2$-изразима функция, така че θ е $\mathcal{L}^2$-изчислима. Тъй като общия член $\sum_{j=0}^{(2n+1)(s+1)-1}\theta(s,j)$ на реда се получава с ограничено сумиране от θ (горната граница е функция от $\mathcal{L}^2$), то този общ член е $\mathcal{L}^2$-изчислима функция (виж [8, стр. 865]).
Сега ще разгледаме въпроса със скоростта на сходимост.

Имаме $\displaystyle\sum_{s=t+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{(2n+1)(s+1)-1}\frac{1}{4(s+1)^2-1}\frac{1}{2j+1} = \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{(2s+1)(2s+3)}\sum_{j=0}^{(2n+1)(s+1)-1}\frac{1}{2j+1}$.

Редицата $\displaystyle\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{j}-\ln(s)$ е сходяща (при $s \to \infty$) към числото γ– константата на Ойлер.

Следователно, тя е ограничена и нека $\displaystyle\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{j}-\ln(s) \le C$ за всяко естествено s, където C е подходящо естествено число. Имаме

$$\sum_{j=0}^{(2n+1)(s+1)-1}\frac{1}{2j+1} \le \sum_{j=1}^{2((2n+1)(s+1)-1)+1}\frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{(2n+1)(2s+2)-1}\frac{1}{j} \le C + \ln((2n+1)(2s+2)-1).$$

Така $\displaystyle\sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{(2s+1)(2s+3)}\sum_{j=0}^{(2n+1)(s+1)-1}\frac{1}{2j+1} \le \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{C+\ln((2n+1)(2s+2)-1)}{(2s+1)(2s+3)}$.

Сега използваме, че редицата $\dfrac{C+\ln((2n+1)(2s+2)-1)}{(2s+1)(2s+3)}.s^{\frac{3}{2}}$ е сходяща (при $s \to \infty$).

Това се дължи на факта, че логаритмичната функция расте по бавно от степенната функция. Оттук получаваме, че тази редица е ограничена и нека D е такава естествена ненулева константа, че $\dfrac{C+\ln((2n+1)(2s+2)-1)}{(2s+1)(2s+3)}.s^{\frac{3}{2}} \le D$ за $s \in \mathbb{N}$.

При това положение, $\displaystyle\sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{C+\ln((2n+1)(2s+2)-1)}{(2s+1)(2s+3)} \le \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{D}{s^{\frac{3}{2}}} = D.\sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}$.

За да оценим последния ред използваме твърдение 2.6.2 и получаваме:

$$\sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} + \int_{t+1}^{\infty}\frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} + \left.\frac{s^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right|_{t+1}^{\infty} = \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{(t+1)^{\frac{1}{2}}} \le \frac{3}{\sqrt{t+1}}.$$

Окончателно, $\displaystyle\sum_{s=t+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{(2n+1)(s+1)-1}\frac{1}{4(s+1)^2-1}\frac{1}{2j+1} \le \frac{3D}{\sqrt{t+1}} = \frac{1}{n+1}$ при $t = (3Dn + 3D)^2 \dot{-} 1$.

Така L_n е $\mathcal{L}^2$-изчислимо реално число.

4.7. Логаритъм от константата на Хинчин.

Нека K е константата на Хинчин.
За нейния логаритъм имаме следното представяне [3, стр. 60]:

$$\ln K.\ln 2 = -\sum_{s=2}^{\infty}\ln(1-\frac{1}{s})\ln(1+\frac{1}{s}) = \sum_{s=0}^{\infty}(-\ln(1-\frac{1}{s+2}))\ln(1+\frac{1}{s+2}).$$

Вече видяхме в параграф 4.1, че ln 2 е $\mathcal{L}^2$-изчислимо реално число. Следователно, достатъчно е да разгледаме сумата на реда. Следвайки основния метод, първото нещо е да покажем $\mathcal{L}^2$-изчислимост на общия член на реда.
Използваме следното представяне:

$$-\ln(1-\frac{1}{s+2}) = \frac{1}{s+2}+\frac{1}{2(s+2)^2}+\frac{1}{3(s+2)^3}+\ldots = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+1)(s+2)^{j+1}}.$$

Ясно е, че функцията $\lambda s, j.\frac{1}{j+1}$ е $\mathcal{L}^2$-изчислима (дори $\mathcal{L}^2$-изразима). Функцията $\lambda s, j.(s+2)^{j+1}$ има ниско елементарна графика (свойство 2.1.5), а този факт влече $\mathcal{L}^2$-изчислимост на функцията $\lambda s, j.\frac{1}{(s+2)^{j+1}}$ (свойство 2.2.5). От твърдение 2.3.3 общия член е $\mathcal{L}$-изчислим. По въпроса за скоростта на сходимост:

$$\sum_{j=t+1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)(s+2)^{j+1}} \le \sum_{j=t+1}^{\infty}\frac{1}{(s+2)^{j+1}} = \frac{1}{(s+2)^{t+2}}.\frac{1}{1-\frac{1}{s+2}} = \frac{1}{(s+2)^{t+1}}.\frac{1}{s+1} \le$$

$\frac{1}{(s+2)^{t+1}} \le \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1}$ при $t = n$. Използвахме неравенство 2.6.4 $a^k \ge k$ при $a \ge 2$.

И така $\lambda s.-\ln(1-\frac{1}{s+2})$ е $\mathcal{L}^2$-изчислима функция.
По-нататък използваме следното представяне:

$$\ln(1+\frac{1}{s+2}) = \frac{1}{s+2}-\frac{1}{2(s+2)^2}+\frac{1}{3(s+2)^3}-\ldots = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j+1)(s+2)^{j+1}}.$$

Общия член е произведение на три ограничени $\mathcal{L}^2$-изчислими функции (за две от тях видяхме преди малко, функцията $\lambda j.(-1)^j$ е $\mathcal{L}^2$-изразима) и от твърдение 2.3.3 той е $\mathcal{L}^2$-изчислима функция. По въпроса за сходимост използваме неравенство 2.6.1:

$$\left|\sum_{j=t+1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j+1)(s+2)^{j+1}}\right| \le \frac{1}{(t+2)(s+2)^{t+2}} \le \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1} \text{ при } t = n.$$

Следователно, $\lambda s.\ln(1+\frac{1}{s+2})$ е $\mathcal{L}^2$-изчислима функция.
Изпълнени са следните оценки:

$0 \le -\ln(1-\frac{1}{s+2}) \le \ln 2$, $0 \le \ln(1+\frac{1}{s+2}) \le \ln\frac{3}{2}$ за всяко естествено число s.

Така общия член на първоначалния ред за $\ln K$ е произведение на две ограничени $\mathcal{L}^2$-изчислими функции и значи той е $\mathcal{L}^2$-изчислим (твърдение 2.3.3).
Остава въпроса със скоростта на сходимост.
За целта използваме неравенствата от твърдение 2.6.11:

$-\ln(1-x) \le x.\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x) \le x$ при $x \in [0, 1)$. Така за $s \in \mathbb{N}$ имаме:

$$(-\ln(1-\frac{1}{s+2}))\ln(1+\frac{1}{s+2}) \le \frac{1}{s+2}.\frac{1}{1-\frac{1}{s+2}}.\frac{1}{s+2} = \frac{1}{s+2}.\frac{1}{s+1}.$$

Следователно, $\sum_{s=t+1}^{\infty}(-\ln(1-\frac{1}{s+2}))\ln(1+\frac{1}{s+2}) \le \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{s+2}.\frac{1}{s+1} =$
$\sum_{s=t+1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right) = \frac{1}{t+2} \le \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1}$ при $t = n$.

Окончателно, константата $\ln K$ е $\mathcal{L}^2$-изчислима.

4.8. Константа, свързана с квадратичните неостатъци.

Следвайки [3, стр. 96], нека $q(p)$ е най-малкият квадратичен неостатък по модул p, където p е нечетно просто. За средната стойност A на q е изпълнено:

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{p\le n} q(p)}{\sum_{p\le n} 1} \text{ (сумите са по прости } p) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\mathrm{p}_s}{2^{s+1}}.$$

Ще покажем, че константата A е $\mathcal{L}^2$-изчислима, като използваме второто представяне. Нека $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ е дефинирана с $f(s, t) = \min(\mathrm{p}_s.(t+1), 2^{s+1})$ за $s, t \in \mathbb{N}$. Тъй като $\lambda s.2^{s+1}$ има ниско елементарна графика (свойство 2.1.5), функцията $\lambda s, z.\min(z, 2^{s+1}) \in \mathcal{L}^2$ от свойство 2.1.4. Като използваме, че $\lambda s.\mathrm{p}_s \in \mathcal{L}^2$ със суперпозиция получаваме, че $f \in \mathcal{L}^2$.

Ще докажем следното неравенство: $\left|\frac{\mathrm{p}_s}{f(s,t)}-\frac{\mathrm{p}_s}{2^{s+1}}\right| \le \frac{1}{t+1}$ за всички естествени s, t.

Да фиксираме s, t. Ако $f(s, t) = 2^{s+1}$ неравенството очевидно е изпълнено. В противен случай, $f(s, t) = \mathrm{p}_s.(t+1)$ и $\mathrm{p}_s.(t+1) \le 2^{s+1}$. При това положение, $\left|\frac{\mathrm{p}_s}{f(s,t)}-\frac{\mathrm{p}_s}{2^{s+1}}\right| =$
$\left|\frac{\mathrm{p}_s}{\mathrm{p}_s.(t+1)}-\frac{\mathrm{p}_s}{2^{s+1}}\right| = \frac{\mathrm{p}_s}{\mathrm{p}_s.(t+1)}-\frac{\mathrm{p}_s}{2^{s+1}} = \frac{1}{t+1}-\frac{\mathrm{p}_s}{2^{s+1}} \le \frac{1}{t+1}$ и неравенството отново е в сила.

От доказаното неравенство и от факта, че функцията $\lambda s, t.\frac{\mathrm{p}_s}{f(t,s)}$ е $\mathcal{L}^2$-изразима получаваме, че общия член на реда е $\mathcal{L}^2$-изчислима функция.

Остава да разгледаме въпроса със скоростта на сходимост. За целта използваме неравенство 2.6.10: $\mathrm{p}_s < (s+1)^2$, което е изпълнено за $s > g$, където g е фиксирано естествено число. Тогава при $t \ge g$, $\sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{\mathrm{p}_s}{2^{s+1}} \le \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{(s+1)^2}{2^{s+1}}$.

Сега използваме, че редицата $\lambda s.\frac{(s+1)^2.s.(s+1)}{2^{s+1}}$ е сходяща (при $s \to \infty$). Това следва от факта, че степенната функция расте по-бавно от експоненциалната функция.

Следователно, редицата е ограничена, така че за някое ненулево естествено число C,
$\frac{(s+1)^2}{2^{s+1}} \le \frac{C}{s.(s+1)}$ за всяко естествено $s \ge t+1$.

Следователно, при $t \ge g$, $\sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{\mathrm{p}_s}{2^{s+1}} \le \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{C}{s.(s+1)} = C.\sum_{s=t+1}^{\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right) = \frac{C}{t+1}$.

Така $\sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{\mathrm{p}_s}{2^{s+1}} \leq \frac{1}{n+1}$ при $t = \max(g, (Cn + C) \dot{-} 1)$.

4.9. Дзета-функция на Риман. Константа на Апери.

Функцията на Риман се дефинира така: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ за $x > 1$.

Нашата цел е да покажем, че функцията $f_R : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, дефинирана с $f_R(k) = \zeta(k+2)$ е $\mathcal{L}^2$-изчислима и да изведем някои нейни свойства, които ще бъдат полезни по-нататък.

Имаме $f_R(k) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{k+2}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s+1)^{k+2}}$. Функцията $\lambda s,k.(s+1)^{k+2}$ има ниско елементарна графика (свойство 2.1.5). Следователно, от свойство 2.2.5 получаваме $\mathcal{L}^2$-изчислимост на общия член на реда за f_R (като функция на s и k).
По въпроса със скоростта на сходимост:

$$\sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{1}{(s+1)^{k+2}} \leq \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{1}{(s+1)^2} \leq \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{1}{s(s+1)} = \sum_{s=t+1}^{\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1} \text{ при } t = n.$$

Така f_R е $\mathcal{L}^2$-изчислима функция.
От този факт получаваме, че всички стойности на f_R са $\mathcal{L}^2$-изчислими реални числа.
В частност, константата на Апери $\zeta(3) = f_R(1)$ е $\mathcal{L}$-изчислима.

Свойство 4.9.1.: $f_R(k+1) < f_R(k)$ за всяко естествено k.

Доказателство. Имаме $f_R(k) - f_R(k+1) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s+1)^{k+2}} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s+1)^{k+3}} =$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(s+1)^{k+2}} - \frac{1}{(s+1)^{k+3}}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s+1)^{k+2}}\left(1 - \frac{1}{s+1}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s}{(s+1)^{k+3}} > 0.$$

Свойство 4.9.2.: $1 < f_R(k) < 2$ за всяко естествено k.

Доказателство. Имаме $f_R(k) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{k+2}} = 1 + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s^{k+2}} > 1$. Известен факт е, че $f_R(0) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2}{6} < 2$. От свойство 4.9.1 f_R е монотонно намаляваща, така че $f_R(k) < 2$ за всяко естествено k.

Свойство 4.9.3.: $f_R(k) \leq 1 + \frac{1}{2^{k+2}} \frac{k+3}{k+1}$ за всяко естествено k.

Доказателство. Ще приложим твърдение 2.6.2. Имаме

$$f_R(k) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{k+2}} = 1 + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s^{k+2}} \leq 1 + \frac{1}{2^{k+2}} + \int_2^{\infty} \frac{ds}{s^{k+2}} = 1 + \frac{1}{2^{k+2}} + \left.\frac{s^{-k-2+1}}{-k-2+1}\right|_2^{\infty} =$$

$$1 + \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{2^{-k-1}}{k+1} = 1 + \frac{1}{2^{k+2}}\left(1 + \frac{2}{k+1}\right) = 1 + \frac{1}{2^{k+2}} \frac{k+3}{k+1}.$$

4.10. Логаритъм от π.

В сила е следното представяне [3, стр. 44]:

$$\ln\pi - \ln 2 = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\zeta(2s)}{2s2^{2s-1}} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\zeta(2(s+1))}{2(s+1)2^{2(s+1)-1}} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{f_R(2s)}{2(s+1)2^{2s+1}}$$

, където ζ и f_R са дефинирани в параграф 4.9. Ще покажем, че $\ln\pi$ е $\mathcal{L}^2$-изчислимо реално число.

Тъй като $\ln 2$ е $\mathcal{L}^2$-изчислимо реално число (параграф 4.1) и сума на $\mathcal{L}^2$-изчислими числа е $\mathcal{L}^2$-изчислимо число, достатъчно е да разгледаме сумата на реда.

В параграф 4.9 показахме, че f_R е $\mathcal{L}^2$-изчислима функция. От това следва, че $\lambda s.f_R(2s)$ също е $\mathcal{L}^2$-изчислима, тъй като тя се получава със суперпозиция на $\lambda s.2s \in \mathcal{L}^2$.

Освен това от свойство 4.9.2 следва, че $\lambda s.f_R(2s)$ е ограничена.

Функцията $\lambda s.\dfrac{1}{2(s+1)}$ е $\mathcal{L}^2$-изразима, следователно $\mathcal{L}^2$-изчислима.

Функцията $\lambda s.2^{2s+1}$ има ниско елементарна графика (свойство 2.1.5). От свойство 2.2.5 заключаваме, че функцията $\lambda s.\dfrac{1}{2^{2s+1}}$ е $\mathcal{L}^2$-изчислима.

Сега от твърдение 2.3.3 общият член на реда е $\mathcal{L}^2$-изчислим.

По въпроса със скоростта на сходимост:

$$\sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{f_R(2s)}{2(s+1)2^{2s+1}} \le \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{2}{2(s+1)2^{2s+1}} \le \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2s+1}} = \frac{1}{2^{2t+3}}.\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3.2^{2t+3}} = \frac{1}{3.2^{2t+1}} \le$$

$$\frac{1}{3.(2t+1)} = \frac{1}{6t+3} \le \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1}$$

при $t = n$. Използвахме свойство 4.9.2 и неравенството 2.6.4 $2^x \ge x$ за естествено число x.

Окончателно, $\ln\pi$ е $\mathcal{L}^2$-изчислимо реално число.

4.11. Константа на Нивън.

Константата на Нивън C има следното представяне [3, стр. 112]:

$$C = 1+\sum_{s=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\zeta(s)}\right) = 1+\sum_{s=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{f_R(s)}\right)$$

, където ζ и f_R са дефинирани в параграф 4.9.

Ще покажем, че C е $\mathcal{L}^2$-изчислима. Достатъчно е да разгледаме сумата на реда.

От свойство 4.9.2 имаме, че $1 \le f_R(s) \le 2$ за всяко естествено s. Следователно, $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{f_R(s)} \le 1$ за всяко естествено s. Тъй като в параграф 4.9 видяхме, че f_R е $\mathcal{L}^2$-изчислима, от твърдение 2.3.4 получаваме, че $\lambda s.\dfrac{1}{f_R(s)}$ е $\mathcal{L}^2$-изчислима функция.

Сега от твърдения 2.3.1 и 2.3.2 следва $\mathcal{L}^2$-изчислимост на общия член на реда.

По-нататък да разгледаме въпроса със сходимостта: $\displaystyle\sum_{s=t+1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{f_R(s)}\right) = \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{f_R(s)-1}{f_R(s)} \le$

$$\sum_{s=t+1}^{\infty}\left(f_R(s)-1\right) \le \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{2^{s+2}}\frac{s+3}{s+1} \le \sum_{s=t+1}^{\infty}\frac{1}{2^{s+1}} = \frac{1}{2^{t+2}}.\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{t+1}} \le \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1}$$

при $t = n$.

Използвахме свойства 4.9.2 и 4.9.3, неравенството $\frac{s+3}{s+1} \leq 2$ при $s \geq 1$ и неравенството 2.6.4 $2^x \geq x$ за всяко $x \in \mathbb{N}$.

Окончателно, константата на Нивен C е $\mathcal{L}^2$-изчислима.

4.12. Една константа от теория на числата.

Следвайки [3, стр. 112-113], нека m е положително цяло число с разлагане $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ на прости числа. Предполагаме, че в разлагането простите числа $p_1, \ldots, p_k$ са две по две различни и показателите $a_1, \ldots, a_k$ са ненулеви.

Дефинираме $H(m) = \begin{cases} 1 & \text{ако } m = 1 \\ \max(a_1, \ldots, a_k) & \text{ако } m > 1 \end{cases}$. Изпълнено е:

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{H(m)} = \sum\limits_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s(s-1)\zeta(s)} = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s+2)(s+1)f_R(s)}$, където ζ и f_R са дефинирани в параграф 4.9. Ще покажем $\mathcal{L}^2$-изчислимост на сумата на реда. В параграф 4.11 видяхме, че функцията $\lambda s. \frac{1}{f_R(s)}$ е $\mathcal{L}^2$-изчислима. Функцията $\lambda s. \frac{1}{(s+2)(s+1)}$ е $\mathcal{L}^2$-изразима, следователно $\mathcal{L}^2$-изчислима. От твърдение 2.3.3, общият член на реда е $\mathcal{L}^2$-изчислим. По въпроса със скоростта на сходимост: $\sum\limits_{s=t+1}^{\infty} \frac{1}{(s+2)(s+1)f_R(s)} \leq$

$\sum\limits_{s=t+1}^{\infty} \frac{1}{(s+2)(s+1)} = \sum\limits_{s=t+1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right) = \frac{1}{t+2} \leq \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1}$ при $t = n$.

Използвахме свойство 4.9.2. Така въпросната граница е $\mathcal{L}^2$-изчислимо реално число.

4.13. Втора константа от теория на числата.

Константата, която ще разгледаме има представянето [3, стр. 113]:

$\sum\limits_{s=0}^{\infty} (\zeta(\mathrm{p}_s) - 1) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} (f_R(\mathrm{p}_s - 2) - 1) = 0.8928945714\ldots$. Тук ζ и f_R са дефинирани в параграф 4.9 и p_s е $(s+1)$-то просто число. Ще покажем, че тази константа е $\mathcal{L}^2$-изчислима. От параграф 4.9 знаем, че f_R е $\mathcal{L}^2$-изчислима, освен това $\lambda s.\mathrm{p}_s - 2 = \lambda s.(\mathrm{p}_s \dot{-} 2) \in \mathcal{L}^2$. Следователно, $\lambda s. f_R(\mathrm{p}_s - 2)$ е $\mathcal{L}^2$-изчислима, тъй като се получава със суперпозиция. Освен това, константата 1 е $\mathcal{L}^2$-изчислима и разлика на $\mathcal{L}^2$-изчислими функции е $\mathcal{L}^2$-изчислима функция. Следователно, общият член на реда е $\mathcal{L}^2$-изчислима функция. По въпроса със скоростта на сходимост:

$\sum\limits_{s=t+1}^{\infty} (f_R(\mathrm{p}_s - 2) - 1) \leq \sum\limits_{s=t+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\mathrm{p}_s - 2 + 2}} \frac{\mathrm{p}_s - 2 + 3}{\mathrm{p}_s - 2 + 1} = \sum\limits_{s=t+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\mathrm{p}_s}} \frac{\mathrm{p}_s + 1}{\mathrm{p}_s - 1} \leq \sum\limits_{s=t+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\mathrm{p}_s - 1}} \leq \sum\limits_{s=t+1}^{\infty} \frac{1}{2^s} =$

$\frac{1}{2^{t+1}} . \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^t} \leq \frac{1}{n+1}$ при $t = n+1$. Използвахме свойство 4.9.3, неравенството $\frac{\mathrm{p}_s + 1}{\mathrm{p}_s - 1} \leq 2$ при естествено $s \geq 1$ (за $s \geq 1$ имаме $\mathrm{p}_s \geq 3$), неравенството 2.6.9 $\mathrm{p}_k \geq k+1$ за $k \in \mathbb{N}$ и неравенството 2.6.4 $2^x \geq x$ за $x \in \mathbb{N}$.

Окончателно, разглежданата константа е $\mathcal{L}^2$-изчислима.

Глава 5

$\mathcal{M}^2$-изчислимост на известни константи.

В тази глава ще приложим метода от параграф 2.5 за да докажем $\mathcal{M}^2$-изчислимост на някои константи.

5.1. Числото *e*.

Всъщност, $\mathcal{M}^2$-изчислимостта на *e* е доказана в [9], но там се изполва метод, който съществено се отличава от основния метод от параграф 2.5.

Използваме представянето $e = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}$. Като се използва свойство 2.1.7 лесно се вижда, че графиката на функцията $\lambda s.s!$ е Δ_0-определима. От този факт и свойство 2.2.5 получаваме, че общия член на реда $\lambda s.\frac{1}{s!}$ е $\mathcal{M}^2$-изчислима функция.

Относно скоростта на сходимост: $\sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{s!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots =$

$\frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2).(n+3)} + \ldots) \le \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots) = \frac{2}{(n+1)!} \le \frac{2}{2^n}$ за всяко естествено n. Тук използвахме неравенството 2.6.7 $2^n \le (n+1)!$ за $n \in \mathbb{N}$.

Следователно, $$\sum_{s=[\log_2(t+1)]+1}^{\infty} \frac{1}{s!} \le \frac{2}{2^{[\log_2(t+1)]}} = \frac{4}{2^{[\log_2(t+1)]+1}} \le \frac{4}{2^{\log_2(t+1)}} = \frac{4}{t+1} = \frac{1}{n+1}$$

при $t = 4n+3$, $n \in \mathbb{N}$. Така получаваме $\mathcal{M}^2$-изчислимост на *e*.

5.2. Число *L* на Лиувил.

Ще докажем $\mathcal{M}^2$-изчислимост на L, въпреки че това е направено в [9] по друг метод.

Използваме представянето $L = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{10^{s!}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{10^{(s+1)!}}$. Графиката на функцията $\lambda s.10^{(s+1)!}$ е Δ_0-определима: $y = 10^{(s+1)!} \leftrightarrow \exists k \le y\ (y = 10^k \wedge k = (s+1)!)$. Тук използвахме свойство 2.1.7, от което следва, че релациите $y = 10^k$ и $k = (s+1)!$ са Δ_0-определими. Също така, ограничихме квантора с помощта на неравенството 2.6.4 при $a = 10$.

Сега от свойство 2.2.5 получаваме, че общия член на реда $\lambda s.\frac{1}{10^{(s+1)!}}$ е $\mathcal{M}^2$-изчислима функция. Относно скоростта на сходимост:

$\sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{(s+1)!}} \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{(s+1)!} = \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+4)!} + \ldots =$

$\frac{1}{(n+2)!}(1 + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{(n+3).(n+4)} + \ldots) \le \frac{1}{(n+2)!}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots) = \frac{2}{(n+2)!} \le \frac{2}{2^{n+1}}$ за всяко естествено n. Тук използвахме неравенствата 2.6.4 (при $a = 10$) и 2.6.7.

Следователно, $\sum_{s=[\log_2(t+1)]+1}^{\infty} \frac{1}{10^{(s+1)!}} \le \frac{2}{2^{[\log_2(t+1)]+1}} \le \frac{2}{2^{\log_2(t+1)}} = \frac{2}{t+1} = \frac{1}{n+1}$ при $t = 2n+1$ и $n \in \mathbb{N}$.

Окончателно, L е $\mathcal{M}^2$-изчислимо.

5.3. Константа на Ердьош-Борвейн.

Константата на Ердьош-Борвейн има следното представяне: $E = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{s+1}-1}$.

Графиката на $\lambda s.2^{s+1} - 1$ е Δ_0-определима: $y = 2^{s+1} - 1$ т.с.т.к. $y + 1 = 2^{s+1}$.
Тук използваме, че релацията $z = 2^t$ е Δ_0-определима, както лесно се вижда със свойство 2.1.7. Следователно от свойство 2.2.5 получаваме, че общия член реда

$\lambda s.\frac{1}{2^{s+1}-1}$ е $\mathcal{M}^2$-изчислима функция. Сега да разгледаме въпроса със сходимостта.

Нека $S(n) = \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{s+1}-1}$ за естествено n.

Тогава $S(n) \leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{s+1}-2} = \frac{1}{2}.\sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{s}-1} = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2^{n+1}-1} + S(n)\right)$.

Така $2.S(n) \leq \frac{1}{2^{n+1}-1} + S(n)$ и следователно, $S(n) \leq \frac{1}{2^{n+1}-1}$ за всяко естествено n.

Получихме, че $\sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{s+1}-1} \leq \frac{1}{2^{n+1}-1}$. Следователно, $\sum_{s=[\log_2(t+1)]+1}^{\infty} \frac{1}{2^{s+1}-1} \leq \frac{1}{2^{[\log_2(t+1)]+1}-1} \leq$

$\frac{1}{2^{\log_2(t+1)}-1} \leq \frac{1}{t}$ при $t > 0$. Окончателно, $\sum_{s=[\log_2(t+1)]+1}^{\infty} \frac{1}{2^{s+1}-1} \leq \frac{1}{n+1}$ при $t = n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

Така константата E притежава свойството $\mathcal{M}^2$-изчислимост.

5.4. Числото π.

За числото π използваме представянето [3, стр. 20]:

$\frac{\pi^2}{18} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s+1)^2\binom{2s+2}{s+1}}$. Ако докажем $\mathcal{M}^2$-изчислимост на сумата на реда,

то оттам ще следва $\mathcal{M}^2$-изчислимост на π, тъй като $\mathcal{M}^2$-изчислимите числа образуват поле, което съдържа реалните корени на полиномите с $\mathcal{M}^2$-изчислими коефициенти (виж [6]). За да покажем $\mathcal{M}^2$-изчислимост на общия член на реда използваме [2, стр. 22], където се показва, че релацията $y = \binom{n}{k}$ е Δ_0-определима. Оттук (със заместване)

веднага следва, че графиката на функцията $\lambda s.\binom{2s+2}{s+1}$ е Δ_0-определима.

Следователно от свойство 2.2.5 функцията $\lambda s.\frac{1}{\binom{2s+2}{s+1}}$ е $\mathcal{M}^2$-изчислима.

Също така, функцията $\lambda s.\frac{1}{(s+1)^2}$ е очевидно $\mathcal{M}^2$-изразима, следователно

$\mathcal{M}^2$-изчислима. Така от твърдение 2.3.3, общият член е $\mathcal{M}^2$-изчислим.

Относно сходимостта използваме неравенството 2.6.8 $2^s \leq \binom{2s}{s}$ за $s \in \mathbb{N}$.

Имаме $\sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{1}{(s+1)^2\binom{2s+2}{s+1}} \le \sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2s+2}{s+1}} \le \sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{s+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Следователно, $\sum_{s=[\log_2(t+1)]+1}^{\infty}\frac{1}{(s+1)^2\binom{2s+2}{s+1}} \le \frac{1}{2^{[\log_2(t+1)]+1}} \le \frac{1}{2^{\log_2(t+1)}} = \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1}$ при $t = n$.

5.5. Логаритъм от златното сечение.

В този параграф разглеждаме константата $\ln\varphi$, където $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ е златното сечение.

За целта използваме следното представяне [3, стр. 20]:

$2(\ln\varphi)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2.\binom{2n}{n}} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s+1)^2.\binom{2s+2}{s+1}}$. Както в параграф 5.4, достатъчно е да

покажем $\mathcal{M}^2$-изчислимост на сумата на реда. Общия член на реда е произведение на три $\mathcal{M}^2$-изчислими функции (това го видяхме за $\lambda s.\frac{1}{\binom{2s+2}{s+1}}$ в параграф 5.4, другите

две функции $\lambda s.(-1)^s$ и $\lambda s.\frac{1}{(s+1)^2}$ са дори $\mathcal{M}^2$-изразими), които са ограничени, така че

от твърдение 2.3.3 той сам по себе си е $\mathcal{M}^2$-изчислима функция на s.

По въпроса за сходимостта използваме неравенствата 2.6.1 и 2.6.8:

$\left|\sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s+1)^2.\binom{2s+2}{s+1}}\right| \le \frac{1}{(n+2)^2.\binom{2n+4}{n+2}} \le \frac{1}{\binom{2n+4}{n+2}} \le \frac{1}{2^{n+2}} \le \frac{1}{2^{n+1}}$.

Следователно, $\left|\sum_{s=[\log_2(t+1)]+1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s+1)^2.\binom{2s+2}{s+1}}\right| \le \frac{1}{2^{[\log_2(t+1)]+1}} \le \frac{1}{2^{\log_2(t+1)}} = \frac{1}{t+1} = \frac{1}{n+1}$ при $t = n$.

5.6. Константа на Фелър.

Следвайки [3, стр. 341], да разгледаме следната задача:
Фиксираме естествено $m \ge 1$. Хвърляме m идеални монети, след това хвърляме отново онези от тях, които показват тура след първото хвърляне, след това хвърляме отново онези от тях, които показват тура след второто хвърляне и т.н. Каква е вероятността в последното хвърляне да участва точно една монета? Отговорът е: $\frac{m}{2}\sum_{s=0}^{\infty}2^{-s}(1-2^{-s})^{m-1}$.

Ще покажем $\mathcal{M}^2$-изчислимост на последната константа. Достатъчно е да разгледаме сумата на реда. Графиката на функцията $\lambda s.2^s$ е Δ_0-определима (от свойство 2.1.7), следователно от свойство 2.2.5 получаваме, че $\lambda s.2^{-s}$ е $\mathcal{M}^2$-изчислима. Тъй като разликата запазва $\mathcal{M}^2$-изчислимостта (твърдения 2.3.1 и 2.3.2), $\lambda s.(1-2^{-s})$ също е $\mathcal{M}^2$-изчислима функция. Последната функция е също ограничена, m е фиксирано, така че $\lambda s.(1-2^{-s})^{m-1}$ е $\mathcal{M}^2$-изчислима (твърдение 2.3.3) и ограничена.
Така отново от твърдение 2.3.3, общият член на реда е $\mathcal{M}^2$-изчислима функция на s.

По въпроса със сходимостта: $\sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-s}(1-2^{-s})^{m-1} \leq \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-s} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2^{n+1}}$.

Използвахме, че $(1 - 2^{-s})^{m-1} \leq 1$ за всяко естествено s. Следователно,

$$\sum_{s=[\log_2(t+1)]+1}^{\infty} 2^{-s}(1-2^{-s})^{m-1} \leq \frac{2}{2^{[\log_2(t+1)]+1}} \leq \frac{2}{2^{\log_2(t+1)}} = \frac{2}{t+1} = \frac{1}{n+1} \text{ при } t = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}.$$

5.7. Константа, породена от хартиената редица.

Следвайки [3, стр. 439-440], да си мислим, че сгъваме лист хартия през средата на две равни части, дясната страна върху лявата. Като извършваме този процес последователно няколко пъти, се получава редица от гънки върху листа. Като разгънем листа обратно, тези гънки изглеждат вдлъбнати (1) или изпъкнали (0).
Хартиената редица $\{s_n\}$, $n \geq 1$ се дефинира като последователността от 0 и 1, съответна на редицата от гънки. Вижда се, че $\{s_n\} = 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, \ldots$ и $s_{4n-3} = 1$, $s_{4n-1} = 0$, $s_{2n} = s_n$ при естествено $n \geq 1$. Може да се докаже, че
$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{2^n} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2^s}}(1-\frac{1}{2^{2^{s+2}}})^{-1}$. Ще покажем, че константата σ е $\mathcal{M}^2$-изчислима като използваме второто представяне. Тъй като $\lambda s.2^s$ има Δ_0-определима графика (свойство 2.1.7), $\lambda s.2^{2^s}$ също има Δ_0-определима графика: $y = 2^{2^s}$ т.с.т.к. $\exists z \leq y\ (z = 2^s \wedge y = 2^z)$.
Тук ограничихме квантора с помощта на неравенството 2.6.4 при $a = 2$.
От свойство 2.2.5 получаваме, че $\lambda s.\frac{1}{2^{2^s}}$ е $\mathcal{M}^2$-изчислима функция. По-нататък, със суперпозиция на $\lambda s.s+2 \in \mathcal{M}^2$ получаваме, че $\lambda s.\frac{1}{2^{2^{s+2}}}$ също е $\mathcal{M}^2$-изчислима функция.

Следователно, $\lambda s.(1 - \frac{1}{2^{2^{s+2}}})$ е $\mathcal{M}^2$-изчислима. Също така, $1 - \frac{1}{2^{2^{0+2}}} \leq 1 - \frac{1}{2^{2^{s+2}}} \leq 1$,

така че $\frac{15}{16} \leq 1 - \frac{1}{2^{2^{s+2}}} \leq 1$ за всички естествени s. Оттук получаваме, че

$1 \leq (1-\frac{1}{2^{2^{s+2}}})^{-1} \leq \frac{16}{15}$ за всички естествени s. Сега от твърдение 2.3.4 заключаваме, че

$\lambda s.(1-\frac{1}{2^{2^{s+2}}})^{-1}$ е $\mathcal{M}^2$-изчислима функция. По този начин, от твърдение 2.3.3 общия член на реда е $\mathcal{M}^2$-изчислима функция. По въпроса със сходимостта:

$$\sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^s}}(1-\frac{1}{2^{2^{s+2}}})^{-1} = \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^s}} \cdot \frac{2^{2^{s+2}}}{2^{2^{s+2}}-1} = \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^s}} \cdot \frac{2^{4.2^s}}{2^{2^{s+2}}-1} = \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{2^{3.2^s}}{2^{4.2^s}-1} = \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{8^{2^s}}{16^{2^s}-1}.$$

Сега от неравенството 2.6.6 получаваме:

$$\sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^s}}(1-\frac{1}{2^{2^{s+2}}})^{-1} = \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{8^{2^s}}{16^{2^s}-1} \leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{8^{2^s}}{8^{2^s+s-1}} =$$

$$\sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{8^{s-1}} = \frac{1}{8^n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7.8^n} = \frac{64}{7.8^{n+1}} \leq \frac{10}{8^{n+1}}.$$ Следователно,

$$\sum_{s=[\log_2(t+1)]+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^s}}(1-\frac{1}{2^{2^{s+2}}})^{-1} \leq \frac{10}{8^{[\log_2(t+1)]+1}} \leq \frac{10}{8^{\log_2(t+1)}} = \frac{10}{(t+1)^3} \leq \frac{10}{t+1} = \frac{1}{n+1} \text{ при } t = 10n+9.$$

Окончателно, σ е $\mathcal{M}^2$-изчислима.

Литература.

[1] Berarducci, A., D'Aquino, P., Δ_0 complexity of the relation $y = \Pi_{i \leq n} F(i)$. Annals of Pure and Applied Logic, том 75, номер 1-2, страници 49-56, 1995.

[2] D'Aquino, P., Local behaviour of the Chebyshev theorem in models of $I\Delta_0$. Journal of Symbolic Logic, том 57, номер 1, страници 12-27, 1992.

[3] Finch, St. R., Mathematical Constants, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2003.

[4] Paris, J., Wilkie, A., Woods, A., Provability of the pigeonhole principle and the existence of infinitely many primes. Journal of Symbolic Logic, том 53, номер 4, страници 1235-1244, 1988.

[5] Skolem, Th., Proof of some theorems on recursively enumerable sets. The Notre Dame Journal of Formal Logic, том 3, страници 65-74, 1962.

[6] Skordev, D., Computability of real numbers by using a given class of functions in the set of the natural numbers. Math. Log. Quart., том 48, доп. 1, страници 91-106, 2002.

[7] Skordev, D., $\mathcal{E}^2$-computability of e, π and other famous constants. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, том 202, страници 37-47, 2008.

[8] Skordev, D., On the subrecursive computability of several famous constants. Journal of Universal Computer Science, том 14, страници 861-875, 2008.

[9] Weiermann, A., Skordev, D., e, π, L are $\mathcal{M}^2$-computable and γ is $\mathcal{L}^2$-computable (ръкопис)

[10] Хинчин, А. Я., Верижни дроби. Държавно издателство "Техника", София, 1965.