ЛОГИКИ ЗА СТАБИЛНИ И НЕСТАБИЛНИ МЕРЕОЛОГИЧНИ РЕЛАЦИИ

ВЛАДИСЛАВ НЕНЧЕВ

Абстракт. В този документ ще бъдат представени логики основани на стабилни и нестабилни мереологични релации.

Понятията за стабилни и нестабилни релации ще бъдат стандартно дефинирани, като се проследят измененията на основните релации в множество от релационни структури. По този начин може да се каже че стабилните и нестабилните релации са, в известен смисъл, динамични варианти на основните. Този похват ще бъде приложен към три от базовите релации в мереологията - част-от (part-of), припокриване (overlap) и нейната дуална релация (underlap). Освен това стабилните и нестабилни релации ще бъдат абстрактно характеризирани чрез набор от условия (аксиоми). Ще бъде доказана теорема за представяне на абстрактно дефинираните релации по стандартния начин, която следва принципа на теоремата на Стоун за представяне на булеви алгебри и дистрибутивни решетки.

Представените логики включват безкванторна предикатна логика и модална логика, чиито семантики са основани на структури със стабилни и нестабилни релации. Ще бъдат показани аксиоматики за тези логики и чрез приложение на теоремата за представяне ще се докаже тяхната пълнота. Освен това ще се докаже че те притежават силното свойство на крайните модели, от което следва разрешимостта им.

1. Въведение. Мереологични релации и структури

Понятията *стабилни релации* и *нестабилни релации* ще бъдат дефинирани за три от основните мереологични релации - part-of, overlap и underlap, които ще означаваме съответно с $\leq$, O и U. Преди да пристъпим към дефинирането им и теоремите за тяхното представяне ще изброим някои факти за мереологичните релации, които ще бъдат от помощ за разсъжденията за стабилните и нестабилните им варианти. За верността на тези факти и твърдения ще се позовем на [1], където те са описани по-подробно.

Релациите $\leq$, O и U образуват една от основните мереологични системи на Лешневски. Тарски, както е описано в [2], показва че тя може еквивалентно да бъде определена чрез булеви алгебри. Така под *мереологична структура* ще разбираме понятието описано със следната

Дефиниция 1. *Нека* $\underline{B} = (B, 0, 1, ., +, *)$ *е неизродена булева алгебра (като '.' и '+' са двуместните операции, а '*' е допълнението). Нека* $W \subseteq B$ *така че* $W \neq \emptyset$*. Тогава структурата* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *ще наричаме* мереологична *ако за* $\forall x, y \in W$ *е изпълнено:*

$$x \leq y \iff x.y* = 0,\ x \mathsf{O} y \iff x.y \neq 0,\ x \mathsf{U} y \iff x + y \neq 1$$

Друг начин да определим мереологичните структури е чрез условията на които отговарят релациите. Чрез директна проверка се вижда че във всички мереологични структури за всеки x, y и z от носителя на структурата са

Date: 19 Май 2009.

Key words and phrases. мереологя, стабилни и нестабилни релации, безкванторна предикатна логика, модална логика.

изпълнени:

(M1) $x \le x$

(M2) $x \le y$ и $y \le z \Longrightarrow x \le z$

(M3) $x \le y$ и $y \le x \Longrightarrow x = y$

(M4) $x \mathsf{O} y \Longrightarrow y \mathsf{O} x$

(M5) $x \mathsf{O} y \Longrightarrow x \mathsf{O} x$

(M6) $x \mathsf{O} y$ и $y \le z \Longrightarrow x \mathsf{O} z$

(M7) $x \mathsf{O} x$ или $x \le y$

(M8) $x \mathsf{U} y \Longrightarrow y \mathsf{U} x$

(M9) $x \mathsf{U} y \Longrightarrow x \mathsf{U} x$

(M10) $x \le y$ и $y \mathsf{U} z \Longrightarrow x \mathsf{U} z$

(M11) $y \mathsf{U} y$ или $x \le y$

(M12) $x \le y$ или $x \mathsf{O} z$ или $y \mathsf{U} z$

(M13) $x \mathsf{O} x$ или $x \mathsf{U} x$

Така се вижда че мереологичните структури са частен случай на структури, които удовлетворяват изброените тринайсет условия.

За обратното съответствие трябва да покажем стандартно представяне на структурите, които отговарят на тези условия, по начина по който са дефинирани мереологичните структури в **Дефиниция 1**. Както в [1] е показано, това се постига чрез конструкция, подобна на конструкцията на Стоун, за представяне на булеви алгебри и дистрибутивни решетки. За целта чрез мереологичните релации ще дадем дефиниция за филтър и идеал, подобна на тази от теория на множествата. От тук нататък под *(прост) филтър* и *(прост) идеал* ще имаме пред вид понятията дефинирани по-долу, а не стандартните теоретико-множествени понятия с това име.

Дефиниция 2. *Нека* $\underline{W} = (W, \le, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *е релационна структура, такава че в нея са вярни условията* (M1) $\div$ (M13)*, и нека* $F \subseteq W$*.*

- *F ще наричаме* нарастващо множество *ако за* $\forall x, y \in W$ *е вярно че:* $x \in F$ *и* $x \le y \Longrightarrow y \in F$*;*
- *F ще наричаме* филтър *ако F е нарастващо множество и за* $\forall x, y \in W$ *е вярно че:* $x \in F$ *и* $y \in F \Longrightarrow x \mathsf{O} y$*;*
- *F ще наричаме* прост филтър *ако F е филтър и за* $\forall x, y \in W$ *е вярно че:* $x \notin F$ *и* $y \notin F \Longrightarrow x \mathsf{U} y$*.*

Нека $I \subseteq W$*. Дуалните понятия за идеал се дефинират както следва:*

- *I ще наричаме* намаляващо множество *ако за* $\forall x, y \in W$ *е вярно че:* $y \in I$ *и* $x \le y \Longrightarrow x \in I$*;*
- *I ще наричаме* идеал *ако I е намаляващо множество и за* $\forall x, y \in W$ *е вярно че:* $x \in I$ *и* $y \in I \Longrightarrow x \mathsf{U} y$*;*
- *I ще наричаме* прост идеал *ако I е идеал и за* $\forall x, y \in W$ *е вярно че:* $x \notin I$ *и* $y \notin I \Longrightarrow x \mathsf{O} y$*.*

Именно чрез простите филтри (а и с помощта на техните дуални понятия - простите идеали) се характеризират мереологичните релации.

Означение. *Множествата от прости филтри и прости идеали над даден носител W ще бележим така:*

$$PF(W) = \{\ F \mid F \subseteq W \text{ и } F \text{ е прост филтър } \}$$

$$PI(W) = \{\ I \mid I \subseteq W \text{ и } I \text{ е прост идеал } \}$$

При работата с филтри и идеали ще използваме още и следните означения:

Означение. *Нека* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *е структура, в която са вярни* (M1) $\div$ (M13), $F \subseteq W$, $I \subseteq W$ *и* $a \in W$. *С* $[a)$, $(a]$, $F + a$ *и* $a + I$ *означаваме съответно:*

$$
\begin{aligned}
&[a) = \{\ x \mid x \in W \text{ и } a \leq x\ \}\\
&(a] = \{\ x \mid x \in W \text{ и } x \leq a\ \}\\
&F + a = F \cup [a)\\
&a + I = I \cup (a]
\end{aligned}
$$

Дефиницията на релациите O и U чрез булеви алгебри показва една полезна зависимост между тях. Т.к. те са дефинирани чрез дуални булеви формули, то можем да установим принцип на дуалност между тези две релации. Този принцип, също така, се запазва и когато ги дефинираме чрез тринайсетте условия. Например за всяко едно от условията (M1) $\div$ (M13), се намира друго условие измежду тях, което е дуално на разгледаното. Дуалното условие се получава като заменим използването на O с U и обратно и обърнем посоката на релацията $\leq$ (т.е. заменим $\leq$ с нейната симетрична релация $\geq$). Евентуално ще е необходимо и преименуване на променливите. Като се има пред вид и дуалността в дефинициите на нарастващи и намаляващи множества и филтри и идеали, то същия принцип на дуалност може да се установи и между тях.

Това позволява когато имаме да доказваме дуални твърдения, да докажем само едното. Доказателството на другото твърдение може да се получи главно отново чрез размяна на релациите O и U и обръщане на посоката на $\leq$.

Ето някои свойства и факти за филтрите и идеалите, които ще бъдат използвани по-нататък. Доказателство на тях няма да бъде представяно, т.к. всички те са изброени вече в [1], но ако то бъде подробно разписано, то много ясно може да се види дуалността на доказателствата на двойките твърдения 1) и 2), 3) и 4), 5) и 6), 7) и 8), 9) и 10).

Твърдение 1.1. *Следните твърдения са верни за всяка структура* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$, *която удовлетворява* (M1) $\div$ (M13).

1) *Обединение и сечение на нарастващи множества е нарастващо множество;*
2) *Обединение и сечение на намаляващи множества е намаляващо множество;*
3) $\emptyset$ *е филтър;*
4) $\emptyset$ *е идеал;*

Нека $a \in W$.

5) $[a)$ *е нарастващо множество, при това е най-малкото нарастващо множество съдържащо* a*;*
6) $(a]$ *е намаляващо множество, при това е най-малкото намаляващо множество съдържащо* a*;*

Нека $a, b \in W$.

7) $a \,\mathsf{O}\, b \Longleftrightarrow [a) \cup [b)$ *е филтър;*
8) $a \,\mathsf{U}\, b \Longleftrightarrow (a] \cup (b]$ *е идеал;*

Нека $a \in W$, $F \subseteq W$ *и* F *е филтър,* $I \subseteq W$ *и* I *е идеал.*

9) $F + a$ *е филтър* $\Longleftrightarrow a \,\mathsf{O}\, a$ *и* $(\forall x \in F)(a \,\mathsf{O}\, x)$*;*
10) $a + I$ *е идеал* $\Longleftrightarrow a \,\mathsf{U}\, a$ *и* $(\forall x \in I)(a \,\mathsf{U}\, x)$.

Като приложим контрапозиция към 7) и 8) от последното твърдение и т.к. $[a) = [a) \cup [a)$ и $(a] = (a] \cup (a]$, можем да формулираме следното

Следствие 1.1.

1) *Ако* $[a)$ *не е филтър то* $a \,\overline{\mathsf{O}}\, a$*;*
2) *Ако* $(a]$ *не е идеал то* $a \,\overline{\mathsf{U}}\, a$*;*

Друго полезно следствие от тези свойства е

Следствие 1.2. *Нека* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *е структура, за която са вярни* (M1) $\div$ (M13)*. Нека* $x, y, z \in W$*. Тогава:*

1) *Ако* $y \mathrel{\mathsf{O}} z$ *и* $[x) \cup [y) \cup [z)$ *не е филтър, то тогава* $x \,\overline{\mathsf{O}}\, y$ *или* $x \,\overline{\mathsf{O}}\, z$*;*
2) *Ако* $y \mathrel{\mathsf{U}} z$ *и* $(x] \cup (y] \cup (z]$ *не е идеал, то тогава* $x \,\overline{\mathsf{U}}\, y$ *или* $x \,\overline{\mathsf{U}}\, z$*.*

Доказателство.
Ще докажем само 1), т.к. 2) е дуално на 1).
Нека $y \mathrel{\mathsf{O}} z$ и $[x) \cup [y) \cup [z)$ не е филтър. Нека допуснем че $x \mathrel{\mathsf{O}} y$ и $x \mathrel{\mathsf{O}} z$.
$y \mathrel{\mathsf{O}} z \xRightarrow{\text{по 7) от } \textbf{Твърдение 1.1}} [y) \cup [z)$ е филтър.
Нека $F = [y) \cup [z)$. Тогава $[x) \cup [y) \cup [z) = F + x$.
Нека $t \in F$. Тогава $t \in [y)$ или $t \in [z)$.
Ако $t \in [y) \Longrightarrow y \leq t$. $x \mathrel{\mathsf{O}} y$ и $y \leq t \xRightarrow{\text{по (M6)}} x \mathrel{\mathsf{O}} t$.
Аналогично ако $t \in [y)$ то $x \mathrel{\mathsf{O}} t$. Така получаваме че $x \mathrel{\mathsf{O}} t$ за $\forall t \in F$.
$x \mathrel{\mathsf{O}} y \xRightarrow{\text{по (M5)}} x \mathrel{\mathsf{O}} x$.
Така имаме че $x \mathrel{\mathsf{O}} x$ и $x \mathrel{\mathsf{O}} t$ за $\forall t \in F$. Следователно по 9) от **Твърдение 1.1** излиза че $F + x$ е филтър. Т.е. $[x) \cup [y) \cup [z)$ е филтър, което е противоречие с условието. Следователно допускането е погрешно и тогава $x \,\overline{\mathsf{O}}\, y$ или $x \,\overline{\mathsf{O}}\, z$. □

За да се определят мереологичните релации, се налага да се конструират специфични прости филтри и идеали, по дадени нарочни елементи и подмножества на носителя на структурата. Такива построения се извършват чрез прилагане на следната основна теорема в представянето на мереологични релации:

Теорема 1.1 (Теорема за отделимост на филтри и идеали)**.** *Нека* F' *е филтър, а* I' *е идеал над структурата* $\underline{W}$ *с носител* W*, в която са вярни* (M1) $\div$ (M13)*, като* $F' \cap I' = \emptyset$*.*

Тогава съществуват прост филтър F *и прост идеал* I *над* W*, такива че:*

$$F' \subseteq F,\ I' \subseteq I,\ F \cap I = \emptyset \text{ и } F \cup I = W.$$

Така релациите $\leq$, O и U в някоя структура, отговаряща на тринайсетте условия, се характеризират така:

Твърдение 1.2. *Нека* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *и* $x, y \in W$*. Тогава*

1) $x \leq y \Longleftrightarrow (\forall F \in PF(W))(x \in F \Longrightarrow y \in F)$*;*
2) $x \mathrel{\mathsf{O}} y \Longleftrightarrow (\exists F \in PF(W))(x \in F \text{ и } y \in F)$*;*
3) $x \mathrel{\mathsf{U}} y \Longleftrightarrow (\exists F \in PF(W))(x \notin F \text{ и } y \notin F)$*.*

Означение. *Т.к. така построените в* ***Твърдение 1.2*** *филтри ще са необходими и при следващи разсъждения, то за тях ще въведем следните означения:*

$F(x \mathrel{\mathsf{O}} y)$ *за филтъра построен в 2)*

$F(x \mathrel{\mathsf{U}} y)$ *за филтъра построен в 3)*

Понеже Теоремата за отделимост на филтри и идеали и **Твърдение 1.2** са посочени в [1], те няма да бъдат доказвани в настоящия документ.

2. Стабилни и нестабилни мереологични релации

Термините *стабилна* и *нестабилна* приложени към релации могат да се интерпретират като термини за постоянство и непостоянство на релациите. Например ако вземем една двуместна релация можем да считаме че два обекта стабилно са в релацията ако те се намират в тази релация във всички случаи (или през повечето случаи, или през цялото време). Съответно можем да приемем че са нестабилно в релацията ако те са в нея в поне един случай, но това може и да не е изпълнено за всички случаи.

Така естествено изниква идеята да дефинираме стабилни и нестабилни релации като вземем множество структури, в които е определена дадена релация, и стабилният (или нестабилният) вариант на релацията е в сила когато тя е в сила във всички структури (или е в сила в поне една структура).

2.1. **Основни понятия и дефиниции.**

Дефиниция 3. *Нека I е непразно индексно множество. Нека за $\forall i \in I$: $\underline{W_i} = (W_i, \leq_i, \mathsf{O}_i, \mathsf{U}_i)$ е мереологична структура. Нека $W \subseteq \prod_{i\in I} W_i$, като $W \neq \emptyset$. С x_i ще означаваме i-тата координата на вектора $x \in W$.*
Двуместните релации $\leq$, o, u, $\preceq$, O и U над W ще дефинираме по следния начин:

$$
\begin{aligned}
x \leq y &\iff (\forall i \in I)(x_i \leq_i y_i) \qquad \text{за } x, y \in W\\
x \;\mathsf{o}\; y &\iff (\forall i \in I)(x_i \;\mathsf{O}_i\; y_i) \qquad \text{за } x, y \in W\\
x \;\mathsf{u}\; y &\iff (\forall i \in I)(x_i \;\mathsf{U}_i\; y_i) \qquad \text{за } x, y \in W
\end{aligned}
$$

, които ще наричаме стабилни мереологични релации*, а за*

$$
\begin{aligned}
x \preceq y &\iff (\exists i \in I)(x_i \leq_i y_i) \qquad \text{за } x, y \in W\\
x \;\mathsf{O}\; y &\iff (\exists i \in I)(x_i \;\mathsf{O}_i\; y_i) \qquad \text{за } x, y \in W\\
x \;\mathsf{U}\; y &\iff (\exists i \in I)(x_i \;\mathsf{U}_i\; y_i) \qquad \text{за } x, y \in W
\end{aligned}
$$

ще казваме че са нестабилни мереологични релации*.*
Така получената структура $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ ще наричаме стандартна мереологична структура със стабилни релации*, или за краткост* - стандартна структура*.*

Друг подход за дефинирането на стабилни и нестабилни релации е аксиоматичния. Т.е. да разгледаме W като множество от абстрактни обекти и да определим на какви условия (аксиоми) трябва да отговарят релациите $\leq$, o, u, $\preceq$, O и U за да получим аналогична структура.

Например можем да забележим че т.к. декартовото произведение на булеви алгебри също е булева алгебра, то релациите $\leq$, O и U могат да се дефинират в W чрез операциите на алгебрата, също както релациите $\leq_i$, O_i и U_i се дефинират в W_i за $\forall i \in I$. Така за да определим аксиоматично новата структура ще са ни нужни тринайсетте условия за мереологични структури споменати във въведението. Освен това ще са необходими и още следните седемнайсет условия:

(M14) $\quad x \preceq x$

(M15) $\quad x \leq y$ и $y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z$

(M16) $\quad x \preceq y$ и $y \leq z \Longrightarrow x \preceq z$

(M17) $\quad x \;\mathsf{o}\; y \Longrightarrow y \;\mathsf{o}\; x$

(M18) $\quad x \;\mathsf{o}\; y \Longrightarrow x \;\mathsf{o}\; x$

(M19) $x \mathsf{o}\, y$ и $y \leq z \Longrightarrow x \mathsf{o}\, z$

(M20) $x \mathsf{o}\, y$ и $y \preceq z \Longrightarrow x \mathsf{O}\, z$

(M21) $x \mathsf{o}\, x$ или $x \preceq y$

(M22) $x \mathsf{o}\, z$ или $y \mathsf{U}\, z$ или $x \preceq y$

(M23) $x \mathsf{u}\, y \Longrightarrow y \mathsf{u}\, x$

(M24) $x \mathsf{u}\, y \Longrightarrow x \mathsf{u}\, x$

(M25) $x \leq y$ и $y \mathsf{u}\, z \Longrightarrow x \mathsf{u}\, z$

(M26) $x \preceq y$ и $y \mathsf{u}\, z \Longrightarrow x \mathsf{U}\, z$

(M27) $x \mathsf{O}\, z$ или $y \mathsf{u}\, z$ или $x \preceq y$

(M28) $y \mathsf{u}\, y$ или $x \preceq y$

(M29) $x \mathsf{o}\, x$ или $x \mathsf{U}\, x$

(M30) $x \mathsf{O}\, x$ или $x \mathsf{u}\, x$

Така можем да дадем следната

Дефиниция 4. *Нека* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *е структура, като* $W \neq \emptyset$*, а* $\leq$*,* o*,* u*,* $\preceq$*,* O *и* U *са двуместни релации над* W*.*
Тогава $\underline{W}$ *наричаме* (абстрактна) мереологична структура със стабилни релации *ако тя удовлетворява условията* (M1) $\div$ (M30)*. За краткост ще използваме и името* абстрактна структура.

Така структурите описани в горната дефиниция са по-удобни при изграждането на аксиоматиките на логики, чиято семантика е базирана на тях, т.к. по условията на които трябва да отговарят релациите лесно могат да се открият формули, които ги определят и да служат като аксиоми.

Също както при основните мереологични релации, така и при техните стабилни и нестабилни варианти можем да установим принцип на дуалност - съответно между o и u и между O и U. Дуалността в дефиницията на стандартните структури следва от използването на дуалните оригинални мереологични релации O_i и U_i. Дуалността в дефиницията на абстрактните структури следва отново от факта че условията (M1) $\div$ (M30) са затворени относно дуални преобразувания (т.е. за всяко едно от тях има дуално условие, което също е сред (M1) $\div$ (M30)). Така този принцип за дуалност отново съществено ще спомогне за съкращаване на доказателствата. Например измежду (M1) $\div$ (M30) се виждат следните единайсет двойки дуални условия - (M4) и (M8), (M5) и (M9), (M6) и (M10), (M7) и (M11), (M17) и (M23), (M18) и (M24), (M19) и (M25), (M20) и (M26), (M22) и (M27), (M21) и (M28), (M29) и (M30). Така в някои доказателства когато трябва да се покаже че 30-те условия са изпълнени, това може да се покаже само за 19 от тях, като за всяка дуална двойка доказателството се разписва само за едното условие, а верността на другото следва от принципа за дуалност.

Някои полезни твърдения за абстрактните структури, следствия от условията (M1) $\div$ (M30), са изброени в следното

Твърдение 2.1. *Нека* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *е абстрактна структура. Тогава за* $\forall x, y \in W$ *е вярно че:*

(M$\leq$) $\quad x \leq y \Longrightarrow x \preceq y$

(Mo) $\quad x \,\mathsf{o}\, y \Longrightarrow x \,\mathsf{O}\, y$

(Mu) $\quad x \,\mathsf{u}\, y \Longrightarrow x \,\mathsf{U}\, y$

Доказателство.

(M$\leq$)**:** Нека $x \leq y$. По (M14) имаме $y \preceq y$. $x \leq y$ и $y \preceq y \xRightarrow{\text{по (M15)}} x \preceq y$.

(Mo)**:** Нека $x \,\mathsf{o}\, y$. По (M14) имаме $y \preceq y$. $x \,\mathsf{o}\, y$ и $y \preceq y \xRightarrow{\text{по (M20)}} x \,\mathsf{O}\, y$.

(Mu)**:** Доказателството на (Mu) е дуално на това на (Mo).

$\square$

Чрез директна проверка можем да установим, че всяка стандартна структура удовлетворява условията от горната дефиниция. Т.е.

Твърдение 2.2. *Всяка стандартна структура е абстрактна структура.*

Доказателство. Нека $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ е стандартна структура.

Както е споменато по-напред в **Дефиниция 3**, $\underline{W}$ се определя чрез декартовото произведение на мереологични структури, които се определят чрез булеви алгебри. И т.к. декартовото произведение на булеви алгебри също е булева алгебра, то релациите $\leq$, O и U в стандартната структура $\underline{W}$ ще изпълняват същите условия както и оригиналните мереологични релации $\leq_i$, O_i и U_i.

Това осигурява че стандартната структура $\underline{W}$ е и мереологична структура, а следователно за нея са в сила условията (M1) $\div$ (M13). Остава само да докажем че и условията (M14) $\div$ (M30) също са в сила за $\underline{W}$. Доказателството е тривиална проверка според дефинициите и затова ще бъде разписано подробно само за някои от условията - (M14), (M20) и (M27) например. Доказването на останалите е аналогично и ще бъде пропуснато.

Нека $\underline{W_i} = (W_i, \leq_i, \mathsf{O}_i, \mathsf{U}_i)$ за $\forall i \in I$ са мереологичните структури, чрез които е дефинирана $\underline{W}$. Така в следващите части от доказателството ще използваме това че условията (M1) $\div$ (M13) са изпълнени за $\underline{W_i}$ за $\forall i \in I$.

(M14)**:** $I \neq \emptyset \Longrightarrow \exists i \in I$. Нека фиксираме едно такова i.
Т.к. (M1) е в сила за $\underline{W_i}$ имаме че $x_i \leq_i x_i$.
Така $(\exists i \in I)(x_i \leq_i x_i)$ и по дефиниция $x \preceq x$.

(M20)**:** Нека $x \,\mathsf{o}\, y$ и $y \preceq z$.
$x \,\mathsf{o}\, y \xRightarrow{\text{по дефиниция}} (\forall i \in I)(x_i \,\mathsf{O}_i\, y_i)$.
$y \preceq z \xRightarrow{\text{по дефиниция}} (\exists i \in I)(y_i \leq_i z_i)$. Нека фиксираме едно такова i.
За него имаме че $x_i \,\mathsf{O}_i\, y_i$ и $y_i \leq_i z_i$. Тогава по (M6) за $\underline{W_i}$ получаваме че $x_i \,\mathsf{O}_i\, z_i$.
Така $(\exists i \in I)(x_i \,\mathsf{O}_i\, z_i)$ и следователно $x \,\mathsf{O}\, z$.

(M27)**:** Нека $x, y, z \in W$ и нека допуснем че $x \,\overline{\mathsf{O}}\, z$ и $y \,\overline{\mathsf{u}}\, z$ и $x \npreceq y$.
$x \,\overline{\mathsf{O}}\, z \xRightarrow{\text{по дефиниция}} (\forall i \in I)(x_i \,\overline{\mathsf{O}_i}\, z_i)$.
$x \npreceq y \xRightarrow{\text{по дефиниция}} (\forall i \in I)(x_i \nleq_i y_i)$.
$y \,\overline{\mathsf{u}}\, z \xRightarrow{\text{по дефиниция}} (\exists i \in I)(y_i \,\overline{\mathsf{U}_i}\, z_i)$. Нека фиксираме едно такова i.
За него имаме че $x_i \,\overline{\mathsf{O}_i}\, z_i$, $y_i \,\overline{\mathsf{U}_i}\, z_i$ и $x_i \nleq_i y_i$. Но това е в противоречие с (M12) за $\underline{W_i}$. Следователно допускането е погрешно и така $x \,\mathsf{O}\, z$ или $y \,\mathsf{u}\, z$ или $x \preceq y$.

И така т.к. $\underline{W}$ удовлетворява условията (M1) $\div$ (M30), то по **Дефиниция 4** тя е абстрактна структура и с това твърдението е доказано. $\square$

Означение. *За удобство и по-кратък запис ще въведем следните означения за класовете от дефинираните до тук структури:*

$$\Sigma_{std} \text{ - класът на всички стандартни структури;}$$
$$\Sigma_{abst} \text{ - класът на всички абстрактни структури;}$$

2.2. **Филтри и идеали за структури със стабилни и нестабилни релации.**

Понеже условията за определяне на мереологичните структури са част от условията от дефиницията на абстрактните структури, то е ясно че всички стандартни структури и всички абстрактни структури са мереологични. Затова можем и за тях да пренесем без изменения дефинициите и доказаните твърдения за (прости) филтри и (прости) идеали. Отново благодарение на дуалността на тези понятия и установената дуалност между стабилните и нестабилни релации ще може да съкратим и опростим някои дълги и монотонни доказателства.

Съответно това ни дава възможност да докажем и някои твърдения за новите релации които използваме - o, u и $\preceq$ - като се позовем на същите конструкции:

Твърдение 2.3. *Нека* $\underline{W} \in \Sigma_{abst}$, *като* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$. *Тогава*

1) $x \npreceq y \Longrightarrow (\exists F \in PF(W))(x \in F$ *и* $y \notin F)$;
2) $x \,\mathsf{o}\, y \Longrightarrow (\exists F \in PF(W))(x \in F$ *и* $y \in F)$;
3) $x \,\mathsf{u}\, y \Longrightarrow (\exists F \in PF(W))(x \notin F$ *и* $y \notin F)$.

Доказателство.

1) $x \npreceq y \xRightarrow{\text{по } (M\leq)} x \nleq y \xRightarrow{\text{по } \textbf{Твърдение 1.2}} (\exists F \in PF(W))(x \in F \text{ и } y \notin F)$;
2) $x \,\mathsf{o}\, y \xRightarrow{\text{по } (M\mathsf{o})} x \,\mathsf{O}\, y \xRightarrow{\text{по } \textbf{Твърдение 1.2}} (\exists F \in PF(W))(x \in F \text{ и } y \in F)$;
3) $x \,\mathsf{u}\, y \xRightarrow{\text{по } (M\mathsf{u})} x \,\mathsf{U}\, y \xRightarrow{\text{по } \textbf{Твърдение 1.2}} (\exists F \in PF(W))(x \notin F \text{ и } y \notin F)$.

□

Означение. *Така построените в **Твърдение 2.3** филтри ще бележим съответно:*

$F(x \npreceq y)$ *за филтъра разгледан в 1)*
$F(x \,\mathsf{o}\, y)$ *за филтъра разгледан в 2)*
$F(x \,\mathsf{u}\, y)$ *за филтъра разгледан в 3)*

Освен това е вярно и следното твърдение, което ще е от полза по-натагък в този документ:

Твърдение 2.4. *Нека* $\underline{W} \in \Sigma_{abst}$, *като* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *и* $z, v \in W$. *Тогава*

1) *ако* $z \,\mathsf{o}\, v$ *то тогава* $s \,\mathsf{o}\, t$ *за* $\forall s, t \in [z) \cup [v)$;
2) *ако* $z \,\mathsf{u}\, v$ *то тогава* $s \,\mathsf{u}\, t$ *за* $\forall s, t \in (z] \cup (v]$.

Доказателство. Ще докажем само 1), т.к. 2) е дуално на 1) и неговото доказателство може да се получи аналогично.

Нека $z \,\mathsf{o}\, v$ и $s, t \in [z) \cup [v)$. Ще разгледаме четирите възможни случая за принадлежността на z и v:

- $s, t \in [z)$: Тогава $z \leq s$ и $z \leq t$. $z \,\mathsf{o}\, v \xRightarrow{\text{по (M18)}} z \,\mathsf{o}\, z$.
  $z \,\mathsf{o}\, z$ и $z \leq s \xRightarrow{\text{по (M19)}} z \,\mathsf{o}\, s \xRightarrow{\text{по (M17)}} s \,\mathsf{o}\, z$.
  $s \,\mathsf{o}\, z$ и $z \leq t \Longrightarrow s \,\mathsf{o}\, t$.

- $s \in [z), t \in [v)$: Тогава $z \leq s$ и $v \leq t$. $z \circ v \Longrightarrow v \circ z$.
  $v \circ z$ и $z \leq s \Longrightarrow v \circ s \Longrightarrow s \circ v$.
  $s \circ v$ и $v \leq t \Longrightarrow s \circ t$.
- $t \in [z), s \in [v)$: Тогава $z \leq t$ и $v \leq s$.
  $z \circ v$ и $v \leq s \Longrightarrow z \circ s \Longrightarrow s \circ z$.
  $s \circ z$ и $z \leq t \Longrightarrow s \circ t$.
- $s, t \in [v)$: Тогава $v \leq s$ и $v \leq t$. $z \circ v \Longrightarrow v \circ z \Longrightarrow v \circ v$.
  $v \circ v$ и $v \leq s \Longrightarrow v \circ s \Longrightarrow s \circ v$.
  $s \circ v$ и $v \leq t \Longrightarrow s \circ t$.

Така във всички случаи получихме $s \circ t$. □

2.3. **Подструктури на структури със стабилни и нестабилни релации.**

Дефиниция 5. *Нека $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ е стандартна или абстрактна структура. Тогава ще казваме че структурата $\underline{W'} = (W', \leq', \mathsf{o}', \mathsf{u}', \preceq', \mathsf{O}', \mathsf{U}')$ е* подструктура *на $\underline{W}$ ако $W' \subseteq W$ и $W' \neq \emptyset$ и релациите $\leq'$, o', u', $\preceq'$, O' и U' са рестрикции на $\leq$, o, u, $\preceq$, O и U над $W' \times W'$.*

За подструктури можем да докажем следното

Твърдение 2.5.

1) *Всяка подструктура на абстрактна структура също е абстрактна структура;*
2) *Всяка подструктура на стандартна структура също е стандартна структура.*

Доказателство.

1) Нека $\underline{W}$ е абстрактна структура с носител W, а $\underline{W'}$ е нейна подструктура, която има носител W'.
   Т.к. всичките 30 условия, на които отговаря $\underline{W}$, са универсални, т.е. са изпълнени за всички елементи на W, това означава в частност че ще са изпълнени и за всички елементи на W', т.к. $W' \subseteq W$. Така получаваме че подструктурата $\underline{W'}$ също отговаря на тези условия и следователно е абстрактна структура.
2) Нека $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ е стандартна структура, а $\underline{W'} = (W', \leq', \mathsf{o}', \mathsf{u}', \preceq', \mathsf{O}', \mathsf{U}')$ е нейна подструктура. Нека за $\underline{W_i} = (W_i, \leq_i, \mathsf{O}_i, \mathsf{U}_i)$ за $\forall i \in I$ са мереологичните структури чрез които е дефинирана $\underline{W}$.
   Тогава имаме че $W' \subseteq W \subseteq \prod_{i \in I} W_i$. Освен това за $\forall x, y \in W'$

$$x \leq' y \Longleftrightarrow x \leq y \Longleftrightarrow (\forall i \in I)(x_i \leq_i y_i)$$
$$x \ \mathsf{o}' \ y \Longleftrightarrow x \ \mathsf{o} \ y \Longleftrightarrow (\forall i \in I)(x_i \ \mathsf{O}_i \ y_i)$$
$$x \ \mathsf{u}' \ y \Longleftrightarrow x \ \mathsf{u} \ y \Longleftrightarrow (\forall i \in I)(x_i \ \mathsf{U}_i \ y_i)$$
$$x \preceq' y \Longleftrightarrow x \preceq y \Longleftrightarrow (\exists i \in I)(x_i \leq_i y_i)$$
$$x \ \mathsf{O}' \ y \Longleftrightarrow x \ \mathsf{O} \ y \Longleftrightarrow (\exists i \in I)(x_i \ \mathsf{O}_i \ y_i)$$
$$x \ \mathsf{U}' \ y \Longleftrightarrow x \ \mathsf{U} \ y \Longleftrightarrow (\exists i \in I)(x_i \ \mathsf{U}_i \ y_i)$$

   Така се уверяваме че по дефиниция $\underline{W'}$ е стандартна структура.

□

3. Стандартно представяне на абстрактните структури

В този документ ще разглеждаме различни логики, със семантика дефинирана за структурите от класовете Σ_{std} и Σ_{abst}. За всяка от тях ще посочим аксиоматика и ще докажем теорема за пълнота. И докато това ще е по-лесно за абстрактните структури, то за стандартните структури ще трябва да намерим подходяща връзка с по-удобния клас.

За целта ще покажем един начин за представяне на абстрактните структури като стандартни, или по-точно ще покажем едно изоморфно влагане на структурите от Σ_{abst} в структурите от Σ_{std}. Конструкцията, която ще използваме, ще е релативизиран вариант на конструкцията на Стоун за представяне на булеви алгебри.

3.1. **Основни понятия и теорема за представяне.**

Понятията за филтри и идеали са достатъчни за да бъдат определени основните мереологични релации, но не позволяват да се характеризират и релациите o, u и $\preceq$. Затова се налага дефинирането на допълнителни понятия, с чиято помощ да постигнем това.

Дефиниция 6. *Нека* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *е абстрактна структура. Нека* $\mathcal{F} \subseteq PF(W)$*. Ще казваме че* $\mathcal{F}$ *е* стабилна филтърна фамилия *ако* $\mathcal{F} \neq \emptyset$ *и* $\mathcal{F}$ *изпълнява следните три условия за* $\forall x, y \in W$*:*

(1) *ако* $(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow y \in F)$ *то тогава* $x \preceq y$
(2) *ако* $x \mathsf{o} y$ *то тогава* $(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F$ *и* $y \in F)$
(3) *ако* $x \mathsf{u} y$ *то тогава* $(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F$ *и* $y \notin F)$

Означение. *Множеството от стабилни филтърни фамилии за даден носител на абстрактна структура* W *ще бележим така:*

$$SFF(W) = \{\ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \subseteq PF(W) \text{ и } \mathcal{F} \text{ е стабилна филтърна фамилия } \}$$

Така използвайки новото понятие се показва, че за дадена абстрактна структура $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ за $\forall x, y \in W$:

$$
\begin{aligned}
x \leq y &\Longleftrightarrow (\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow y \in F)\\
x \mathsf{o} y &\Longleftrightarrow (\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F \text{ и } y \in F)\\
x \mathsf{u} y &\Longleftrightarrow (\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F \text{ и } y \notin F)\\
x \preceq y &\Longleftrightarrow (\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow y \in F)\\
x \mathsf{O} y &\Longleftrightarrow (\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F \text{ и } y \in F)\\
x \mathsf{U} y &\Longleftrightarrow (\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F \text{ и } y \notin F)
\end{aligned}
$$

А чрез това представяне на релациите се доказва и

Теорема 3.1 (Теорема за представяне на абстрактните структури)**.**
Нека $\underline{W}^A$ *е абстрактна структура. Тогава съществува стандартна структура* $\underline{W}$ *и изображение* h *от носителя на* $\underline{W}^A$ *в носителя на* $\underline{W}$ *такива че* h *е изоморфно влагане на* $\underline{W}^A$ *в* $\underline{W}$*.*

А като се възползваме и от знанията за подструктури на стандартни структури, получаваме следното по-силно

Следствие 3.1. *Нека* $\underline{W}^A$ *е абстрактна структура. Тогава съществува стандартна структура* $\underline{W}$ *и изображение* h *от носителя на* $\underline{W}^A$ *в носителя на* $\underline{W}$*, такива че* h *е изоморфизъм.*

Доказателство.
От **Теорема 3.1** имаме че съществува стандартна структура $\underline{W}'$ и изоморфно влагане h на $\underline{W}^A$ в $\underline{W}'$. Нека $\underline{W}$ е подструктурата на $\underline{W}'$, така определена че за носителя ѝ W е изпълнено че $W = range(h)$. Така h е също и изоморфно влагане на $\underline{W}^A$ в $\underline{W}$.

Знаем че $\underline{W}$ е стандартна структура, а $W = range(h)$ подсигурява че h е обратима, т.е. че h е биекция. Така h е изоморфизъм между абстрактната структура $\underline{W}^A$ и стандартната структура $\underline{W}$. $\square$

Остава само да докажем представянето на релациите чрез стабилни филтърни фамилии и след това и **Теорема 3.1**.

3.2. **Характеризиране на стабилните и нестабилните релации.**
И така първа стъпка ще е да докажем представянето на шестте релации. Т.е. че за всяка абстрактна структура $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ и за $\forall x, y \in W$:

$$\begin{aligned}
x \leq y &\iff (\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow y \in F)\\
x \mathbin{\mathsf{o}} y &\iff (\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F \text{ и } y \in F)\\
x \mathbin{\mathsf{u}} y &\iff (\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F \text{ и } y \notin F)\\
x \preceq y &\iff (\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow y \in F)\\
x \mathbin{\mathsf{O}} y &\iff (\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F \text{ и } y \in F)\\
x \mathbin{\mathsf{U}} y &\iff (\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F \text{ и } y \notin F)
\end{aligned}$$

3.2.1. *Характеризиране на релацията $\leq$.*

Твърдение 3.1 (Представяне на $\leq$)**.**
$x \leq y \iff (\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow y \in F)$

Доказателство.

($\Longrightarrow$) Нека $x \leq y$. Нека $\mathcal{F} \in SFF(W)$, $F \in \mathcal{F}$ и $x \in F$. Тогава от **Твърдение 1.2** имаме че, т.к. $x \leq y$ и $F \in PF(W)$ то $y \in F$. Така получаваме че $(\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow y \in F)$.

($\Longleftarrow$) Нека $(\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow y \in F)$.
Нека допуснем че $x \not\leq y$. Тогава от **Твърдение 1.2** имаме че съществува прост филтър F такъв че $x \in F$ и $y \notin F$. Нека този филтър означим с $F(x \not\leq y)$, а множеството от прости филтри $\mathcal{F}$ образуваме по следния начин:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = \{\ &F(x \not\leq y)\ \} \cup\\
&\{\ F(z \not\preceq v) \mid z, v \in W \text{ и } z \not\preceq v\ \} \cup\\
&\{\ F(z \mathbin{\mathsf{o}} v) \mid z, v \in W \text{ и } z \mathbin{\mathsf{o}} v\ \} \cup\\
&\{\ F(z \mathbin{\mathsf{u}} v) \mid z, v \in W \text{ и } z \mathbin{\mathsf{u}} v\ \}
\end{aligned}$$

Сега ще докажем че $\mathcal{F}$ е стабилна филтърна фамилия.
Т.к. $F(x \not\leq y) \in \mathcal{F}$ следователно $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
Остава да проверим и другите три условия от дефиницията:

(1) Нека $z, v \in W$ са такива че $(\forall F \in \mathcal{F})(z \in F \Longrightarrow v \in F)$.
Нека допуснем че $z \not\preceq v$. Следователно имаме че $z \in F(z \not\preceq v)$ и $v \notin F(z \not\preceq v)$ и $F(z \not\preceq v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \in F \text{ и } v \notin F)$.
Но това е в противоречие с искането $(\forall F \in \mathcal{F})(z \in F \Longrightarrow v \in F)$.
Следователно допускането ни е погрешно и $z \preceq v$.

(2) Нека $z, v \in W$: $z \mathbin{\mathsf{o}} v$. Следователно $z \in F(z \mathbin{\mathsf{o}} v)$ и $v \in F(z \mathbin{\mathsf{o}} v)$ и $F(z \mathbin{\mathsf{o}} v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \in F \text{ и } v \in F)$.

(3) Нека $z, v \in W$: $z \mathbin{\mathsf{u}} v$. Следователно $z \notin F(z \mathbin{\mathsf{u}} v)$ и $v \notin F(z \mathbin{\mathsf{u}} v)$ и $F(z \mathbin{\mathsf{u}} v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \notin F \text{ и } v \notin F)$.

Така видяхме че $\mathcal{F} \in SFF(W)$ и $F(x \not\leq y) \in \mathcal{F}$ като: $x \in F(x \not\leq y)$ и $y \notin F(x \not\leq y)$. Т.е. имаме че $(\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F \text{ и } y \notin F)$, което обаче е противоречие с началното условие че $(\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow y \in F)$. Следователно допускането е погрешно и $x \leq y$.

□

3.2.2. *Характеризиране на релацията* O.

Твърдение 3.2 (Представяне на O)**.**
$x \mathsf{O} y \Longleftrightarrow (\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F$ *и* $y \in F)$

Доказателство.

($\Longrightarrow$) Нека $x \mathsf{O} y$.
Нека тогава множеството от прости филтри $\mathcal{F}$ образуваме по следния начин:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{\ & F(x \mathsf{O} y)\ \} \cup \\ & \{\ F(z \not\preceq v) \mid z, v \in W \text{ и } z \not\preceq v\ \} \cup \\ & \{\ F(z \mathsf{o} v) \mid z, v \in W \text{ и } z \mathsf{o} v\ \} \cup \\ & \{\ F(z \mathsf{u} v) \mid z, v \in W \text{ и } z \mathsf{u} v\ \}\end{aligned}$$

Сега ще докажем че $\mathcal{F}$ е стабилна филтърна фамилия.
Т.к. $F(x \mathsf{O} y) \in \mathcal{F}$ следователно $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
Вярността на останалите три условия от дефиницията се доказва така:

(1) Нека $z, v \in W$ са такива че $(\forall F \in \mathcal{F})(z \in F \Longrightarrow v \in F)$.
Нека допуснем че $z \not\preceq v$. Следователно имаме че $z \in F(z \not\preceq v)$ и $v \notin F(z \not\preceq v)$ и $F(z \not\preceq v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \in F$ и $v \notin F)$.
Но това е в противоречие с искането $(\forall F \in \mathcal{F})(z \in F \Longrightarrow v \in F)$.
Следователно допускането ни е погрешно и $z \preceq v$.

(2) Нека $z, v \in W$: $z \mathsf{o} v$. Следователно $z \in F(z \mathsf{o} v)$ и $v \in F(z \mathsf{o} v)$ и $F(z \mathsf{o} v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \in F$ и $v \in F)$.

(3) Нека $z, v \in W$: $z \mathsf{u} v$. Следователно $z \notin F(z \mathsf{u} v)$ и $v \notin F(z \mathsf{u} v)$ и $F(z \mathsf{u} v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \notin F$ и $v \notin F)$.

Така имаме че $\mathcal{F} \in SFF(W)$ и $F(x \mathsf{O} y) \in \mathcal{F}$ така че: $x \in F(x \mathsf{O} y)$ и $y \in F(x \mathsf{O} y)$. Т.е. $(\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F$ и $y \in F)$.

($\Longleftarrow$) Нека съществува $\mathcal{F} \in SFF(W)$ и има $F \in \mathcal{F}$ такива че: $x \in F$ и $y \in F$.
Тогава т.к. $F \in PF(W)$ то по **Твърдение 1.2** получаваме че $x \mathsf{O} y$.
Така от $(\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F$ и $y \in F)$ следва че $x \mathsf{O} y$.

□

3.2.3. *Характеризиране на релацията* U.

Твърдение 3.3 (Представяне на U)**.**
$x \mathsf{U} y \Longleftrightarrow (\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F$ *и* $y \notin F)$

Доказателство.

($\Longrightarrow$) Нека $x \mathsf{U} y$.
Нека тогава множеството от прости филтри $\mathcal{F}$ образуваме по следния начин:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{\ & F(x \mathsf{U} y)\ \} \cup \\ & \{\ F(z \not\preceq v) \mid z, v \in W \text{ и } z \not\preceq v\ \} \cup \\ & \{\ F(z \mathsf{o} v) \mid z, v \in W \text{ и } z \mathsf{o} v\ \} \cup \\ & \{\ F(z \mathsf{u} v) \mid z, v \in W \text{ и } z \mathsf{u} v\ \}\end{aligned}$$

Сега ще докажем че $\mathcal{F}$ е стабилна филтърна фамилия.
Т.к. $F(x \mathsf{U} y) \in \mathcal{F}$ следователно $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
Вярността на останалите три условия от дефиницията се доказва така:

(1) Нека $z, v \in W$ са такива че $(\forall F \in \mathcal{F})(z \in F \Longrightarrow v \in F)$.
Нека допуснем че $z \not\preceq v$. Следователно имаме че $z \in F(z \not\preceq v)$ и $v \notin F(z \not\preceq v)$ и $F(z \not\preceq v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \in F$ и $v \notin F)$.
Но това е в противоречие с искането $(\forall F \in \mathcal{F})(z \in F \Longrightarrow v \in F)$.
Следователно допускането ни е погрешно и $z \preceq v$.
(2) Нека $z, v \in W$: $z \mathsf{O} v$. Следователно $z \in F(z \mathsf{O} v)$ и $v \in F(z \mathsf{O} v)$ и $F(z \mathsf{O} v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \in F$ и $v \in F)$.
(3) Нека $z, v \in W$: $z \mathsf{u} v$. Следователно $z \notin F(z \mathsf{u} v)$ и $v \notin F(z \mathsf{u} v)$ и $F(z \mathsf{u} v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \notin F$ и $v \notin F)$.

Така имаме че $\mathcal{F} \in SFF(W)$ и $F(x \mathsf{U} y) \in \mathcal{F}$ така че: $x \notin F(x \mathsf{U} y)$ и $y \notin F(x \mathsf{U} y)$. Т.е. $(\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F$ и $y \notin F)$.

($\Longleftarrow$) Нека съществува $\mathcal{F} \in SFF(W)$ и има $F \in \mathcal{F}$ такива че: $x \notin F$ и $y \notin F$. Тогава т.к. $F \in PF(W)$ то по **Твърдение 1.2** получаваме че $x \mathsf{U} y$. Така от $(\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F$ и $y \notin F)$ следва че $x \mathsf{U} y$.

□

3.2.4. *Характеризиране на релацията $\preceq$.*

Твърдение 3.4 (Представяне на $\preceq$).
$x \preceq y \Longleftrightarrow (\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow y \in F)$

Доказателство.

($\Longrightarrow$) Нека $x \preceq y$.
Ще разчитаме че следните предположения са изпълнени:
- ако $z, v \in W$ и $z \mathsf{O} v$, то еднозначно можем да построим прост филтър F над W, такъв че $(x \in F \Longrightarrow y \in F)$ и $z \in F$ и $v \in F$. Този филтър ще бележим с $F(x \preceq y, z \mathsf{O} v)$.
- ако $z, v \in W$ и $z \mathsf{u} v$, то еднозначно можем да построим прост филтър F над W, такъв че $(x \in F \Longrightarrow y \in F)$ и $z \notin F$ и $v \notin F$. Този филтър ще бележим с $F(x \preceq y, z \mathsf{u} v)$.
- ако $z, v \in W$ и $z \not\preceq v$, то еднозначно можем да построим прост филтър F над W, такъв че $(x \in F \Longrightarrow y \in F)$ и $z \in F$ и $v \notin F$. Този филтър ще бележим с $F(x \preceq y, z \not\preceq v)$.

Верността на тези предположения ще бъде доказана съответно с леми **3.1**, **3.2** и **3.3**.

Нека тогава множеството от прости филтри $\mathcal{F}$ образуваме по следния начин:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}' = \{\, & F(x \preceq y, z \not\preceq v) \mid z, v \in W \text{ и } z \not\preceq v \,\} \cup \\ & \{\, F(x \preceq y, z \mathsf{O} v) \mid z, v \in W \text{ и } z \mathsf{O} v \,\} \cup \\ & \{\, F(x \preceq y, z \mathsf{u} v) \mid z, v \in W \text{ и } z \mathsf{u} v \,\}\end{aligned}$$

Ако $\mathcal{F}' \neq \emptyset$ то тогава нека $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.
В противен случай от това че $\mathcal{F}' = \emptyset$ следва че $z \,\bar{\mathsf{O}}\, v$ за $\forall z, v \in W$, а в частност и $x \,\bar{\mathsf{O}}\, x$. Тогава $x \,\bar{\mathsf{O}}\, x \xRightarrow{\text{по (M29)}} x \mathsf{U} x$ и в този случай нека $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cup \{\, F(x \mathsf{U} x) \,\}$.
Първо ще отбележим че и в двата случая $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
Освен това по построение на елементите на $\mathcal{F}$, за него е изпълнено че: $(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow y \in F)$.
Сега ще докажем и останалите условия за стабилна филтърна фамилия:
(1) Нека $z, v \in W$ са такива че $(\forall F \in \mathcal{F})(z \in F \Longrightarrow v \in F)$.
Нека допуснем че $z \not\preceq v$. Следователно имаме че $z \in F(x \preceq y, z \not\preceq v)$ и $v \notin F(x \preceq y, z \not\preceq v)$ и $F(x \preceq y, z \not\preceq v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \in$

F и $v \notin F$).
Но това е в противоречие с искането $(\forall F \in \mathcal{F})(z \in F \Longrightarrow v \in F)$.
Следователно допускането ни е погрешно и $z \preceq v$.

(2) Нека $z, v \in W$: $z \circ v$. Следователно $z \in F(x \preceq y, z \circ v)$ и $v \in F(x \preceq y, z \circ v)$ и $F(x \preceq y, z \circ v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \in F$ и $v \in F)$.

(3) Нека $z, v \in W$: $z \mathsf{u} v$. Следователно $z \notin F(x \preceq y, z \mathsf{u} v)$ и $v \notin F(x \preceq y, z \mathsf{u} v)$ и $F(x \preceq y, z \mathsf{u} v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \notin F$ и $v \notin F)$.

Така получаваме че $(\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow y \in F)$.

($\Longleftarrow$) Нека има $\mathcal{F} \in SFF(W)$ такова че, за $\forall F \in \mathcal{F}$: $x \in F \Longrightarrow y \in F$. Тогава т.к. $\mathcal{F}$ е стабилна филтърна фамилия, то по условие (1) от дефиницията за $\mathcal{F}$ имаме че $x \preceq y$.

$\square$

Лема 3.1 (Филтър за $x \preceq y$ и $z \circ v$)**.** *Нека $x \preceq y$ и $z \circ v$. Тогава съществува прост филтър F над W, такъв че:*

$$(x \in F \Longrightarrow y \in F) \text{ и } z \in F \text{ и } v \in F.$$

Доказателство. Като преработим исканото свойство за търсения прост филтър F ще получим че, за F трябва да е изпълнено

$$(x \notin F \text{ или } y \in F) \text{ и } z \in F \text{ и } v \in F.$$

Това означава че за F трябва да е в сила поне един от следните два случая:

$$\begin{array}{ll} & x \notin F \text{ и } z \in F \text{ и } v \in F \\ \text{или} & y \in F \text{ и } z \in F \text{ и } v \in F \end{array}$$

За да конструираме такъв прост филтър ще използваме Теоремата за отделимост на филтри и идеали. За целта ще подсигурим че поне едно от следните две твърдения е изпълнено:

- има филтър който съдържа z и v и има идеал който съдържа x и сечението им е празно;
- има филтър който съдържа y, z и v. В този случай за идеал ще използваме $\emptyset$ и така естествено сечението им ще е празно.

Така във всеки един от тези два случая, като разширим осигурения филтър до прост филтър F, то той ще притежава исканите свойства.

Наличието на филтър в първия случай се подсигурява от условието че $z \circ v$. Тогава $z \circ v \xRightarrow{\text{по (Mo)}} z \,\mathsf{O}\, v \Longrightarrow [z) \cup [v)$ е филтър. А $[z) \cup [v)$ съдържа z и v т.к. $[z)$ съдържа z, а $[v)$ съдържа v.

Остава да докажем че поне едно от следните две твърдения е изпълнено:

$$\begin{array}{ll} & ([z) \cup [v)) \cap (x] = \emptyset \text{ и } (x] \text{ е идеал} \\ \text{или} & [y) \cup [z) \cup [v) \text{ е филтър} \end{array}$$

Нека да допуснем че и двете не са вярни. Т.е.

$$\begin{array}{ll} & ([z) \cup [v)) \cap (x] \neq \emptyset \text{ или } (x] \text{ не е идеал} \\ \text{и} & [y) \cup [z) \cup [v) \text{ не е филтър} \end{array}$$

Щом $[y) \cup [z) \cup [v)$ не е филтър и понеже $z \,\mathsf{O}\, v$ тогава по **Следствие 1.2** имаме че $y \,\overline{\mathsf{O}}\, z$ или $y \,\overline{\mathsf{O}}\, v$. Така

$$\begin{array}{ll} & ([z) \cup [v)) \cap (x] \neq \emptyset \text{ или } (x] \text{ не е идеал} \\ \text{и} & y \,\overline{\mathsf{O}}\, z \text{ или } y \,\overline{\mathsf{O}}\, v \end{array}$$

Ще разгледаме двата случая на които се разпада първото твърдение:

1) $([z) \cup [v)) \cap (x] \neq \emptyset$.
   Тогава $[z) \cap (x] \neq \emptyset$ или $[v) \cap (x] \neq \emptyset$.
   Ако $[z) \cap (x] \neq \emptyset \Longrightarrow z \leq x$.
   $z \,\mathsf{o}\, v \xRightarrow{\text{по (M17)}} v \,\mathsf{o}\, z$. $v \,\mathsf{o}\, z$ и $z \leq x \xRightarrow{\text{по (M19)}} v \,\mathsf{o}\, x$.
   $z \,\mathsf{o}\, v \xRightarrow{\text{по (M18)}} z \,\mathsf{o}\, z$. $z \,\mathsf{o}\, z$ и $z \leq x \Longrightarrow z \,\mathsf{o}\, x$.
   Ако $[v) \cap (x] \neq \emptyset$ аналогично получаваме че $v \,\mathsf{o}\, x$ и $z \,\mathsf{o}\, x$.
   $v \,\mathsf{o}\, x$ и $x \preceq y \xRightarrow{\text{по (M20)}} v \,\mathsf{O}\, y \xRightarrow{\text{по (M4)}} y \,\mathsf{O}\, v$.
   $z \,\mathsf{o}\, x$ и $x \preceq y \Longrightarrow z \,\mathsf{O}\, y \Longrightarrow y \,\mathsf{O}\, z$.
   Но така имаме че $y \,\mathsf{O}\, v$ и $y \,\mathsf{O}\, z$, което е в противоречие с това че $y \,\overline{\mathsf{O}}\, z$ или $y \,\overline{\mathsf{O}}\, v$.
2) $(x]$ не е идеал. Тогава $x \,\overline{\mathsf{U}}\, x$.
   $x \,\overline{\mathsf{U}}\, x \xRightarrow{\text{по (M9)}} x \,\overline{\mathsf{U}}\, y$.
   $x \,\overline{\mathsf{U}}\, y$ и $x \preceq y \xRightarrow{\text{по (M26)}} y \,\overline{\mathsf{u}}\, y \xRightarrow{\text{по (M28)}} z \preceq y$ и $v \preceq y$.
   $z \,\mathsf{o}\, v$ и $v \preceq y \Longrightarrow z \,\mathsf{O}\, y \Longrightarrow y \,\mathsf{O}\, z$.
   $z \,\mathsf{o}\, v \Longrightarrow v \,\mathsf{o}\, z$. $v \,\mathsf{o}\, z$ и $z \preceq y \Longrightarrow v \,\mathsf{O}\, y \Longrightarrow y \,\mathsf{O}\, v$.
   Но така имаме че $y \,\mathsf{O}\, v$ и $y \,\mathsf{O}\, z$, което е в противоречие с това че $y \,\overline{\mathsf{O}}\, z$ или $y \,\overline{\mathsf{O}}\, v$.

Така във всички случаи получаваме противоречие. Следователно допускането ни е погрешно и така:

$$
\begin{array}{ll}
 & ([z) \cup [v)) \cap (x] = \emptyset \text{ и } (x] \text{ е идеал} \\
\text{или} & [y) \cup [z) \cup [v) \text{ е филтър}
\end{array}
$$

Така простия филтър F ще построим по следния начин:

- ако $([z) \cup [v)) \cap (x] = \emptyset$ и $(x]$ е идеал:
  Имаме че $[z) \cup [v)$ е филтър. Тогава по Теоремата за отделимост имаме че съществуват прост филтър F и прост идеал I такива че:
  $F \cap I = \emptyset$, $[z) \cup [v) \subseteq F$ и $(x] \subseteq I$.
  Така получаваме че: $z, v \in F$ и $x \in I$ т.е. $x \notin F$.
- ако $[y) \cup [z) \cup [v)$ е филтър. $\emptyset$ е идеал. Тогава по Теоремата за отделимост имаме че съществуват прост филтър F и прост идеал I такива че:
  $[y) \cup [z) \cup [v) \subseteq F$.
  Така получаваме че: $y, z, v \in F$.

Така и в двата случая виждаме че за простия филтър F е изпълнено че:

$$(x \notin F \text{ или } y \in F) \text{ и } z \in F \text{ и } v \in F.$$

Т.е.

$$(x \in F \Longrightarrow y \in F) \text{ и } z \in F \text{ и } v \in F.$$

□

Лема 3.2 (Филтър за $x \preceq y$ и $z \,\mathsf{u}\, v$)**.** *Нека $x \preceq y$ и $z \,\mathsf{u}\, v$. Тогава съществува прост филтър F над W, такъв че:*

$$(x \in F \Longrightarrow y \in F) \text{ и } z \notin F \text{ и } v \notin F.$$

Доказателство. Т.к. условията тук са много подобни на условията в предишната **Лема 3.1** (вместо релацията o присъства нейната дуална релация u, също така вместо принадлежност към филтъра, което се асоциира с o, се иска z и v да не принадлежат на F, което е присъщо за u), то и доказателството ще е аналогично. Затова пълното доказателство на текущата лема няма да бъде описвано, като някои части от него ще бъдат пропуснати, т.к. са дуални на разсъждения от **Лема 3.1**.

Исканото свойство за търсения прост филтър F е еквивалентно на

$$(x \notin F \text{ или } y \in F) \text{ и } z \notin F \text{ и } v \notin F.$$

Това означава че за F трябва да е в сила поне един от следните два случая:

$$\begin{array}{rl} & x \notin F \text{ и } z \notin F \text{ и } v \notin F \\ \text{или} & y \in F \text{ и } z \notin F \text{ и } v \notin F \end{array}$$

За да използваме Теоремата за отделимост на филтри и идеали ще искаме поне едно от следните две твърдения да е изпълнено:

- има идеал който съдържа x, z и v. В този случай за филтър ще използваме $\emptyset$ и така естествено сечението им ще е празно;
- има идеал който съдържа z и v и има филтър който съдържа y и сечението им е празно.

Така във всеки един от тези два случая, като разширим осигурения филтър до прост филтър F, то той ще притежава исканите свойства.

Наличието на идеал в първия случай се подсигурява от условието че $z \mathsf{u} v$. Тогава $z \mathsf{u} v \overset{\text{по (M}\mathsf{u}\text{)}}{\Longrightarrow} z \mathsf{U} v \Longrightarrow (z] \cup (v]$ е идеал. А $(z] \cup (v]$ съдържа z и v.

Остава да докажем че поне едно от следните две твърдения е изпълнено:

$$\begin{array}{rl} & (x] \cup (z] \cup (v] \text{ е идеал} \\ \text{или} & [y) \cap ((z] \cup (v]) = \emptyset \text{ и } [y) \text{ е филтър} \end{array}$$

Ако допуснем че и двете не са вярни, аналогично на **Лема 3.1**, неизменно ще достигнем до противоречие с условието - $x \not\leq y$ или $z \bar{\mathsf{u}} v$.
(Аналогичността на доказателството се изразява в това че можем да използваме същото доказателство както в **Лема 3.1**, като само трябва да разменим използванията на релациите o и u, да заменим употребата на аксиомните условия измежду (M1) $\div$ (M30) за тези релации с техните дуални версии и да заменим използването на филтри и нарастващи множества с идеали и намаляващи множества и обратно. Така ще получим валидно доказателство на искания тук резултат.)

Така простия филтър F ще построим по следния начин:

- ако $(x] \cup (z] \cup (v]$ е идеал. $\emptyset$ е филтър. Тогава по Теоремата за отделимост имаме че съществуват прост филтър F и прост идеал I такива че:
  $F \cap I = \emptyset$ и $(x] \cup (z] \cup (v] \subseteq I$.
  Така получаваме че: $x, z, v \in I$ т.е. $x, z, v \notin F$.
- ако $[y) \cap ((z] \cup (v]) = \emptyset$ и $[y)$ е филтър:
  Знаем че $(z] \cup (v]$ е идеал. Тогава по Теоремата за отделимост имаме че съществуват прост филтър F и прост идеал I такива че:
  $F \cap I = \emptyset$, $[y) \subseteq F$ и $(z] \cup (v] \subseteq I$.
  Така получаваме че: $y \in F$ и $z, v \in I$ т.е. $z, v \notin F$.

Така и в двата случая виждаме че за простия филтър F е изпълнено че:

$$(x \notin F \text{ или } y \in F) \text{ и } z \notin F \text{ и } v \notin F.$$

Т.е.

$$(x \in F \Longrightarrow y \in F) \text{ и } z \notin F \text{ и } v \notin F.$$

$\square$

Лема 3.3 (Филтър за $x \preceq y$ и $z \not\preceq v$)**.** *Нека $x \preceq y$ и $z \not\preceq v$. Тогава съществува прост филтър F над W, такъв че:*

$$(x \in F \Longrightarrow y \in F) \text{ и } z \in F \text{ и } v \notin F.$$

Доказателство. Исканото свойство за търсения прост филтър F е еквивалентно на

$$(x \notin F \text{ или } y \in F) \text{ и } z \in F \text{ и } v \notin F.$$

Това означава че за F трябва да е в сила поне един от следните два случая:

$$\begin{array}{ll} & x \notin F \text{ и } z \in F \text{ и } v \notin F \\ \text{или} & y \in F \text{ и } z \in F \text{ и } v \notin F \end{array}$$

За да използваме Теоремата за отделимост на филтри и идеали ще искаме поне едно от следните две твърдения да е изпълнено:

- има идеал който съдържа x и v и има филтър който съдържа z и сечението им е празно;
- има идеал който съдържа v и има филтър който съдържа y и z и сечението им е празно.

Наличието на филтър в първия случай се подсигурява така:
$z \not\preceq v \xRightarrow{\text{по (M21)}} z \mathsf{o}\, z \xRightarrow{\text{по (Mo)}} z \mathsf{O}\, z \Longrightarrow [z)$ е филтър.
Наличието на идеал във втория случай се подсигурява така:
$z \not\preceq v \xRightarrow{\text{по (M28)}} v \mathsf{u}\, v \xRightarrow{\text{по (Mu)}} v \mathsf{U}\, v \Longrightarrow (v]$ е идеал.

Тогава остава да се покаже че поне едно от следните две твърдения е изпълнено:

$$\begin{array}{ll} & [z) \cap ((x] \cup (v]) = \emptyset \text{ и } (x] \cup (v] \text{ е идеал} \\ \text{или} & ([y) \cup [z)) \cap (v] = \emptyset \text{ и } [y) \cup [z) \text{ е филтър} \end{array}$$

Нека да допуснем че и двете не са вярни. Т.е.

$$\begin{array}{ll} & [z) \cap ((x] \cup (v]) \neq \emptyset \text{ или } (x] \cup (v] \text{ не е идеал} \\ \text{и} & ([y) \cup [z)) \cap (v] \neq \emptyset \text{ или } [y) \cup [z) \text{ не е филтър} \end{array}$$

След еквивалентно преобразувание получаваме

$$\begin{array}{ll} & [z) \cap (x] \neq \emptyset \text{ или } [z) \cap (v] \neq \emptyset \text{ или } (x] \cup (v] \text{ не е идеал} \\ \text{и} & [y) \cap (v] \neq \emptyset \text{ или } [z) \cap (v] \neq \emptyset \text{ или } [y) \cup [z) \text{ не е филтър} \end{array}$$

Нека отбележим че ако $[z) \cap (v] \neq \emptyset$, то тогава ще получим че $z \leq v$, а следователно и $z \preceq v$.
И т.к. по условие имаме че $z \not\preceq v$, тогава $[z) \cap (v] = \emptyset$ и така допускането се свежда до

$$\begin{array}{ll} & [z) \cap (x] \neq \emptyset \text{ или } (x] \cup (v] \text{ не е идеал} \\ \text{и} & [y) \cap (v] \neq \emptyset \text{ или } [y) \cup [z) \text{ не е филтър} \end{array}$$

1) $[z) \cap (x] \neq \emptyset$ и $[y) \cap (v] \neq \emptyset$.
   $[z) \cap (x] \neq \emptyset \Longrightarrow z \leq x$.
   $[y) \cap (v] \neq \emptyset \Longrightarrow y \leq v$.
   $z \leq x$ и $x \preceq y \xRightarrow{\text{по (M15)}} z \preceq y$. $z \preceq y$ и $y \leq v \xRightarrow{\text{по (M16)}} z \preceq v$.
2) $[z) \cap (x] \neq \emptyset$ и $[y) \cup [z)$ не е филтър.
   $[z) \cap (x] \neq \emptyset \Longrightarrow z \leq x$.
   $z \leq x$ и $x \preceq y \Longrightarrow z \preceq y$.
   $[y) \cup [z)$ не е филтър $\Longrightarrow y\, \overline{\mathsf{O}}\, z \xRightarrow{\text{по (M4)}} z\, \overline{\mathsf{O}}\, y$.

$z \,\overline{\mathsf{O}}\, y$ и $z \preceq y \xRightarrow{\text{по (M20)}} z \,\overline{\mathsf{o}}\, z$.
$z \,\overline{\mathsf{o}}\, z \xRightarrow{\text{по (M21)}} z \preceq v$.

3) $(x] \cup (v]$ не е идеал и $[y) \cap (v] \neq \emptyset$.
$(x] \cup (v]$ не е идеал $\Longrightarrow x \,\overline{\mathsf{U}}\, v$.
$[y) \cap (v] \neq \emptyset \Longrightarrow y \leq v$.
$x \preceq y$ и $y \leq v \Longrightarrow x \preceq v$.
$x \,\overline{\mathsf{U}}\, v$ и $x \preceq v \xRightarrow{\text{по (M26)}} v \,\overline{\mathsf{u}}\, v$.
$v \,\overline{\mathsf{u}}\, v \xRightarrow{\text{по (M28)}} z \preceq v$.

4) $(x] \cup (v]$ не е идеал и $[y) \cup [z)$ не е филтър.
$(x] \cup (v]$ не е идеал $\Longrightarrow x \,\overline{\mathsf{U}}\, v$.
$x \,\overline{\mathsf{U}}\, v$ и $x \preceq y \Longrightarrow y \,\overline{\mathsf{u}}\, v \xRightarrow{\text{по (M23)}} v \,\overline{\mathsf{u}}\, y$.
$[y) \cup [z)$ не е филтър $\Longrightarrow y \,\overline{\mathsf{O}}\, z \Longrightarrow z \,\overline{\mathsf{O}}\, y$.
$z \,\overline{\mathsf{O}}\, y$ и $v \,\overline{\mathsf{u}}\, y \xRightarrow{\text{по (M27)}} z \preceq v$

Така във всички случаи получаваме че $z \preceq v$, което е в противоречие с условието че $z \not\preceq v$. Следователно допускането ни е погрешно и така:

$$\begin{array}{ll} & [z) \cap ((x] \cup (v]) = \emptyset \text{ и } (x] \cup (v] \text{ е идеал} \\ \text{или} & ([y) \cup [z)) \cap (v] = \emptyset \text{ и } [y) \cup [z) \text{ е филтър} \end{array}$$

Така простия филтър F ще построим по следния начин:

- ако $[z)\cap((x]\cup(v]) = \emptyset$ и $(x]\cup(v]$ е идеал. $[z)$ е филтър и така по Теоремата за отделимост имаме че съществуват прост филтър F и прост идеал I такива че:
  $F \cap I = \emptyset$, $[z) \subseteq F$ и $(x] \cup (v] \subseteq I$.
  Така получаваме че: $z \in F$ и $x, v \in I$ т.е. $x, v \notin F$.
- ако $([y)\cup[z))\cap(v] = \emptyset$ и $[y)\cup[z)$ е филтър. $(v]$ е идеал и така по Теоремата за отделимост имаме че съществуват прост филтър F и прост идеал I такива че:
  $F \cap I = \emptyset$, $[y) \cup [z) \subseteq F$ и $(v] \subseteq I$.
  Така получаваме че: $y, z \in F$ и $v \in I$ т.е. $v \notin F$.

Така и в двата случая виждаме че за простия филтър F е изпълнено че:

$$(x \notin F \text{ или } y \in F) \text{ и } z \in F \text{ и } v \notin F.$$

Т.е.

$$(x \in F \Longrightarrow y \in F) \text{ и } z \in F \text{ и } v \notin F.$$

□

3.2.5. *Характеризиране на релацията* o.

Твърдение 3.5 (Представяне на o)**.**
$x \,\mathsf{o}\, y \Longleftrightarrow (\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F \text{ и } y \in F)$

Доказателство.

($\Longrightarrow$) Нека $x \,\mathsf{o}\, y$. Нека $\mathcal{F} \in SFF(W)$. Тогава т.к. $\mathcal{F}$ е стабилна филтърна фамилия, то по условие (2) от дефиницията за $\mathcal{F}$ имаме че $(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F$ и $y \in F)$.
Т.е. от $x \,\mathsf{o}\, y$ следва че $(\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F$ и $y \in F)$.

($\Longleftarrow$) Нека $(\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F$ и $y \in F)$.
Нека допуснем че $x \,\overline{\mathsf{o}}\, y$.
Ще разчитаме че следните предположения са изпълнени:

– ако $z, v \in W$ и $z \mathsf{o}\, v$, то еднозначно можем да построим прост филтър F над W, такъв че ($x \notin F$ или $y \notin F$) и $z \in F$ и $v \in F$. Този филтър ще бележим с $F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \,\mathsf{o}\, v)$.
– ако $z, v \in W$ и $z \mathsf{u}\, v$, то еднозначно можем да построим прост филтър F над W, такъв че ($x \notin F$ или $y \notin F$) и $z \notin F$ и $v \notin F$. Този филтър ще бележим с $F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \,\mathsf{u}\, v)$.
– ако $z, v \in W$ и $z \not\preceq v$, то еднозначно можем да построим прост филтър F над W, такъв че ($x \notin F$ или $y \notin F$) и $z \in F$ и $v \notin F$. Този филтър ще бележим с $F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \not\preceq v)$.

Верността на тези предположения ще бъде доказана съответно с леми **3.4**, **3.5** и **3.6**.

Нека тогава множеството от прости филтри $\mathcal{F}$ образуваме така:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}' = \{\ & F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \not\preceq v) \mid z, v \in W \text{ и } z \not\preceq v\ \} \cup \\ \{\ & F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \,\mathsf{o}\, v) \mid z, v \in W \text{ и } z \,\mathsf{o}\, v\ \} \cup \\ \{\ & F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \,\mathsf{u}\, v) \mid z, v \in W \text{ и } z \,\mathsf{u}\, v\ \}\end{aligned}$$

Ако $\mathcal{F}' \neq \emptyset$ то тогава нека $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.
В противен случай от това че $\mathcal{F}' = \emptyset$ следва че $z \,\bar{\mathsf{o}}\, v$ за $\forall z, v \in W$, а в частност и $x \,\bar{\mathsf{o}}\, x$. Тогава $x \,\bar{\mathsf{o}}\, x \xrightarrow{\text{по (M29)}} x \,\mathsf{U}\, x$ и в този случай нека $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cup \{\ F(x \,\mathsf{U}\, x)\ \}$.
Първо ще отбележим че и в двата случая $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
Освен това по построение на елементите на $\mathcal{F}$, за него е изпълнено че: $(\forall F \in \mathcal{F})(x \notin F$ или $y \notin F)$.
Сега ще докажем и останалите условия за стабилна филтърна фамилия:

(1) Нека $z, v \in W$ са такива че $(\forall F \in \mathcal{F})(z \in F \Longrightarrow v \in F)$.
Нека допуснем че $z \not\preceq v$. Следователно имаме че $z \in F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \not\preceq v)$ и $v \notin F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \not\preceq v)$ и $F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \not\preceq v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \in F$ и $v \notin F)$.
Но това е в противоречие с искането $(\forall F \in \mathcal{F})(z \in F \Longrightarrow v \in F)$. Следователно допускането ни е погрешно и $z \preceq v$.
(2) Нека $z, v \in W$: $z \,\mathsf{o}\, v$. Следователно $z \in F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \,\mathsf{o}\, v)$ и $v \in F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \,\mathsf{o}\, v)$ и $F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \,\mathsf{o}\, v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \in F$ и $v \in F)$.
(3) Нека $z, v \in W$: $z \,\mathsf{u}\, v$. Следователно $z \notin F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \,\mathsf{u}\, v)$ и $v \notin F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \,\mathsf{u}\, v)$ и $F(x \,\bar{\mathsf{o}}\, y, z \,\mathsf{u}\, v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \notin F$ и $v \notin F)$.

Така получихме че $(\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\forall F \in \mathcal{F})(x \notin F$ или $y \notin F)$, което обаче е противоречие с началното условие че $(\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F$ и $y \in F)$. Следователно допускането е погрешно и $x \,\mathsf{o}\, y$.

□

Лема 3.4 (Филтър за $x \,\bar{\mathsf{o}}\, y$ и $z \,\mathsf{o}\, v$)**.** *Нека $x \,\bar{\mathsf{o}}\, y$ и $z \,\mathsf{o}\, v$. Тогава съществува прост филтър F над W, такъв че:*

$$(x \notin F \text{ } \textit{или } y \notin F) \text{ } \textit{и } z \in F \text{ } \textit{и } v \in F.$$

Доказателство. Това означава че за F трябва да е в сила поне един от следните два случая:

$$\begin{aligned} & x \notin F \text{ и } z \in F \text{ и } v \in F \\ \text{или} \qquad & y \notin F \text{ и } z \in F \text{ и } v \in F \end{aligned}$$

За да използваме Теоремата за отделимост на филтри и идеали ще искаме поне едно от следните две твърдения да е изпълнено:

- има идеал който съдържа x и има филтър който съдържа z и v и сечението им е празно;
- има идеал който съдържа y и има филтър който съдържа z и v и сечението им е празно.

Наличието на филтър и в двата случая се показва така:
$z \mathsf{o} v \xRightarrow{\text{по (Mo)}} z \mathsf{O} v \Longrightarrow [z) \cup [v)$ е филтър.

Остава само да докажем че поне едно от следните две твърдения е изпълнено:

$$\begin{array}{ll} & ([z) \cup [v)) \cap (x] = \emptyset \text{ и } (x] \text{ е идеал} \\ \text{или} & ([z) \cup [v)) \cap (y] = \emptyset \text{ и } (y] \text{ е идеал} \end{array}$$

Нека да допуснем че и двете не са вярни. Т.е.

$$\begin{array}{ll} & ([z) \cup [v)) \cap (x] \neq \emptyset \text{ или } (x] \text{ не е идеал} \\ \text{и} & ([z) \cup [v)) \cap (y] \neq \emptyset \text{ или } (y] \text{ не е идеал} \end{array}$$

За това имаме четири възможности:

1) $([z) \cup [v)) \cap (x] \neq \emptyset$ и $([z) \cup [v)) \cap (y] \neq \emptyset$.
$([z) \cup [v)) \cap (x] \neq \emptyset \Longrightarrow \exists s \in W : s \in [z) \cup [v)$ и $s \in (x] \Longrightarrow s \leq x$.
$([z) \cup [v)) \cap (y] \neq \emptyset \Longrightarrow \exists t \in W : t \in [z) \cup [v)$ и $t \in (y] \Longrightarrow t \leq y$.
$s, t \in [z) \cup [v)$ и $s \leq x$ и $t \leq y$ и $[z) \cup [v)$ е нарастващо множество $\Longrightarrow$ $x, y \in [z) \cup [v)$.
2) $([z) \cup [v)) \cap (x] \neq \emptyset$ и $(y]$ не е идеал.
$([z) \cup [v)) \cap (x] \neq \emptyset \Longrightarrow \exists s \in W : s \in [z) \cup [v)$ и $s \in (x] \Longrightarrow s \leq x$.
$s \in [z) \cup [v)$ и $s \leq x \Longrightarrow x \in [z) \cup [v)$.
$(y]$ не е идеал $\Longrightarrow y \overline{\mathsf{U}} y \xRightarrow{\text{по (M11)}} x \leq y \Longrightarrow y \in [z) \cup [v)$.
3) $(x]$ не е идеал и $([z) \cup [v)) \cap (y] \neq \emptyset$.
$([z) \cup [v)) \cap (y] \neq \emptyset \Longrightarrow \exists s \in W : s \in [z) \cup [v)$ и $s \in (y] \Longrightarrow s \leq y$.
$s \in [z) \cup [v)$ и $s \leq y \Longrightarrow y \in [z) \cup [v)$.
$(x]$ не е идеал $\Longrightarrow x \overline{\mathsf{U}} x \Longrightarrow y \leq x \Longrightarrow x \in [z) \cup [v)$.
4) $(x]$ не е идеал и $(y]$ не е идеал.
$(x]$ не е идеал $\Longrightarrow x \overline{\mathsf{U}} x \Longrightarrow z \leq x \Longrightarrow x \in [z) \cup [v)$.
$(y]$ не е идеал $\Longrightarrow y \overline{\mathsf{U}} y \Longrightarrow v \leq y \Longrightarrow y \in [z) \cup [v)$.

Така във всички случаи получихме че $x, y \in [z) \cup [v)$.
$x, y \in [z) \cup [v)$ и $z \mathsf{o} v \xRightarrow{\text{по }\textbf{Твърдение 2.4}} x \mathsf{o} y$.
Но това е противоречие с условието $x \overline{\mathsf{o}} y$. Следователно допускането ни е погрешно и така:

$$\begin{array}{ll} & ([z) \cup [v)) \cap (x] = \emptyset \text{ и } (x] \text{ е идеал} \\ \text{или} & ([z) \cup [v)) \cap (y] = \emptyset \text{ и } (y] \text{ е идеал} \end{array}$$

Така простия филтър F ще построим по следния начин:

- ако $([z) \cup [v)) \cap (x] = \emptyset$ и $(x]$ е идеал. $[z) \cup [v)$ е филтър и тогава по Теоремата за отделимост имаме че съществуват прост филтър F и прост идеал I такива че:
$F \cap I = \emptyset$, $[z) \cup [v) \subseteq F$ и $(x] \subseteq I$.
Така получаваме че: $z \in F$, $v \in F$ и $x \in I$ т.е. $x \notin F$.
- ако $([z) \cup [v)) \cap (y] = \emptyset$ и $(y]$ е идеал. $[z) \cup [v)$ е филтър и тогава по Теоремата за отделимост имаме че съществуват прост филтър F и прост идеал I такива че:
$F \cap I = \emptyset$, $[z) \cup [v) \subseteq F$ и $(y] \subseteq I$.
Така получаваме че $z \in F$, $v \in F$ и $y \in I$ т.е. $y \notin F$.

Така и в двата случая виждаме че за простия филтър F е изпълнено че:

$$(x \notin F \text{ или } y \notin F) \text{ и } z \in F \text{ и } v \in F.$$

□

Лема 3.5 (Филтър за $x \,\overline{\mathsf{o}}\, y$ и $z \,\mathsf{u}\, v$)**.** *Нека $x \,\overline{\mathsf{o}}\, y$ и $z \,\mathsf{u}\, v$. Тогава съществува прост филтър F над W, такъв че:*

$$(x \notin F \text{ или } y \notin F) \text{ и } z \notin F \text{ и } v \notin F.$$

Доказателство. Това означава че за F трябва да е в сила поне един от следните два случая:

$$\begin{array}{ll} & x \notin F \text{ и } z \notin F \text{ и } v \notin F \\ \text{или} & y \notin F \text{ и } z \notin F \text{ и } v \notin F \end{array}$$

За да използваме Теоремата за отделимост на филтри и идеали ще искаме поне едно от следните две твърдения да е изпълнено:

- има идеал който съдържа x, z и v. В този случай за филтър ще използваме $\emptyset$;
- има идеал който съдържа y, z и v. В този случай за филтър ще използваме $\emptyset$.

Остава да покажем че поне едно от следните две твърдения е изпълнено:

$$\begin{array}{ll} & (x] \cup (z] \cup (v] \text{ е идеал} \\ \text{или} & (y] \cup (z] \cup (v] \text{ е идеал} \end{array}$$

Нека да допуснем че и двете не са вярни. Т.е.

$$\begin{array}{ll} & (x] \cup (z] \cup (v] \text{ не е идеал} \\ \text{и} & (y] \cup (z] \cup (v] \text{ не е идеал} \end{array}$$

Щом $(x] \cup (z] \cup (v]$ не е идеал и понеже $z \,\mathsf{u}\, v$ тогава по **Следствие 1.2** имаме че $x \,\overline{\mathsf{U}}\, z$ или $x \,\overline{\mathsf{U}}\, v$. Аналогично щом $(y] \cup (z] \cup (v]$ не е идеал то $y \,\overline{\mathsf{U}}\, z$ или $y \,\overline{\mathsf{U}}\, v$. Така получаваме:

$$\begin{array}{ll} & x \,\overline{\mathsf{U}}\, z \text{ или } x \,\overline{\mathsf{U}}\, v \\ \text{и} & y \,\overline{\mathsf{U}}\, z \text{ или } y \,\overline{\mathsf{U}}\, v \end{array}$$

Ще разгледаме двата случая на които се разпада първото твърдение:

1) $x \,\overline{\mathsf{U}}\, z$.
   $x \,\overline{\mathsf{U}}\, z \xRightarrow{\text{по (M8)}} z \,\overline{\mathsf{U}}\, x$. $x \,\overline{\mathsf{o}}\, y \xRightarrow{\text{по (M17)}} y \,\overline{\mathsf{o}}\, x$.
   $z \,\overline{\mathsf{U}}\, x$ и $y \,\overline{\mathsf{o}}\, x \xRightarrow{\text{по (M22)}} y \preceq z$.
   $z \,\mathsf{u}\, v \xRightarrow{\text{по (M24)}} z \,\mathsf{u}\, z$.
   $y \preceq z$ и $z \,\mathsf{u}\, v \xRightarrow{\text{по (M26)}} y \,\mathsf{U}\, v$.
   $y \preceq z$ и $z \,\mathsf{u}\, z \Longrightarrow y \,\mathsf{U}\, z$.
   Но така имаме че $y \,\mathsf{U}\, v$ и $y \,\mathsf{U}\, z$, което е в противоречие с това че $y \,\overline{\mathsf{U}}\, z$ или $y \,\overline{\mathsf{U}}\, v$.
2) $x \,\overline{\mathsf{U}}\, v$. Аналогично на предния случай получаваме $y \,\mathsf{U}\, v$ и $y \,\mathsf{U}\, z$, което е в противоречие с това че $y \,\overline{\mathsf{U}}\, z$ или $y \,\overline{\mathsf{U}}\, v$.

Така във всички случаи получаваме противоречие и следователно допускането ни е погрешно и така:

$$\begin{array}{ll} & (x] \cup (z] \cup (v] \text{ е идеал} \\ \text{или} & (y] \cup (z] \cup (v] \text{ е идеал} \end{array}$$

Така простия филтър F ще построим по следния начин:

- ако $(x] \cup (z] \cup (v]$ е идеал:
  $\emptyset$ е филтър. Тогава по Теоремата за отделимост имаме че съществуват прост филтър F и прост идеал I такива че:
  $F \cap I = \emptyset$ и $(x] \cup (z] \cup (v] \subseteq I$.
  Така получаваме че: $x, z, v \in I$ т.е. $x, z, v \notin F$.
- ако $(y] \cup (z] \cup (v]$ е идеал:
  $\emptyset$ е филтър. Тогава по Теоремата за отделимост имаме че съществуват прост филтър F и прост идеал I такива че:
  $F \cap I = \emptyset$ и $(y] \cup (z] \cup (v] \subseteq I$.
  Така получаваме че: $y, z, v \in I$ т.е. $y, z, v \notin F$.

Така и в двата случая виждаме че за простия филтър F е изпълнено че:

$$(x \notin F \text{ или } y \notin F) \text{ и } z \notin F \text{ и } v \notin F.$$

□

Лема 3.6 (Филтър за $x\, \overline{\mathsf{o}}\, y$ и $z \not\preceq v$)**.** *Нека $x\, \overline{\mathsf{o}}\, y$ и $z \not\preceq v$. Тогава съществува прост филтър F над W, такъв че:*

$$(x \notin F \textit{ или } y \notin F) \textit{ и } z \in F \textit{ и } v \notin F.$$

Доказателство. Това означава че за F трябва да е в сила поне един от следните два случая:

$$\begin{array}{ll} & x \notin F \text{ и } z \in F \text{ и } v \notin F \\ \text{или} & y \notin F \text{ и } z \in F \text{ и } v \notin F \end{array}$$

За да използваме Теоремата за отделимост на филтри и идеали ще искаме поне едно от следните две твърдения да е изпълнено:

- има идеал който съдържа x и v и има филтър който съдържа z и сечението им е празно;
- има идеал който съдържа y и v и има филтър който съдържа z и сечението им е празно.

Наличието на филтър и в двата случая се показва така:
$z \not\preceq v \xRightarrow{\text{по (M}\leq\text{)}} z \not\leq v \xRightarrow{\text{по (M7)}} z\, \mathsf{O}\, z \Longrightarrow [z)$ е филтър.

Остава само да докажем че поне едно от следните две твърдения е изпълнено:

$$\begin{array}{ll} & [z) \cap ((x] \cup (v]) = \emptyset \text{ и } (x] \cup (v] \text{ е идеал} \\ \text{или} & [z) \cap ((y] \cup (v]) = \emptyset \text{ и } (y] \cup (v] \text{ е идеал} \end{array}$$

Нека да допуснем че и двете не са вярни. Т.е.

$$\begin{array}{ll} & [z) \cap ((x] \cup (v]) \neq \emptyset \text{ или } (x] \cup (v] \text{ не е идеал} \\ \text{и} & [z) \cap ((y] \cup (v]) \neq \emptyset \text{ или } (y] \cup (v] \text{ не е идеал} \end{array}$$

След еквивалентно преобразувание получаваме

$$\begin{array}{ll} & [z) \cap (x] \neq \emptyset \text{ или } [z) \cap (v] \neq \emptyset \text{ или } (x] \cup (v] \text{ не е идеал} \\ \text{и} & [z) \cap (y] \neq \emptyset \text{ или } [z) \cap (v] \neq \emptyset \text{ или } (y] \cup (v] \text{ не е идеал} \end{array}$$

Нека отбележим че ако $[z) \cap (v] \neq \emptyset$, то тогава ще получим че $z \leq v$, а следователно и $z \preceq v$.
И т.к. по условие имаме че $z \not\preceq v$, тогава $[z) \cap (v] = \emptyset$ и така допускането се свежда до следните четири случая:

1) $[z) \cap (x] \neq \emptyset$ и $[z) \cap (y] \neq \emptyset$.
$[z) \cap (x] \neq \emptyset \Longrightarrow z \leq x$.
$x \,\overline{\mathsf{o}}\, y \xRightarrow{\text{по (M17)}} y \,\overline{\mathsf{o}}\, x$.
$y \,\overline{\mathsf{o}}\, x$ и $z \leq x \xRightarrow{\text{по (M19)}} y \,\overline{\mathsf{o}}\, z \Longrightarrow z \,\overline{\mathsf{o}}\, y$.
$[z) \cap (y] \neq \emptyset \Longrightarrow z \leq y$.
$z \,\overline{\mathsf{o}}\, y$ и $z \leq y \Longrightarrow z \,\overline{\mathsf{o}}\, z$.
$z \,\overline{\mathsf{o}}\, z \xRightarrow{\text{по (M21)}} z \preceq v$.

2) $[z) \cap (x] \neq \emptyset$ и $(y] \cup (v]$ не е идеал.
$[z) \cap (x] \neq \emptyset \Longrightarrow z \leq x$.
$x \,\overline{\mathsf{o}}\, y \xRightarrow{\text{по (M17)}} y \,\overline{\mathsf{o}}\, x$.
$y \,\overline{\mathsf{o}}\, x$ и $z \leq x \xRightarrow{\text{по (M19)}} y \,\overline{\mathsf{o}}\, z \Longrightarrow z \,\overline{\mathsf{o}}\, y$.
$(y] \cup (v]$ не е идеал $\Longrightarrow y \,\overline{\mathsf{U}}\, v \xRightarrow{\text{по (M8)}} v \,\overline{\mathsf{U}}\, y$.
$z \,\overline{\mathsf{o}}\, y$ и $v \,\overline{\mathsf{U}}\, y \xRightarrow{\text{по (M22)}} z \preceq v$.

3) $(x] \cup (v]$ не е идеал и $[z) \cap (y] \neq \emptyset$.
$(x] \cup (v]$ не е идеал $\Longrightarrow x \,\overline{\mathsf{U}}\, v \Longrightarrow v \,\overline{\mathsf{U}}\, x$.
$[z) \cap (y] \neq \emptyset \Longrightarrow z \leq y$.
$x \,\overline{\mathsf{o}}\, y$ и $z \leq y \Longrightarrow x \,\overline{\mathsf{o}}\, z \Longrightarrow z \,\overline{\mathsf{o}}\, x$.
$z \,\overline{\mathsf{o}}\, x$ и $v \,\overline{\mathsf{U}}\, x \Longrightarrow z \preceq v$.

4) $(x] \cup (v]$ не е идеал и $(y] \cup (v]$ не е идеал.
$(x] \cup (v]$ не е идеал $\Longrightarrow x \,\overline{\mathsf{U}}\, v \Longrightarrow v \,\overline{\mathsf{U}}\, x$.
$x \,\overline{\mathsf{o}}\, y \xRightarrow{\text{по (M17)}} y \,\overline{\mathsf{o}}\, x$.
$y \,\overline{\mathsf{o}}\, x$ и $v \,\overline{\mathsf{U}}\, x \Longrightarrow y \preceq v$.
$(y] \cup (v]$ не е идеал $\Longrightarrow y \,\overline{\mathsf{U}}\, v$.
$y \,\overline{\mathsf{U}}\, v$ и $y \preceq v \xRightarrow{\text{по (M26)}} v \,\overline{\mathsf{u}}\, v$.
$v \,\overline{\mathsf{u}}\, v \xRightarrow{\text{по (M28)}} z \preceq v$.

Така във всички случаи получаваме че $z \preceq v$, което е в противоречие с условието че $z \not\preceq v$. Следователно допускането ни е погрешно и така:

$$\begin{array}{ll} & [z) \cap ((x] \cup (v]) = \emptyset \text{ и } (x] \cup (v] \text{ е идеал} \\ \text{или} & [z) \cap ((y] \cup (v]) = \emptyset \text{ и } (y] \cup (v] \text{ е идеал} \end{array}$$

Така простия филтър F ще построим по следния начин:

- ако $[z) \cap ((x] \cup (v]) = \emptyset$ и $(x] \cup (v]$ е идеал. $[z)$ е филтър и тогава по Теоремата за отделимост имаме че съществуват прост филтър F и прост идеал I такива че:
  $F \cap I = \emptyset$, $[z) \subseteq F$ и $(x] \cup (v] \subseteq I$.
  Така получаваме че: $z \in F$ и $x, v \in I$ т.е. $x, v \notin F$.
- ако $[z) \cap ((y] \cup (v]) = \emptyset$ и $(y] \cup (v]$ е идеал. $[z)$ е филтър и тогава по Теоремата за отделимост имаме че съществуват прост филтър F и прост идеал I такива че:
  $F \cap I = \emptyset$, $[z) \subseteq F$ и $(y] \cup (v] \subseteq I$.
  Така получаваме че: $z \in F$ и $y, v \in I$ т.е. $y, v \notin F$.

Така и в двата случая виждаме че за простия филтър F е изпълнено че:

$$(x \notin F \text{ или } y \notin F) \text{ и } z \in F \text{ и } v \notin F.$$

$\square$

3.2.6. *Характеризиране на релацията* u.

Твърдение 3.6 (Представяне на u)**.**
$x \mathsf{u} y \Longleftrightarrow (\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F \text{ и } y \notin F)$

Доказателство.

($\Longrightarrow$) Нека $x \mathsf{u} y$. Нека $\mathcal{F} \in SFF(W)$. Тогава т.к. $\mathcal{F}$ е стабилна филтърна фамилия, то по условие (3) от дефиницията за $\mathcal{F}$ имаме че $(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F \text{ и } y \notin F)$.
Т.е. от $x \mathsf{u} y$ следва че $(\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F \text{ и } y \notin F)$.

($\Longleftarrow$) Нека $(\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F \text{ и } y \notin F)$.
Нека допуснем че $x \bar{\mathsf{u}} y$.
Ще разчитаме че следните предположения са изпълнени:
- ако $z, v \in W$ и $z \mathsf{o} v$, то еднозначно можем да построим прост филтър F над W, такъв че $(x \in F$ или $y \in F)$ и $z \in F$ и $v \in F$. Този филтър ще бележим с $F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \mathsf{o} v)$.
- ако $z, v \in W$ и $z \mathsf{u} v$, то еднозначно можем да построим прост филтър F над W, такъв че $(x \in F$ или $y \in F)$ и $z \notin F$ и $v \notin F$. Този филтър ще бележим с $F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \mathsf{u} v)$.
- ако $z, v \in W$ и $z \not\preceq v$, то еднозначно можем да построим прост филтър F над W, такъв че $(x \in F$ или $y \in F)$ и $z \in F$ и $v \notin F$. Този филтър ще бележим с $F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \not\preceq v)$.

Верността на тези предположения ще бъде доказана съответно с леми **3.7**, **3.8** и **3.9**.

Нека тогава множеството от прости филтри $\mathcal{F}$ образуваме така:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}' = {} & \{\, F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \not\preceq v) \mid z, v \in W \text{ и } z \not\preceq v \,\} \cup \\ & \{\, F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \mathsf{o} v) \mid z, v \in W \text{ и } z \mathsf{o} v \,\} \cup \\ & \{\, F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \mathsf{u} v) \mid z, v \in W \text{ и } z \mathsf{u} v \,\}\end{aligned}$$

Ако $\mathcal{F}' \neq \emptyset$ то тогава нека $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.
В противен случай от това че $\mathcal{F}' = \emptyset$ следва че $z \bar{\mathsf{u}} v$ за $\forall z, v \in W$, а в частност и $x \bar{\mathsf{u}} x$. Тогава $x \bar{\mathsf{u}} x \xRightarrow{\text{по (M30)}} x \mathsf{O} x$ и в този случай нека $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cup \{\, F(x \mathsf{O} x) \,\}$.
Първо ще отбележим че и в двата случая $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
Освен това по построение на елементите на $\mathcal{F}$, за него е изпълнено че: $(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F$ или $y \in F)$.
Сега ще докажем и останалите условия за стабилна филтърна фамилия:

(1) Нека $z, v \in W$ са такива че $(\forall F \in \mathcal{F})(z \in F \Longrightarrow v \in F)$.
Нека допуснем че $z \not\preceq v$. Следователно имаме че $z \in F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \not\preceq v)$ и $v \notin F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \not\preceq v)$ и $F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \not\preceq v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \in F$ и $v \notin F)$.
Но това е в противоречие с искането $(\forall F \in \mathcal{F})(z \in F \Longrightarrow v \in F)$.
Следователно допускането ни е погрешно и $z \preceq v$.

(2) Нека $z, v \in W$: $z \mathsf{o} v$. Следователно $z \in F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \mathsf{o} v)$ и $v \in F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \mathsf{o} v)$ и $F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \mathsf{o} v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \in F$ и $v \in F)$.

(3) Нека $z, v \in W$: $z \mathsf{u} v$. Следователно $z \notin F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \mathsf{u} v)$ и $v \notin F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \mathsf{u} v)$ и $F(x \bar{\mathsf{u}} y, z \mathsf{u} v) \in \mathcal{F}$. Т.е. $(\exists F \in \mathcal{F})(z \notin F$ и $v \notin F)$.

Така получихме че $(\exists \mathcal{F} \in SFF(W))(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F$ или $y \in F)$, което обаче е противоречие с началното условие че $(\forall \mathcal{F} \in SFF(W))(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F$ и $y \notin F)$. Следователно допускането е погрешно и $x \mathsf{u} y$.

$\square$

Лема 3.7 (Филтър за $x \mathrel{\bar{\sqcup}} y$ и $z \circ v$). *Нека $x \mathrel{\bar{\sqcup}} y$ и $z \circ v$. Тогава съществува прост филтър F над W, такъв че:*

$$(x \in F \text{ или } y \in F) \text{ и } z \in F \text{ и } v \in F.$$

Лема 3.8 (Филтър за $x \mathrel{\bar{\sqcup}} y$ и $z \sqcup v$). *Нека $x \mathrel{\bar{\sqcup}} y$ и $z \sqcup v$. Тогава съществува прост филтър F над W, такъв че:*

$$(x \in F \text{ или } y \in F) \text{ и } z \notin F \text{ и } v \notin F.$$

Понеже доказателствата на леми **3.7** и **3.8** са напълно дуални съответно на тези на леми **3.5** и **3.4**, затова те няма да бъдат представяни, като ще считаме че верността на лемите се подсигурява от съображения за дуалност.

Също така доказателството на **Лема 3.9** е аналогично на това на **Лема 3.6**, също както доказателството на **Лема 3.2** е аналогично на това на **Лема 3.1**. Затова и **Лема 3.9** ще бъде доказана в съкратен вид, като някои разсъждения бъдат пропуснати поради дуалност.

Лема 3.9 (Филтър за $x \mathrel{\bar{\sqcup}} y$ и $z \not\preceq v$). *Нека $x \mathrel{\bar{\sqcup}} y$ и $z \not\preceq v$. Тогава съществува прост филтър F над W, такъв че:*

$$(x \in F \text{ или } y \in F) \text{ и } z \in F \text{ и } v \notin F.$$

Доказателство. Това означава че за F трябва да е в сила поне един от следните два случая:

$$x \in F \text{ и } z \in F \text{ и } v \notin F$$
$$\text{или} \qquad y \in F \text{ и } z \in F \text{ и } v \notin F$$

За да използваме Теоремата за отделимост на филтри и идеали ще искаме поне едно от следните две твърдения да е изпълнено:

- има идеал който съдържа v и има филтър който съдържа x и z и сечението им е празно;
- има идеал който съдържа v и има филтър който съдържа y и z и сечението им е празно.

Наличието на идеал и в двата случая се показва така:
$z \not\preceq v \xRightarrow{\text{по } (\mathrm{M}\leq)} z \not\leq v \xRightarrow{\text{по } (\mathrm{M}11)} v \sqcup v \Longrightarrow (v]$ е идеал.

Остава само да докажем че поне едно от следните две твърдения е изпълнено:

$$([x) \cup [z)) \cap (v] = \emptyset \text{ и } [x) \cup [z) \text{ е филтър}$$
$$\text{или} \qquad ([y) \cup [z)) \cap (v] = \emptyset \text{ и } [y) \cup [z) \text{ е филтър}$$

Ако допуснем че и двете не са вярни то, аналогично на **Лема 3.6**, във всички случаи ще достигнем до противоречие с началното условие $z \not\preceq v$.

Така простия филтър F ще построим по следния начин:

- ако $([x) \cup [z)) \cap (v] = \emptyset$ и $[x) \cup [z)$ е филтър. $(v]$ е идеал и тогава по Теоремата за отделимост имаме че съществуват прост филтър F и прост идеал I такива че:
  $F \cap I = \emptyset$, $[x) \cup [z) \subseteq F$ и $(v] \subseteq I$.
  Така получаваме че: $x, z \in F$ и $v \in I$ т.е. $v \notin F$.
- ако $([y) \cup [z)) \cap (v] = \emptyset$ и $[y) \cup [z)$ е филтър. $(v]$ е идеал и тогава по Теоремата за отделимост имаме че съществуват прост филтър F и прост идеал I такива че:
  $F \cap I = \emptyset$, $[y) \cup [z) \subseteq F$ и $(v] \subseteq I$.
  Така получаваме че: $y, z \in F$ и $v \in I$ т.е. $v \notin F$.

Така и в двата случая виждаме че за простия филтър F е изпълнено че:

$$(x \in F \text{ или } y \in F) \text{ и } z \in F \text{ и } v \notin F.$$

$\square$

3.3. **Доказателство на теоремата за стандартно представяне на абстрактните структури.**

Теорема (Теорема за стандартно представяне на абстрактните структури). *Нека $\underline{W}^A$ е абстрактна структура. Тогава съществува стандартна структура $\underline{W}$ и изображение h от носителя на $\underline{W}^A$ в носителя на $\underline{W}$ такива че h е изоморфно влагане на $\underline{W}^A$ в $\underline{W}$.*

Доказателство.
Нека $\underline{W}^A = (W^A, \leq^A, \mathsf{o}^A, \mathsf{u}^A, \preceq^A, \mathsf{O}^A, \mathsf{U}^A)$.
$SFF(W^A)$ са стабилните филтърни фамилии над W^A.
За $\forall \mathcal{F} \in SFF(W^A)$ ще дефинираме изображението $f_{\mathcal{F}} : W^A \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F})$ така:

$$f_{\mathcal{F}}(x) = \{\ F \mid F \in \mathcal{F} \text{ и } x \in F\ \} \text{ за } \forall x \in W^A$$

Нека $SFF(W^A)$ означим още и с I.
По **Дефиниция 4** знаем че W^A е непразно множество, следователно $\exists x \in W^A$.
Тогава по условие (M14) за $\underline{W}^A$ получаваме че $x \preceq^A x$.
$x \preceq^A x \xRightarrow{\text{по \textbf{Твърдение 3.4}}} (\exists \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow x \in F)$.
Така се уверяваме че $SFF(W^A) \neq \emptyset$ т.е. $I \neq \emptyset$.

Нека дефинираме структурите $\underline{W_i} = (W_i, \leq_i, \mathsf{O}_i, \mathsf{U}_i)$ за $\forall i \in I$ така:

$$\begin{aligned}
W_i &= \mathcal{P}(i) && \\
a \leq_i b &\Longleftrightarrow a \subseteq b && \text{за } \forall a, b \in W_i \\
a\ \mathsf{O}_i\ b &\Longleftrightarrow a \cap b \neq \emptyset && \text{за } \forall a, b \in W_i \\
a\ \mathsf{U}_i\ b &\Longleftrightarrow a \cup b \neq i && \text{за } \forall a, b \in W_i
\end{aligned}$$

Така на практика релациите $\leq_i, \mathsf{O}_i$ и U_i са дефинирани чрез булевата алгебра $(\mathcal{P}(i), \emptyset, i, \cap, \cup, \setminus)$ над подмножествата на i. От дефиницията на стабилни филтърни фамилии имаме че $i \neq \emptyset$, следователно булевата алгебра е неизродена. Така по дефиниция имаме че $\underline{W_i}$ е мереологична структура за $\forall i \in I$.

Тогава структурата $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ ще дефинираме така:
Нека $W = \prod_{i \in I} W_i$ е декартовото произведение на множествата W_i. С x_i ще означаваме i-тата координата на вектора $x \in W$.
Релациите $\leq$, o, u, $\preceq$, O и U дефинираме по следния начин:

$$\begin{aligned}
x \leq y &\Longleftrightarrow (\forall i \in I)(x_i \leq_i y_i) && \text{за } x, y \in W \\
x\ \mathsf{o}\ y &\Longleftrightarrow (\forall i \in I)(x_i\ \mathsf{O}_i\ y_i) && \text{за } x, y \in W \\
x\ \mathsf{u}\ y &\Longleftrightarrow (\forall i \in I)(x_i\ \mathsf{U}_i\ y_i) && \text{за } x, y \in W \\
x \preceq y &\Longleftrightarrow (\exists i \in I)(x_i \leq_i y_i) && \text{за } x, y \in W \\
x\ \mathsf{O}\ y &\Longleftrightarrow (\exists i \in I)(x_i\ \mathsf{O}_i\ y_i) && \text{за } x, y \in W \\
x\ \mathsf{U}\ y &\Longleftrightarrow (\exists i \in I)(x_i\ \mathsf{U}_i\ y_i) && \text{за } x, y \in W
\end{aligned}$$

Така по **Дефиниция 3** получената структура $\underline{W}$ е стандартна структура.

И накрая изображението $h : W^A \longrightarrow \prod_{i \in I} W_i$ дефинираме за $\forall x \in W^A$, като определим i-тата координата на $h(x)$ за $\forall i \in I$ така: $(h(x))_i = f_i(x)$.

Сега ще видим че h запазва релациите $\leq^A$, o^A, u^A, $\preceq^A$, O^A и U^A за $\forall x, y \in W^A$. За релацията $\leq^A$:

$$\begin{aligned}
& x \leq^A y \xLeftrightarrow{\text{по } \textbf{Твърдение 3.1}} \\
& (\forall \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow y \in F) \Longleftrightarrow \\
& (\forall \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\forall F \in \mathcal{F})(F \in f_{\mathcal{F}}(x) \Longrightarrow F \in f_{\mathcal{F}}(y)) \Longleftrightarrow \\
& (\forall \mathcal{F} \in SFF(W^A))(f_{\mathcal{F}}(x) \subseteq f_{\mathcal{F}}(y)) \Longleftrightarrow \\
& (\forall i \in I)((h(x))_i \subseteq (h(y))_i) \Longleftrightarrow \\
& (\forall i \in I)((h(x))_i \leq_i (h(y))_i) \Longleftrightarrow \\
& h(x) \leq h(y)
\end{aligned}$$

За релацията o^A:

$$\begin{aligned}
& x \ \mathsf{o}^A \ y \xLeftrightarrow{\text{по } \textbf{Твърдение 3.5}} \\
& (\forall \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F \text{ и } y \in F) \Longleftrightarrow \\
& (\forall \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\exists F \in \mathcal{F})(F \in f_{\mathcal{F}}(x) \text{ и } F \in f_{\mathcal{F}}(y)) \Longleftrightarrow \\
& (\forall \mathcal{F} \in SFF(W^A))(f_{\mathcal{F}}(x) \cap f_{\mathcal{F}}(y) \neq \emptyset) \Longleftrightarrow \\
& (\forall i \in I)((h(x))_i \cap (h(y))_i \neq \emptyset) \Longleftrightarrow \\
& (\forall i \in I)((h(x))_i \ \mathsf{O}_i \ (h(y))_i) \Longleftrightarrow \\
& h(x) \ \mathsf{o} \ h(y)
\end{aligned}$$

За релацията u^A:

$$\begin{aligned}
& x \ \mathsf{u}^A \ y \xLeftrightarrow{\text{по } \textbf{Твърдение 3.6}} \\
& (\forall \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F \text{ и } y \notin F) \Longleftrightarrow \\
& (\forall \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\exists F \in \mathcal{F})(F \notin f_{\mathcal{F}}(x) \text{ и } F \notin f_{\mathcal{F}}(y)) \Longleftrightarrow \\
& (\forall \mathcal{F} \in SFF(W^A))(f_{\mathcal{F}}(x) \cup f_{\mathcal{F}}(y) \neq \mathcal{F}) \Longleftrightarrow \\
& (\forall i \in I)((h(x))_i \cup (h(y))_i \neq i) \Longleftrightarrow \\
& (\forall i \in I)((h(x))_i \ \mathsf{U}_i \ (h(y))_i) \Longleftrightarrow \\
& h(x) \ \mathsf{u} \ h(y)
\end{aligned}$$

За релацията $\preceq^A$:

$$\begin{aligned}
& x \preceq^A y \xLeftrightarrow{\text{по } \textbf{Твърдение 3.4}} \\
& (\exists \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\forall F \in \mathcal{F})(x \in F \Longrightarrow y \in F) \Longleftrightarrow \\
& (\exists \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\forall F \in \mathcal{F})(F \in f_{\mathcal{F}}(x) \Longrightarrow F \in f_{\mathcal{F}}(y)) \Longleftrightarrow \\
& (\exists \mathcal{F} \in SFF(W^A))(f_{\mathcal{F}}(x) \subseteq f_{\mathcal{F}}(y)) \Longleftrightarrow \\
& (\exists i \in I)((h(x))_i \subseteq (h(y))_i) \Longleftrightarrow \\
& (\exists i \in I)((h(x))_i \leq_i (h(y))_i) \Longleftrightarrow \\
& h(x) \preceq h(y)
\end{aligned}$$

За релацията O^A:

$$
\begin{aligned}
&x \mathrel{\mathsf{O}^A} y \overset{\text{по } \textbf{Твърдение 3.2}}{\Longleftrightarrow} \\
&(\exists \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F \text{ и } y \in F) \Longleftrightarrow \\
&(\exists \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\exists F \in \mathcal{F})(F \in f_{\mathcal{F}}(x) \text{ и } F \in f_{\mathcal{F}}(y)) \Longleftrightarrow \\
&(\exists \mathcal{F} \in SFF(W^A))(f_{\mathcal{F}}(x) \cap f_{\mathcal{F}}(y) \neq \emptyset) \Longleftrightarrow \\
&(\exists i \in I)((h(x))_i \cap (h(y))_i \neq \emptyset) \Longleftrightarrow \\
&(\exists i \in I)((h(x))_i \mathrel{\mathsf{O}_i} (h(y))_i) \Longleftrightarrow \\
&h(x) \mathrel{\mathsf{O}} h(y)
\end{aligned}
$$

За релацията U^A:

$$
\begin{aligned}
&x \mathrel{\mathsf{U}^A} y \overset{\text{по } \textbf{Твърдение 3.3}}{\Longleftrightarrow} \\
&(\exists \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\exists F \in \mathcal{F})(x \notin F \text{ и } y \notin F) \Longleftrightarrow \\
&(\exists \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\exists F \in \mathcal{F})(F \notin f_{\mathcal{F}}(x) \text{ и } F \notin f_{\mathcal{F}}(y)) \Longleftrightarrow \\
&(\exists \mathcal{F} \in SFF(W^A))(f_{\mathcal{F}}(x) \cup f_{\mathcal{F}}(y) \neq \mathcal{F}) \Longleftrightarrow \\
&(\exists i \in I)((h(x))_i \cup (h(y))_i \neq i) \Longleftrightarrow \\
&(\exists i \in I)((h(x))_i \mathrel{\mathsf{U}_i} (h(y))_i) \Longleftrightarrow \\
&h(x) \mathrel{\mathsf{U}} h(y)
\end{aligned}
$$

Така показахме че $x \leq^A y \Longleftrightarrow h(x) \leq h(y)$, $x \mathrel{\mathsf{o}^A} y \Longleftrightarrow h(x) \mathrel{\mathsf{o}} h(y)$, $x \mathrel{\mathsf{u}^A} y \Longleftrightarrow h(x) \mathrel{\mathsf{u}} h(y)$, $x \preceq^A y \Longleftrightarrow h(x) \preceq h(y)$, $x \mathrel{\mathsf{O}^A} y \Longleftrightarrow h(x) \mathrel{\mathsf{O}} h(y)$ и $x \mathrel{\mathsf{U}^A} y \Longleftrightarrow h(x) \mathrel{\mathsf{U}} h(y)$ за $\forall x, y \in W^A$.

Остава само да докажем че h е инективно изображение.
Нека $x, y \in W^A$ като $x \neq y$. Тогава от (M3) за $\underline{W}^A$ следва че $x \nleq y$ или $y \nleq x$.
Нека например $x \nleq y$.
Тогава по **Твърдение 3.1** получаваме че $(\exists \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F \text{ и } y \notin F)$.
А това е еквивалентно на $(\exists \mathcal{F} \in SFF(W^A))(\exists F \in \mathcal{F})(F \in f_{\mathcal{F}}(x) \text{ и } F \notin f_{\mathcal{F}}(y))$.
Така $\exists \mathcal{F} \in SFF(W^A)$: $f_{\mathcal{F}}(x) \neq f_{\mathcal{F}}(y)$ т.е. $(h(x))_{\mathcal{F}} \neq (h(y))_{\mathcal{F}}$.
Следователно $h(x) \neq h(y)$ т.к. $h(x)$ и $h(y)$ се различават по $\mathcal{F}$-тата координата.
Случаят при който $y \nleq x$ се проверява аналогично.

И с това доказателството че h е изоморфно влагане на $\underline{W}^A$ в $\underline{W}$ е завършено. □

4. Безкванторна предикатна логика за стабилни и нестабилни мереологични релации - PSUMRL

4.1. Синтаксис и семантика.

Езика на логиката се състои от следните символи:

- изброимо много обектни променливи - Obj;
- предикатни символи - $\leq$, o, u, $\preceq$, O, U и $=$;
- логически операции - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$;
- скоби - (и).

Формулите в този език са:

- атомарни формули: $x \ P \ y$, където $x, y \in Obj$, а P е някой от предикатните символи;

- съставни формули: $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ и $(A \leftrightarrow B)$, където A и B са формули.

Семантиката на тази предикатна логика ще дефинираме чрез стандартни мереологични структури със стабилни и нестабилни релации.

Нека $\underline{W} \in \Sigma_{\mathrm{std}}$, като W е носителя на $\underline{W}$. Оценки над $\underline{W}$ ще дефинираме, като всяка обектна променлива оценим с елемент от носителя на $\underline{W}$. Т.е. всяка оценка v е изображение от Obj в W.

Верността на формули при оценка v ще дефинираме, като индуктивно разширим дефиницията за оценки на обектни променливи.
Нека A е формула. Ще използваме следния запис
$v(A) = 1$, когато формулата е вярна в $\underline{W}$ при оценка v и
$v(A) = 0$, когато формулата не е вярна в $\underline{W}$ при оценка v.

Интерпретацията на всеки един от предикатните символи ще съвпада със съответната релация, която се означава по същия начин, като предикатния символ. Така за всяка атомарна формула $x\ P\ y$ имаме че тя е вярна в W при оценка v, когато в $\underline{W}$ е изпълнено че $v(x)\ P\ v(y)$ е в сила за релацията P.

Верността на съставните формули определяме по стандартния начин:

- $v(\neg A) = 1 \Longleftrightarrow v(A) = 0$;
- $v(A \wedge B) = 1 \Longleftrightarrow v(A) = 1$ и $v(B) = 1$;
- $v(A \vee B) = 1 \Longleftrightarrow v(A) = 1$ или $v(B) = 1$;
- за определянето на верността на $A \rightarrow B$ или $A \leftrightarrow B$ ще използваме еквивалентните им формули $\neg A \vee B$ и $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

4.2. **Аксиоми на логиката.**

За аксиоми на PSUMRL ще използваме:

I. Аксиоми на съждителното смятане
II. Всяко едно от правилата (M1) $\div$ (M30), разгледано като формула, както и аксиома за обратната посока на антисиметричността на $\leq$:

(M=) $$x = y \rightarrow (x \leq y \wedge y \leq x)$$

Като правило за извод ще използваме *Modus Ponens*: $\frac{A \rightarrow B, A}{B}$.

Понятията *формален извод*, *доказателство*, *теорема*, *теория* и *максимална теория* ще дефинираме по стандартния начин.

4.3. **Канонични модели и теорема за пълнота.**

Канонични модели ще строим по дадена максимална теория на PSUMRL. Нека например Γ е една такава максимална теория.

За да дефинираме носителя на модела ще използваме релация на еквивалентност $\equiv$, която се определя така

Дефиниция 7. *Нека x и y са обектни променливи. Тогава $x \equiv y \Longleftrightarrow x = y \in \Gamma$. Проверката че $\equiv$ е релация на еквивалентност е тривиална.*

$C\,|x|$ (или $|x|_{\equiv}$) ще означаваме класа на еквивалентност на x (за $x \in Obj$) относно релацията $\equiv$.

Така каноничната структура $\underline{W}^C = (W^C, \leq^C, \mathsf{o}^C, \mathsf{u}^C, \preceq^C, \mathsf{O}^C, \mathsf{U}^C)$ дефинираме по следния начин:

$$W^C = \{\ |x|_\equiv \mid x \in Obj\ \}$$
$$|x| \leq^C |y| \iff (x \leq y \in \Gamma)$$
$$|x|\ \mathsf{o}^C\ |y| \iff (x\ \mathsf{o}\ y \in \Gamma)$$
$$|x|\ \mathsf{u}^C\ |y| \iff (x\ \mathsf{u}\ y \in \Gamma)$$
$$|x| \preceq^C |y| \iff (x \preceq y \in \Gamma)$$
$$|x|\ \mathsf{O}^C\ |y| \iff (x\ \mathsf{O}\ y \in \Gamma)$$
$$|x|\ \mathsf{U}^C\ |y| \iff (x\ \mathsf{U}\ y \in \Gamma)$$

За да покажем коректност на дефиницията ще докажем че при определянето на релациите няма значение кои елементи на $|x|$ и $|y|$ избираме.
Нека P^C е някоя от релациите. Нека $|x|, |y| \in W^C$ и $x' \in |x|$ и $y' \in |y|$. Ще покажем че $|x|\ P^C\ |y| \iff x'\ P\ y' \in \Gamma$.
По дефиниция на релациите $|x|\ P^C\ |y| \iff x\ P\ y \in \Gamma$.
$x' \in |x| \implies x' \equiv x \implies x' = x \in \Gamma$. Аналогично и $y' = y \in \Gamma$.
Т.к. (M=) е аксиома то и следните нейни частни случаи принадлежат на Γ:

$$x' = x \to (x' \leq x \wedge x \leq x') \in \Gamma \text{ и } y' = y \to (y' \leq y \wedge y \leq y') \in \Gamma$$

Така получаваме че $x' \leq x \wedge x \leq x' \in \Gamma$ и $y' \leq y \wedge y \leq y' \in \Gamma$, а от там и $x' \leq x \in \Gamma$, $x \leq x' \in \Gamma$, $y' \leq y \in \Gamma$ и $y \leq y' \in \Gamma$.
Нека например P е $\leq$. Тогава следните частни случаи на аксиомата (M3) принадлежат на Γ:

$$(x' \leq x \wedge x \leq y) \to x' \leq y \text{ и } (x' \leq y \wedge y \leq y') \to x' \leq y'$$

Чрез тях получаваме че ако $x \leq y \in \Gamma$, то и $x' \leq y' \in \Gamma$. За обратното следване използваме частните случаи:

$$(x \leq x' \wedge x' \leq y') \to x \leq y' \text{ и } (x \leq y' \wedge y' \leq y) \to x \leq y$$

Така получава ме че $x \leq y \in \Gamma \iff x' \leq y' \in \Gamma$, а следователно и $|x| \leq^C |y| \iff x' \leq y' \in \Gamma$. За да докажем че $|x| \preceq^C |y| \iff x' \preceq y' \in \Gamma$ ще използваме частни случаи съответно на аксиоми (M15) и (M16), а за релациите o^C, u^C, O^C и U^C съответно на (M19), (M25), (M6) и (M10).

За да допълним модела $(\underline{W}^C, v^C)$, оценката v^C дефинираме така:

$$v^C(x) = |x| \text{ за } \forall x \in Obj$$

Вече можем да докажем следната

Лема 4.1 (Лема за истинност). *$v^C(A) = 1 \iff A \in \Gamma$ за всяка формула A.*

Доказателство.
Доказателството ще проведем по индукция по построението на A.

- A е атомарна.
  Ако A е $x = y$ тогава $v^C(x = y) = 1 \iff v^C(x) = v^C(y) \iff |x| = |y| \iff x \equiv y \iff x = y \in \Gamma$.
  Ако A е $x\ P\ y$, където P е някоя от релациите $\leq$, o, u, $\preceq$, O или U, тогава по дефиниция $v^C(x\ P\ y) = 1 \iff v^C(x)\ P^C\ v^C(y) \iff |x|\ P^C\ |y| \iff x\ P\ y \in \Gamma$.

За съставните формули е достатъчно да докажем лемата само за тези образувани чрез $\neg$ и $\wedge$.

- A е от вида $\neg B$, като за B лемата е в сила.
  Тогава $v^C(\neg B) = 1 \Longleftrightarrow v^C(B) = 0 \xLeftrightarrow{\text{по индукционното предположение}} B \notin \Gamma \xLeftrightarrow{\text{т.к. } \Gamma \text{ е максимална теория}} \neg B \in \Gamma$.
- A е от вида $B \wedge C$, като за B и C лемата е в сила.
  $v^C(B \wedge C) = 1 \Longleftrightarrow v^C(B) = 1$ и $v^C(C) = 1 \xLeftrightarrow{\text{по индукционното предположение}}$ $B \in \Gamma$ и $C \in \Gamma \xLeftrightarrow{\text{т.к. } \Gamma \text{ е максимална теория}} B \wedge C \in \Gamma$.

□

Следствие 4.1.
Структурата $\underline{W}^C$ от каноничния модел е абстрактна структура.

Доказателство. Това ще докажем като покажем че $\underline{W}^C$ изпълнява всяко едно от условията (M1) ÷ (M30). Например ще докажем че $\underline{W}^C$ изпълнява (M1). Удовлетворението на останали условия се показва аналогично.
Нека допуснем че (M1) не е вярно за $\underline{W}^C$.
Тогава $\exists |x| \in W^C$ такова че $|x| \not\leq^C |x|$.
Нека разгледаме съответната на (M1) аксиома $x \leq x$. Така излиза че $|x|$ е свидетел че $v^C(x \leq x) = 0$. Следователно по Лемата за истинност получаваме че $x \leq x \notin \Gamma$, но това е невъзможно т.к. $x \leq x$ е аксиома.
Следователно допускането е погрешно и $\underline{W}^C$ изпълнява (M1). □

Теорема 4.1 (Теорема за пълнота на PSUMRL)**.** *Следните твърдения са еквивалентни за всяла формула A:*

(1) *A е теорема на PSUMRL*
(2) *A е вярна във всяка стандартна структура*

Доказателство.

((1) $\Longrightarrow$ (2)) Аксиомите на съждителното смятане са верни във всички стандартни структури и Modus Ponens запазва верността.
А от **Твърдение 2.2** имаме че аксиомите, съответстващи на условията (M1) ÷ (M30), също са вярни във всяка $\underline{W} \in \Sigma_{\text{std}}$.
Това подсигурява коректността на аксиоматиката спрямо класа на стандартните структури, а така и посоката от (1) към (2).

((2) $\Longrightarrow$ (1)) Нека A е вярна във всяка $\underline{W} \in \Sigma_{\text{std}}$ и нека допуснем че A не е теорема.
Тогава съществува максимална теория Γ, такава че $A \notin \Gamma$.
Нека $(\underline{W}^C, v^C)$ е каноничния модел за Γ.
Тогава по Лемата за истинност получаваме че $v^C(A) = 0$.
От **Следствие 4.1** знаем че $\underline{W}^C$ е абстрактна структура, а от **Теорема 3.1** имаме че съществува $\underline{W} \in \Sigma_{\text{std}}$ и изоморфно влагане h на $\underline{W}^C$ в $\underline{W}$.
Нека v е оценка в $\underline{W}$, такава че $v(x) = h(v^C(x))$ за $\forall x \in Obj$.
Тогава т.к. h е изоморфно влагане на $\underline{W}^C$ в $\underline{W}$ получаваме че $v(A) = 0$.
Но така получаваме че A не е вярна в $\underline{W}$, което е в противоречие с това че A е вярна във всяка стандартна структура.
Следователно допускането е погрешно и A е теорема.

□

4.4. **Разрешимост на PSUMRL.**

Разрешимостта на PSUMRL ще осигурим като докажем че логиката притежава силното свойство на крайните модели. За целта по даден произволен модел и дадена произволна формула ще построим краен подмодел, който запазва верността на формулата.

Така нека $(\underline{W}, v)$ е модел, а A е формула от езика.

Означение. *$CVar(A)$ ще означаваме множеството от всички обектни променливи, които участват в A.*

Нека $\underline{W'}$ е подструктурата на $\underline{W}$ определена от оценките на елементите на $Var(A)$ чрез v. Т.е. ако W' е носителя на $\underline{W'}$ то $W' = \{\ v(x) \mid x \in Var(A)\ \}$. Т.к $Var(A) \neq \emptyset$ за всяка формула A, то и $W' \neq \emptyset$.

Нека α е някой фиксиран елемент от W'. Тогава оценката v' в $\underline{W'}$ ще определим така:

$$v'(x) = \begin{cases} v(x) & \text{ако } x \in Var(A) \\ \alpha & \text{ако } x \in Obj \setminus Var(A) \end{cases}$$

Начинът по който фиксираме/избираме α не е от значение т.к. в доказателствата ще ни трябват само оценките на променливите от $Var(A)$.

Така ще казваме че $(\underline{W'}, v')$ е подмодел на $(\underline{W}, v)$ породен от A.

Лема 4.2 (Лема за запазване на истинността)**.** $v(A) = 1 \Longleftrightarrow v'(A) = 1$.

Доказателство.
Доказателството ще проведем по индукция по построението на A.

- A е атомарна. Това означава че A е от вида $x\ P\ y$ и следователно $Var(A) = \{x, y\}$. Тогава $v(x) = v'(x)$ и $v(y) = v'(y)$.
  Ако A е $x = y$ тогава $v(x = y) = 1 \Longleftrightarrow v(x) = v(y) \Longleftrightarrow v'(x) = v'(y) \Longleftrightarrow v'(x = y) = 1$.
  Ако A е $x\ P\ y$, където P е някоя от релациите $\leq$, o, u, $\preceq$, O или U, тогава $v(x\ P\ y) = 1 \Longleftrightarrow v(x)\ P\ v(y) \Longleftrightarrow v'(x)\ P\ v'(y) \xLeftrightarrow{\text{т.к. } \underline{W'} \text{ е подструктура на } \underline{W}} v'(x)\ P'\ v'(y) \Longleftrightarrow v'(x\ P\ y) = 1$.

За съставните формули е достатъчно да докажем лемата само за тези образувани чрез $\neg$ и $\wedge$.

- A е от вида $\neg B$, като за B лемата е в сила.
  Тогава $v(\neg B) = 1 \Longleftrightarrow v(B) = 0 \xLeftrightarrow{\text{по индукционното предположение}} v'(B) = 0 \Longleftrightarrow v'(\neg B) = 1$.
- A е от вида $B \wedge C$, като за B и C лемата е в сила.
  $v(B \wedge C) = 1 \Longleftrightarrow v(B) = 1$ и $v(C) = 1 \xLeftrightarrow{\text{по индукционното предположение}} v'(B) = 1$ и $v'(C) = 1 \Longleftrightarrow v'(B \wedge C) = 1$.

$\square$

Сега вече можем да докажем следната теорема, която ни гарантира че PSUMRL притежава силното свойство на крайните модели.

Теорема 4.2. *Нека A е формула, като $|Var(A)| = n$. Следователно A не е теорема, тогава и само тогава, когато съществува модел $(\underline{W}, v)$ с носител W, такива че $|W| = n$ и $v(A) = 0$.*

Доказателство.

($\Longrightarrow$) Нека A не е теорема. Тогава от Теоремата за пълнота на PSUMRL съществува модел $(\underline{W'}, v')$ в който $v'(A) = 0$.
Нека $(\underline{W}, v)$ е подмодела на $(\underline{W'}, v')$ породен от A. Тогава имаме че ако носителя на $\underline{W}$ е W, то $|W| = |Var(A)| = n$. А от Лемата за запазване на истинността имаме че $v(A) = 0$.

($\Longleftarrow$) Нека $(\underline{W}, v)$ е модел с носител W, такъв че $|W| = n$ и $v(A) = 0$.
Понеже $\underline{W} \in \Sigma_{\text{std}}$, тогава имаме че A не е вярна във всички стандартни структури и тогава от Теоремата за пълнота на PSUMRL получаваме че A не е теорема.

$\square$

5. Модална логика за стабилни и нестабилни мереологични релации - MSUMRL

Синтаксиса и семантиката на логиката ще дефинираме по класическия начин за структурите от класовете Σ_{std} и Σ_{abst}. Също така ще въведем и още един клас структури, които са подобни на абстрактните, но удовлетворяват по-слаби условия и така са по-лесни за аксиоматизиране.

Ще имаме по една модалност за всяка от шестте стабилни и нестабилни релации. Освен това ще използваме и модалност относно универсалната двуместна релация над носителите на структурите, която ще бележим с W^2, както и модалности за симетричните на $\leq$ и $\preceq$ релации - $\geq$ и $\succeq$.

5.1. **Синтаксис и семантика.**

Езика на логиката се състои от следните символи:

- изброимо много съждителни променливи - Var;
- логически операции - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$;
- модални оператори - $[\leq]$, $\langle\leq\rangle$, $[\geq]$, $\langle\geq\rangle$, $[\mathsf{o}]$, $\langle\mathsf{o}\rangle$, $[\mathsf{u}]$, $\langle\mathsf{u}\rangle$, $[\preceq]$, $\langle\preceq\rangle$, $[\succeq]$, $\langle\succeq\rangle$, $[\mathsf{O}]$, $\langle\mathsf{O}\rangle$, $[\mathsf{U}]$, $\langle\mathsf{U}\rangle$, $[\mathsf{W}^2]$ и $\langle\mathsf{W}^2\rangle$;
- скоби - (и).

Формулите в този език са както следва:

- атомарни формули: p, където $p \in Var$;
- съставни формули: $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ и $[R]A$, където A и B са формули, а R е някоя от модалностите;
- съкратени формули: $\langle R\rangle A$ е съкращение за $\neg[R]\neg A$, където A е формула, а R е някоя от модалностите.

Ще използваме стандартната Крипке семантика, приложена върху структури със стабилни и нестабилни релации.

Нека $\underline{W} \in \Sigma$ (където Σ е някой от класовете Σ_{std} или Σ_{abst}), като W е носителя на $\underline{W}$. Оценки в $\underline{W}$ ще дефинираме, като определим стойността на всяка съждителна променлива $p \in Var$ за $\forall x \in W$.

Така за оценка v ще пишем съответно:
$v(x,p) = 1$, когато стойността на променливата p в x е *истина* и
$v(x,p) = 0$, когато стойността на p в x е *лъжа.*

Верността на формули при оценка v ще дефинираме, като индуктивно разширим дефиницията за оценки на съждителни променливи. Нека A е формула. Отново ще пишем
$v(x,A) = 1$, когато формулата е вярна в x и
$v(x,A) = 0$, когато формулата не е вярна в x.
И така верността на формулата A се определя по следния начин:

- ако A е атомарна формула, т.е. $A = p$ за някоя съждителна променлива p, тогава $v(x,A) = v(x,p)$;
- ако $A = \neg B$, тогава $v(x,A) = 1 \Longleftrightarrow v(x,B) = 0$;
- ако $A = B \wedge C$, тогава $v(x,A) = 1 \Longleftrightarrow v(x,B) = 1$ и $v(x,C) = 1$;
- ако $A = B \vee C$, тогава $v(x,A) = 1 \Longleftrightarrow v(x,B) = 1$ или $v(x,C) = 1$;
- за определянето на верността на A при $A = B \rightarrow C$ или $A = B \leftrightarrow C$ ще използваме еквивалентните им формули $\neg B \vee C$ и $(B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B)$;

- ако $A = [R]B$, тогава:

$$v(x, A) = 1 \iff (\forall y \in W)(xRy \Longrightarrow v(x, B) = 1),$$

$$\text{и съответно } v(x, A) = 0 \iff (\exists y \in W)(xRy \text{ и } v(x, B) = 0).$$

Така семантиката на MSUMRL дефинирана чрез стандартните структури от Σ_{std} ще наричаме *стандартна семантика*, а тази дефинирана чрез структурите от Σ_{abst} - *абстрактна семантика*.

5.2. **Еквивалентност на стандартната и абстрактната семантики на MSUMRL.**

За да се убедим че стандартната и абстрактната семантики пораждат една и съща модална логика трябва да докажем че $\mathcal{L}(\Sigma_{\text{std}}) = \mathcal{L}(\Sigma_{\text{abst}})$.

Теорема 5.1. $\mathcal{L}(\Sigma_{std}) = \mathcal{L}(\Sigma_{abst})$

Доказателство. В **Твърдение 2.2** показахме, че $\Sigma_{\text{std}} \subseteq \Sigma_{\text{abst}}$. Следователно $\mathcal{L}(\Sigma_{\text{abst}}) \subseteq \mathcal{L}(\Sigma_{\text{std}})$.

Нека да допуснем че обратното включване не е изпълнено. Следователно има формула A, такава че:

$$A \in \mathcal{L}(\Sigma_{\text{std}}) \text{ , но } A \notin \mathcal{L}(\Sigma_{\text{abst}}).$$

Това означава че има структура $\underline{W} \in \Sigma_{\text{abst}}$, в която A не е вярна. Т.е. има оценка v в $\underline{W}$ и обект x от носителя на $\underline{W}$, така че:

$$v(x, A) = 0.$$

От **Следствие 3.1** имаме че съществува $\underline{W}' \in \Sigma_{\text{std}}$, която е изоморфна на $\underline{W}$ чрез изображението h. Тогава ако дефинираме оценката v' в $\underline{W}'$ такава че

$$v'(h(y), p) = 1 \iff v(y, p) = 1$$

за всяка съждителна променлива p и за всеки елемент y от носителя на $\underline{W}$, ще получим че:

$$v'(h(x), A) = 0.$$

Но така получаваме че $A \notin \mathcal{L}(\Sigma_{\text{std}})$, което е противоречие с допускането. Следователно $\mathcal{L}(\Sigma_{\text{std}}) \subseteq \mathcal{L}(\Sigma_{\text{abst}})$, а така и $\mathcal{L}(\Sigma_{\text{std}}) = \mathcal{L}(\Sigma_{\text{abst}})$. □

5.3. **Нестандартна семантика за MSUMRL и еквивалентност с абстрактната ѝ семантика.**

Структурите описани в **Дефиниция 4** са по-удобни при изграждането на аксиоматики на логики. Например при аксиоматизирането на модални логики всички условия, без (M3), са модално определими. За да компенсираме неопределимостта на (M3), можем да се откажем от това условие и да го заменим с подходящи негови (и на останалите условия) следствия, които да са достатъчни за да получим нов клас от структури, с еквивалентна семантика за MSUMRL.

Твърдение 5.1. *Нека $\underline{W}$ е абстрактна структура. Тогава за нея са изпълнени следните условия:*

(M3′) $x \,\overline{\mathsf{O}}\, x$ и $y \leq x \Longrightarrow x = y$

(M3″) $x \,\overline{\mathsf{U}}\, x$ и $x \leq y \Longrightarrow x = y$

(M3‴) $z \,\overline{\mathsf{O}}\, x$ и $z \,\overline{\mathsf{U}}\, y$ и $y \leq x \Longrightarrow x = y$

Доказателство.

(M3′): Нека $x\,\overline{\mathsf{O}}\,x$ и $y \leq x$.
$x\,\overline{\mathsf{O}}\,x \xRightarrow{\text{по (M7)}} x \leq y$. $x \leq y$ и $y \leq x \xRightarrow{\text{по (M3)}} x = y$.
(M3″): Доказателството на (M3″) е дуално на това на (M3′).
(M3‴): Нека $z\,\overline{\mathsf{O}}\,x$, $z\,\overline{\mathsf{U}}\,y$ и $y \leq x$. $z\,\overline{\mathsf{O}}\,x \xRightarrow{\text{по (M4)}} x\,\overline{\mathsf{O}}\,z$. $z\,\overline{\mathsf{U}}\,y \xRightarrow{\text{по (M8)}} y\,\overline{\mathsf{U}}\,z$.
$x\,\overline{\mathsf{O}}\,z$ и $y\,\overline{\mathsf{U}}\,z \xRightarrow{\text{по (M12)}} x \leq y$. $x \leq y$ и $y \leq x \Longrightarrow x = y$.

□

Дефиниция 8. *Нека* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *е структура, като* $W \neq \emptyset$, *а* $\leq$, o, u, $\preceq$, O *и* U *са двуместни релации над* W.
Тогава $\underline{W}$ *наричаме* нестандартна мереологична структура със стабилни релации *(или* нестандартна структура *за по-кратко) ако тя удовлетворява условията* (M1), (M2), (M3′) ÷ (M3‴), (M4) ÷ (M30).

Означение. *Класът на всички нестандартни структури ще означаваме с* Σ_{nonstd}.

Така **Твърдение 5.1** ни показва, че всяка абстрактна структура е нестандартна структура, т.к. изпълнява всички условия от **Дефиниция 8**.

От тук нататък под *нестандартна семантика* ще разбираме семантика на MSUMRL, дефинирана също както стандартната и абстрактната ѝ семантики, само че чрез структурите от класа Σ_{nonstd}.

Преди да дадем аксиоматика на модалната логика и да докажем пълнотата ѝ, остава да покажем само че нестандартната ѝ семантика е еквивалентна на абстрактната ѝ семантика. Т.е. $\mathcal{L}(\Sigma_{\mathrm{abst}}) = \mathcal{L}(\Sigma_{\mathrm{nonstd}})$.

Включването $\mathcal{L}(\Sigma_{\mathrm{abst}}) \subseteq \mathcal{L}(\Sigma_{\mathrm{nonstd}})$ ще докажем, като демонстрираме че има копиране, на структурите от Σ_{nonstd} в структури от Σ_{abst}.

Т.е. по дадена структура $\underline{W}$ от Σ_{nonstd}, ще търсим непразно множество I, от изображения от $\underline{W}$ в $\underline{W}'$ (като $\underline{W}' \in \Sigma_{\mathrm{abst}}$), за което да са изпълнени следните условия:

(I1) $(\forall x' \in W')(\exists x \in W)(\exists f \in I)(f(x) = x')$

(I2) $(\forall x, y \in W)(\forall f, g \in I)(f(x) = g(y) \Longrightarrow x = y)$

(R1) Следните твърдения са изпълнени за $\forall x \in W, \forall y' \in W', \forall f \in I$:

$f(x) \leq' y' \Longrightarrow (\exists y \in W)(\exists g \in I)(g(y) = y'$ и $x \leq y)$

$f(x)\ \mathsf{o}'\ y' \Longrightarrow (\exists y \in W)(\exists g \in I)(g(y) = y'$ и $x\ \mathsf{o}\ y)$

$f(x)\ \mathsf{u}'\ y' \Longrightarrow (\exists y \in W)(\exists g \in I)(g(y) = y'$ и $x\ \mathsf{u}\ y)$

$f(x) \preceq' y' \Longrightarrow (\exists y \in W)(\exists g \in I)(g(y) = y'$ и $x \preceq y)$

$f(x)\ \mathsf{O}'\ y' \Longrightarrow (\exists y \in W)(\exists g \in I)(g(y) = y'$ и $x\ \mathsf{O}\ y)$

$f(x)\ \mathsf{U}'\ y' \Longrightarrow (\exists y \in W)(\exists g \in I)(g(y) = y'$ и $x\ \mathsf{U}\ y)$

(R2) Следните твърдения са изпълнени за $\forall x, y \in W, \forall f \in I$:

$x \leq y \Longrightarrow (\exists g \in I)(f(x) \leq' g(y))$

$x\ \mathsf{o}\ y \Longrightarrow (\exists g \in I)(f(x)\ \mathsf{o}'\ g(y))$

$x\ \mathsf{u}\ y \Longrightarrow (\exists g \in I)(f(x)\ \mathsf{u}'\ g(y))$

$x \preceq y \Longrightarrow (\exists g \in I)(f(x) \preceq' g(y))$

$x\ \mathsf{O}\ y \Longrightarrow (\exists g \in I)(f(x)\ \mathsf{O}'\ g(y))$

$x\ \mathsf{U}\ y \Longrightarrow (\exists g \in I)(f(x)\ \mathsf{U}'\ g(y))$

(където $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$, а $\underline{W}' = (W', \leq', \mathsf{o}', \mathsf{u}', \preceq', \mathsf{O}', \mathsf{U}'))$

За да конструираме изображенията от I ще си помогнем със следните

Дефиниция 9. *Нека $\underline{W} \in \Sigma_{nonstd}$, като $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$. Нека $\equiv$ е двуместна релация над W, такава че за $\forall x, y \in W$:*

$$x \equiv y \Longleftrightarrow x \leq y \text{ и } y \leq x$$

Лесно се вижда че $\equiv$ е релация на еквивалентност.

С $|x|$ (или $|x|_{\equiv}$) ще означаваме класа на еквивалентност на x (за $x \in W$) относно релацията $\equiv$. Ще казваме че $|x|$ е изроден ако той е синглетон, т.е.:

$$|x| \text{ е изроден } \Longleftrightarrow |x| = \{x\}$$

Лема 5.1. *Нека $\underline{W} \in \Sigma_{nonstd}$ и $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$. Тогава следните твърдения са вярни за $\forall x, y, z \in W$:*

1) $x \overline{\mathsf{O}}\, x \Longrightarrow |x|$ *е изроден*
2) $x \overline{\mathsf{U}}\, x \Longrightarrow |x|$ *е изроден*
3) $x \overline{\mathsf{O}}\, z$ *и* $x \overline{\mathsf{U}}\, z \Longrightarrow |x|$ *е изроден*

Доказателство.

1) Нека $x \overline{\mathsf{O}}\, x$ и $y \in |x|$. Тогава $y \equiv x$ и следователно $y \leq x$. Тогава по условие (M3$'$) имаме че $x = y$. Така $|x|$ е синглетон, т.е. $|x|$ е изроден.
2) Нека $x \overline{\mathsf{U}}\, x$ и $y \in |x|$. Тогава $x \equiv y$ и следователно $x \leq y$. Тогава по (M3$''$) имаме че $x = y$. Следователно $|x|$ е изроден.
3) Нека $x \overline{\mathsf{O}}\, z$, $x \overline{\mathsf{U}}\, z$ и $y \in |x|$. Тогава $x \equiv y$ и следователно $x \leq y$. Чрез контрапозиция на (M10) виждаме че т.к. $x \overline{\mathsf{U}}\, z$ и $x \leq y$ то тогава $y \overline{\mathsf{U}}\, z$. Т.к. $x \overline{\mathsf{O}}\, z$ и $y \overline{\mathsf{U}}\, z$, то от симетричността на O и U ((M4) и (M8)), получаваме че $z \overline{\mathsf{O}}\, x$ и $z \overline{\mathsf{U}}\, y$.
   Така имаме $z \overline{\mathsf{O}}\, x$, $z \overline{\mathsf{U}}\, y$ и $y \leq x$ (т.к. $x \equiv y$) и от (M3$'''$) получаваме че $x = y$. Следователно $|x|$ е изроден.

□

Твърдение 5.2. *Нека $\underline{W} \in \Sigma_{nonstd}$. Тогава съществува $\underline{W}' \in \Sigma_{abst}$ и копиране I от $\underline{W}$ в $\underline{W}'$.*

Доказателство. Нека $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$, а $\ll$ е добра наредба на W. Абстрактната структура $\underline{W}'$ ще построим чрез изброимо много изображения. За удобство, изображенията ще означаваме с естествените числа.

Така нека $I = \mathbb{N}$ и нека ω е такова че $\omega \notin I$. Тогава изображенията ще дефинираме така:

$$f(x) = \begin{cases} (x, \omega) & \text{, ако } |x| \text{ е изроден} \\ (x, f) & \text{, в противен случай} \end{cases}$$

за $\forall f \in I$ и за $\forall x \in W$.

Тогава с $\underline{W}'$ ще означим структурата $(W', \leq', \mathsf{o}', \mathsf{u}', \preceq', \mathsf{O}', \mathsf{U}')$, където:

$$W' = \{\ f(x) \mid f \in I, x \in W\ \}$$

като релацията $\leq'$ се дефинира за $\forall f, g \in I, \forall x, y \in W$ така:

- ако $x \not\equiv y$ или $|x|$ е изроден или $|y|$ е изроден, то: $f(x) \leq' g(y) \Longleftrightarrow x \leq y$;
- в противен случай: $f(x) \leq' g(y) \Longleftrightarrow f < g$ или ($f = g$ и $x \ll y$).

а релациите o', u', $\preceq'$, O' и U' са дефинирани така:

$$f(x)\ \mathsf{o}'\ g(y) \iff x\ \mathsf{o}\ y \qquad \text{за } \forall f,g \in I, \forall x,y \in W$$
$$f(x)\ \mathsf{u}'\ g(y) \iff x\ \mathsf{u}\ y \qquad \text{за } \forall f,g \in I, \forall x,y \in W$$
$$f(x) \preceq' g(y) \iff x \preceq y \qquad \text{за } \forall f,g \in I, \forall x,y \in W$$
$$f(x)\ \mathsf{O}'\ g(y) \iff x\ \mathsf{O}\ y \qquad \text{за } \forall f,g \in I, \forall x,y \in W$$
$$f(x)\ \mathsf{U}'\ g(y) \iff x\ \mathsf{U}\ y \qquad \text{за } \forall f,g \in I, \forall x,y \in W$$

Сега ще покажем че I отговаря на условията (I1), (I2), (R1) и (R2), т.е. че I е копиране.

(I1): Нека $x' \in W'$. Тогава тривиално по дефиницията на W' имаме че $\exists x \in W, \exists f \in I : f(x) = x'$.

(I2): Нека $x, y \in W$, $f, g \in I$ и $f(x) = g(y)$.
Ако $|x|$ е изроден и $|y|$ е изроден, тогава имаме че $(x, \omega) = f(x) = g(y) = (y, \omega)$ и следователно $x = y$;
ако $|x|$ не е изроден и $|y|$ не е изроден, имаме че $(x, f) = f(x) = g(y) = (y, g)$ и следователно $x = y$ (а също и $f = g$);
другите два случая, при които единия от класовете е изроден, а другия не е, не са възможни, т.к. тогава няма да имаме равенството $f(x) = g(y)$.
Така във всички възможни случаи получаваме $x = y$.

(R1): Нека $x \in W$, $y' \in W'$ и $f \in I$.
Ако $f(x) \le' y'$, то тогава по (I1) има $y \in W$ и $g \in I : g(y) = y'$.
- ако $x \not\equiv y$ или $|x|$ е изроден или $|y|$ е изроден, то $x \le y$ по дефиницията на $\le'$;
- в противен случай имаме че $x \equiv y$ и следователно $x \le y$.

Така и в двата случая получихме: $(\exists g \in I)(g(y) = y'$ и $x \le y)$.
Ако $f(x)\ \mathsf{o}'\ y'$, то тогава по (I1) има $y \in W$ и $g \in I$, такива че $g(y) = y'$, а по дефиницията на o' имаме че $x \le y$.
Условието (R1) за релациите u', $\preceq'$, O' и U' се показва по същия начин, както за o'.

(R2): Нека $x, y \in W$ и $f \in I$.
Ако $x \le y$:
- ако $x \not\equiv y$ или $|x|$ е изроден или $|y|$ е изроден, то по дефиниция $f(x) \le' g(y)$ за произволно $g \in I$;
- в противен случай по дефиниция имаме че $f(x) \le' g(y)$ за произволно $g > f$ (например $g = f + 1$).

Ако $x\ \mathsf{o}\ y$ (или аналогично $x\ \mathsf{u}\ y$, $x \preceq y$, $x\ \mathsf{O}\ y$ или $x\ \mathsf{U}\ y$) тогава $f(x)\ \mathsf{o}'\ g(y)$ за произволно $g \in I$ (съответно $f(x)\ \mathsf{u}'\ g(y)$, $f(x) \preceq' g(y)$, $f(x)\ \mathsf{O}'\ g(y)$ или $f(x)\ \mathsf{U}'\ g(y)$ за произволно $g \in I$).

Остава да докажем че получената структура $\underline{W'}$ наистина е абстрактна структура. Това ще направим като покажем че $\underline{W'}$ удовлетворява аксиомите (M1) $\div$ (M30):

(M1): Нека $x' \in W'$. Тогава по (I1) има $x \in W$ и $f \in I : f(x) = x'$.
- ако $|x|$ е изроден, то т.к. $x \le x$ тогава $f(x) \le' f(x)$ (т.е. $x' \le' x'$);
- в противен случай т.к. $x \equiv x$ и $x \ll x$ и $f = f$ имаме че $f(x) \le' f(x)$ (т.е. $x' \le' x'$).

(M2): Нека $x', y', z' \in W'$, като $x' \le' y'$ и $y' \le' z'$.
По (I1) има $x \in W$ и $f \in I : f(x) = x'$. По (R1) има $y \in W$ и $g \in I$:

$g(y) = y'$ и $x \leq y$. Също по (R1) има $z \in W$ и $h \in I : h(z) = z'$ и $y \leq z$. Така по (M2) за структурата $\underline{W}$ имаме че $x \leq z$.

- ако $x \not\equiv z$ или $|x|$ е изроден или $|z|$ е изроден, тогава $f(x) \leq' h(z)$, т.е. $x' \leq' z'$;
- в противен случай имаме че $x \equiv z$ (следователно и $x \equiv y \equiv z$), а от дефиницията на $\leq'$ следва че $f \leq g \leq h$.
  Ако $f < h$, тогава $f(x) \leq' h(z)$ (т.е. $x' \leq' z'$). А ако $f = g = h$, то отново по дефиницията на $\leq'$ виждаме че $x \ll y$ и $y \ll z$. Тогава $x \ll z$ и по дефиниция $f(x) \leq' h(z)$.

(M3): Нека $x', y' \in W'$, като $x' \leq' y'$ и $y' \leq' x'$. Съществуват $x, y \in W$ и $f, g \in I : f(x) = x'$ и $g(y) = y'$.
Ако $x \not\leq y$ или $y \not\leq x$, тогава ще се получи че $f(x) \not\leq' g(y)$ или $g(y) \not\leq' f(x)$, което ще е противоречие. Следователно $x \equiv y$ (т.е. $|x| = |y|$).

- ако $|x|$ е изроден, тогава $x = y$, а следователно и $x' = f(x) = (x, \omega) = (y, \omega) = g(y) = y'$;
- ако $|x|$ (а и $|y|$) не е изроден, то по дефиницията на $\leq'$ следва че следните твърдения са изпълнени:

$$f < g \text{ или } (f = g \text{ и } x \ll y)$$
$$g < f \text{ или } (g = f \text{ и } y \ll x)$$

  Ако $f < g$ или $g < f$, то няма как да са изпълнени и двете. Следователно имаме че $f = g$ и $x \ll y$ и $y \ll x$. Тогава $x = y$ и като резултат се получава $x' = f(x) = (x, f) = (y, g) = g(y) = y'$.

(M4): $x' \mathsf{O}' y' \xrightarrow{\text{по (I1)}} \exists x, y \in W, \exists f, g \in I : x' = f(x)$ и $y' = g(y)$.
Така $f(x) \mathsf{O}' g(y) \Longrightarrow x \mathsf{O} y \xrightarrow{\text{по (M4) за } \underline{W}} y \mathsf{O} x \Longrightarrow g(y) \mathsf{O}' f(x) \Longrightarrow y' \mathsf{O}' x'$.

(M5): $x' \mathsf{O}' y' \Longrightarrow \exists x, y \in W, \exists f, g \in I : x' = f(x)$ и $y' = g(y)$.
Така $f(x) \mathsf{O}' g(y) \Longrightarrow x \mathsf{O} y \xrightarrow{\text{по (M5) за } \underline{W}} x \mathsf{O} x \Longrightarrow f(x) \mathsf{O}' f(x) \Longrightarrow x' \mathsf{O}' x'$.

(M6): $x' \mathsf{O}' y'$ и $y' \leq' z' \xrightarrow{\text{по (I1) и (R1)}} \exists x, y, z \in W, \exists f, g, h \in I : x' = f(x)$ и $y' = g(y)$ и $z' = h(z)$ и $f(x) \mathsf{O}' g(y)$ и $g(y) \leq' h(z) \Longrightarrow$
$x \mathsf{O} y$ и $y \leq z \xrightarrow{\text{по (M6) за } \underline{W}} x \mathsf{O} z \Longrightarrow f(x) \mathsf{O}' h(z) \Longrightarrow x' \mathsf{O}' z'$

(M7): Ще докажем че $x' \overline{\mathsf{O}'} x' \Longrightarrow x' \leq' y'$.
$x' \overline{\mathsf{O}'} x' \Longrightarrow \exists x, y \in W, \exists f, g \in I : x' = f(x)$ и $f(x) \overline{\mathsf{O}'} f(x)$ и $y' = g(y) \Longrightarrow x \overline{\mathsf{O}} x \xrightarrow{\text{по (M7) за } \underline{W}} x \leq y$. От 1) от **Лема 5.1**, виждаме че т.к. $x \overline{\mathsf{O}} x$ то $|x|$ е изроден. И така от това че $|x|$ е изроден и $x \leq y$ следва че $f(x) \leq' g(y)$. Така $x' \overline{\mathsf{O}'} x' \Longrightarrow x' \leq' y'$ (а тогава и $x' \mathsf{O}' x'$ или $x' \leq' y'$).

(M12): Ще докажем че $x' \overline{\mathsf{O}'} z'$ и $y' \overline{\mathsf{U}'} z' \Longrightarrow x' \leq' y'$.
$x' \overline{\mathsf{O}'} z'$ и $y' \overline{\mathsf{U}'} z' \xrightarrow{\text{по (I1) и (R1)}} \exists x, y, z \in W, \exists f, g, h \in I : x' = f(x)$ и $y' = g(y)$ и $z' = h(z)$ и $f(x) \overline{\mathsf{O}'} g(y)$ и $g(y) \overline{\mathsf{U}'} h(z) \Longrightarrow x \overline{\mathsf{O}} z$ и $y \overline{\mathsf{U}} z$
$\xrightarrow{\text{по (M12) за } \underline{W}} x \leq y$.

- ако $y \leq x$ тогава $x \equiv y$.
  $x \overline{\mathsf{O}} z$ и $y \leq x \xrightarrow{\text{по (M4) и (M6) за } \underline{W}} y \overline{\mathsf{O}} z$.
  Така $y \overline{\mathsf{O}} z$ и $y \overline{\mathsf{U}} z \xrightarrow{\text{по 3) от \textbf{Лема 5.1}}} |y|$ е изроден $\xrightarrow{\text{т.к. } x \leq y} f(x) \leq' g(y) \Longrightarrow x' \leq' y'$;
- ако $y \not\leq x \Longrightarrow x \not\equiv y \xrightarrow{\text{т.к. } x \leq y} f(x) \leq' g(y) \Longrightarrow x' \leq' y'$.

(M13): Нека допуснем че има $x' \in W'$, такова че: $x' \overline{\mathsf{O}'} x'$ и $x' \overline{\mathsf{U}'} x'$. Тогава $x' \overline{\mathsf{O}'} x'$ и $x' \overline{\mathsf{U}'} x' \Longrightarrow \exists x \in W, \exists f \in I : x' = f(x)$ и $f(x) \overline{\mathsf{O}'} f(x)$

и $f(x)\ \overline{\mathsf{U}'}\ f(x) \implies x\ \overline{\mathsf{O}}\ x$ и $x\ \overline{\mathsf{U}}\ x$, което е противоречие с (M13) за $\underline{W}$. Следователно допускането е погрешно и така получаваме че $x'\ \mathsf{O}'\ x'$ или $x'\ \mathsf{U}'\ x'$.

(M14): Нека допуснем че има $x' \in W'$, такова че: $x' \not\preceq' x'$. Тогава $\exists x \in W, \exists f \in I : x' = f(x)$ и $f(x) \not\preceq' f(x)$ и следователно $x \not\preceq x$. Но това е противоречие с (M14) за $\underline{W}$, следователно $x' \preceq' x'$ за $\forall x' \in W'$.

(M15): $x' \leq' y'$ и $y' \preceq' z' \implies \exists x, y, z \in W, \exists f, g, h \in I : x' = f(x)$ и $y' = g(y)$ и $z' = h(z)$ и $f(x) \leq' g(y)$ и $g(y) \preceq' h(z) \implies x \leq y$ и $y \preceq z$ $\xRightarrow{\text{по (M15) за } \underline{W}} x \preceq z \implies f(x) \preceq' h(z) \implies x' \preceq' z'$.

(M16): $x' \preceq' y'$ и $y' \leq' z' \implies \exists x, y, z \in W, \exists f, g, h \in I : x' = f(x)$ и $y' = g(y)$ и $z' = h(z)$ и $f(x) \preceq' g(y)$ и $g(y) \leq' h(z) \implies x \preceq y$ и $y \leq z$ $\xRightarrow{\text{по (M16) за } \underline{W}} x \preceq z \implies f(x) \preceq' h(z) \implies x' \preceq' z'$.

(M17): Нека допуснем че има $x', y' \in W'$, такива че: $x'\ \mathsf{o}'\ y'$ и $y'\ \overline{\mathsf{o}'}\ x'$. Тогава $\exists x, y \in W, \exists f, g \in I : x' = f(x)$ и $y' = g(y)$ и $f(x)\ \mathsf{o}'\ g(y)$ и $g(y)\ \overline{\mathsf{o}'}\ f(x)$ и така $x\ \mathsf{o}\ y$ и $y\ \overline{\mathsf{o}}\ x$, което е противоречие с (M17) за $\underline{W}$. Следователно $x'\ \mathsf{o}'\ y' \implies y'\ \mathsf{o}'\ x'$ за $\forall x', y' \in W'$.

(M18): Нека допуснем че има $x', y' \in W'$, такива че: $x'\ \mathsf{o}'\ y'$ и $x'\ \overline{\mathsf{o}'}\ x'$. Тогава $\exists x, y \in W, \exists f, g \in I : x' = f(x)$ и $y' = g(y)$ и $f(x)\ \mathsf{o}'\ g(y)$ и $f(x)\ \overline{\mathsf{o}'}\ f(x)$ и така $x\ \mathsf{o}\ y$ и $x\ \overline{\mathsf{o}}\ x$, което е противоречие с (M18) за $\underline{W}$. Следователно $x'\ \mathsf{o}'\ y' \implies x'\ \mathsf{o}'\ x'$ за $\forall x', y' \in W'$.

(M19): $x'\ \mathsf{o}'\ y'$ и $y' \leq' z' \implies \exists x, y, z \in W, \exists f, g, h \in I : x' = f(x)$ и $y' = g(y)$ и $z' = h(z)$ и $f(x)\ \mathsf{o}'\ g(y)$ и $g(y) \leq' h(z) \implies x\ \mathsf{o}\ y$ и $y \leq z$ $\xRightarrow{\text{по (M19) за } \underline{W}} x\ \mathsf{o}\ z \implies f(x)\ \mathsf{o}'\ h(z) \implies x'\ \mathsf{o}'\ z'$.

(M20): $x'\ \mathsf{o}'\ y'$ и $y' \preceq' z' \implies \exists x, y, z \in W, \exists f, g, h \in I : x' = f(x)$ и $y' = g(y)$ и $z' = h(z)$ и $f(x)\ \mathsf{o}'\ g(y)$ и $g(y) \preceq' h(z) \implies x\ \mathsf{o}\ y$ и $y \preceq z$ $\xRightarrow{\text{по (M20) за } \underline{W}} x\ \mathsf{O}\ z \implies f(x)\ \mathsf{O}'\ h(z) \implies x'\ \mathsf{O}'\ z'$.

(M21): Нека допуснем че има $x', y' \in W'$, такива че: $x'\ \overline{\mathsf{o}'}\ x'$ и $x' \not\preceq' y'$. Тогава $\exists x, y \in W, \exists f, g \in I : x' = f(x)$ и $y' = g(y)$ и $f(x)\ \overline{\mathsf{o}'}\ f(x)$ и $f(x) \not\preceq' g(y)$ и така $x\ \overline{\mathsf{o}}\ x$ и $x \not\preceq y$, което е противоречие с (M21) за $\underline{W}$. Следователно $x'\ \mathsf{o}'\ x'$ или $x' \preceq' y'$ за $\forall x', y' \in W'$.

(M22): Ще докажем че $x'\ \overline{\mathsf{o}'}\ z'$ и $y'\ \overline{\mathsf{U}'}\ z' \implies x' \preceq' y'$.
$x'\ \overline{\mathsf{o}'}\ z'$ и $y'\ \overline{\mathsf{U}'}\ z' \implies \exists x, y, z \in W, \exists f, g, h \in I : x' = f(x)$ и $y' = g(y)$ и $z' = h(z)$ и $f(x)\ \overline{\mathsf{o}'}\ h(z)$ и $g(y)\ \overline{\mathsf{U}'}\ h(z) \implies x\ \overline{\mathsf{o}}\ z$ и $y\ \overline{\mathsf{U}}\ z$ $\xRightarrow{\text{по (M22) за } \underline{W}} x \preceq y \implies f(x) \preceq' g(y) \implies x' \preceq' y'$.

(M29): Нека допуснем че има $x' \in W'$, такова че: $x'\ \overline{\mathsf{o}'}\ x'$ и $x'\ \overline{\mathsf{U}'}\ x'$. Тогава $x'\ \overline{\mathsf{o}'}\ x'$ и $x'\ \overline{\mathsf{U}'}\ x' \implies \exists x \in W, \exists f \in I : x' = f(x)$ и $f(x)\ \overline{\mathsf{o}'}\ f(x)$ и $f(x)\ \overline{\mathsf{U}'}\ f(x) \implies x\ \overline{\mathsf{o}}\ x$ и $x\ \overline{\mathsf{U}}\ x$, което е противоречие с (M29) за $\underline{W}$. Следователно допускането е погрешно и така получаваме че $x'\ \mathsf{o}'\ x'$ или $x'\ \mathsf{U}'\ x'$.

Верността на (M8), (M9), (M10), (M11), (M23), (M24), (M25), (M26), (M27), (M28) и (M30) следва от верността на (M4), (M5), (M6), (M7), (M17), (M18), (M19), (M20), (M22), (M21) и (M29) от съображения за дуалност.

Така показахме, че $\underline{W'}$ е абстрактна структура, с което доказателството на твърдението завършва. □

Така знаейки че съществува такова копиране I, което удовлетворява (I1), (I2), (R1) и (R2), получаваме и следната

Лема 5.2 (Лема за копирането). *Нека* $\underline{W} \in \Sigma_{nonstd}$*,* v *е оценка в* $\underline{W}$*,* $\underline{W}' \in \Sigma_{abst}$ *и* I *е копиране от* $\underline{W}$ *в* $\underline{W}'$*. Тогава съществува оценка* v' *в* $\underline{W}'$*, такава че:*

$$v(x, A) = 1 \Longleftrightarrow v'(f(x), A) = 1$$

$$(v(x, A) = 0 \Longleftrightarrow v'(f(x), A) = 0 \text{ съответно})$$

за $\forall x \in W$*,* $\forall f \in I$ *и за всяка формула* A*.*

Сега вече можем да докажем

Теорема 5.2. $\mathcal{L}(\Sigma_{abst}) = \mathcal{L}(\Sigma_{nonstd})$.

Доказателство. **Твърдение 5.1** показа, че $\Sigma_{\text{abst}} \subseteq \Sigma_{\text{nonstd}}$. Така получаваме като следствие включването $\mathcal{L}(\Sigma_{\text{nonstd}}) \subseteq \mathcal{L}(\Sigma_{\text{abst}})$.

Нека да допуснем че обратното включване не е изпълнено. Следователно има формула A, такава че:

$$A \in \mathcal{L}(\Sigma_{\text{abst}}) \text{ , но } A \notin \mathcal{L}(\Sigma_{\text{nonstd}}).$$

Това означава че има структура $\underline{W} \in \Sigma_{\text{nonstd}}$, в която A не е вярна. Т.е. има оценка v в $\underline{W}$ и обект x от носителя на $\underline{W}$, така че:

$$v(x, A) = 0.$$

Тогава по **Твърдение 5.2** съществува $\underline{W}' \in \Sigma_{\text{abst}}$ и копиране I от $\underline{W}$ в $\underline{W}'$. Нека $f \in I$. По лемата за копирането имаме оценка v' в $\underline{W}'$, такава че:

$$v(x, A) = 0 \Longleftrightarrow v'(f(x), A) = 0.$$

Т.е. имаме $v'(f(x), A) = 0$ като резултат. Тогава A не е вярна в $\underline{W}'$. Но така получаваме противоречие с допускането че $A \in \mathcal{L}(\Sigma_{\text{abst}})$. Следователно допускането е погрешно и $\mathcal{L}(\Sigma_{\text{abst}}) \subseteq \mathcal{L}(\Sigma_{\text{nonstd}})$, а така получаваме и исканото твърдение $\mathcal{L}(\Sigma_{\text{abst}}) = \mathcal{L}(\Sigma_{\text{nonstd}})$. □

6. Аксиоматика и теорема за пълнота на MSUMRL

Ще дадем аксиоматика на логиката и ще докажем теорема за пълнота за семантиката ѝ относно нестандартните структури. Пълнотата на тази аксиоматика относно семантиките за другите класове от структури ще следва от доказаните теореми за еквивалентност на семантиките.

6.1. **Аксиоми на логиката.**

Аксиоматиката ще съставим като към обичайните за модалната логика аксиоми добавим такива за всяко едно от условията от дефиницията за нестандартни структури, както и аксиоми за универсалната релация, представящи я като релация на еквивалентност, която съдържа всички останали релации.
За симетричните на $\leq$ и $\preceq$ релации, ще използваме аксиомите

$$\langle R\rangle[R^{-1}]A \to A \text{ и } \langle R^{-1}\rangle[R]A \to A,$$

които модално определят условията $xRy \Longrightarrow yR^{-1}x$ и $xR^{-1}y \Longrightarrow yRx$.

Така аксиомите са както следва:

I. Аксиоми на съждителното смятане

II. Аксиоми за всяка една от релациите $\leq$, o, u, $\preceq$, O, U, $\geq$, $\succeq$ и W^2:

(K[R]) $[R](A \to B) \to ([R]A \to [R]B)$, като R замества съответната релация;

III. Аксиоми за W^2, $\geq$, $\succeq$ и (M1), (M2), (M3$'$) ÷ (M3$'''$), (M4) ÷ (M30):

($\mathsf{W}^2$1) $[\mathsf{W}^2]A \to A$

($\mathsf{W}^2$2) $\langle \mathsf{W}^2\rangle[\mathsf{W}^2]A \to A$

$(\mathsf{W}^2 3)$	$[\mathsf{W}^2]A \to [\mathsf{W}^2][\mathsf{W}^2]A$
$(\mathsf{W}^2 4)$	$[\mathsf{W}^2]A \to [R]A$, за всяка модалност R
(≥ 1)	$\langle\leq\rangle[\geq]A \to A$
(≥ 2)	$\langle\geq\rangle[\leq]A \to A$
$(\succeq 1)$	$\langle\preceq\rangle[\succeq]A \to A$
$(\succeq 2)$	$\langle\succeq\rangle[\preceq]A \to A$
(AM1)	$[\leq]A \to A$
(AM2)	$[\leq]A \to [\leq][\leq]A$
(AM3′)	$\langle\leq\rangle([\mathsf{O}]A \wedge \neg A \wedge B) \to B$
(AM3″)	$\langle\geq\rangle([\mathsf{U}]A \wedge \neg A \wedge B) \to B$
(AM3‴)	$\langle\mathsf{W}^2\rangle(B \wedge \neg C \wedge \langle\leq\rangle(A \wedge C)) \to \langle\mathsf{O}\rangle A \vee \langle\mathsf{U}\rangle B$
(AM4)	$\langle\mathsf{O}\rangle[\mathsf{O}]A \to A$
(AM5)	$\langle\mathsf{O}\rangle T \wedge [\mathsf{O}]A \to A$
(AM6)	$[\mathsf{O}]A \to [\mathsf{O}][\leq]A$
(AM7)	$[\mathsf{O}]A \wedge [\leq]B \to A \vee [\mathsf{W}^2]B$
(AM8)	$\langle\mathsf{U}\rangle[\mathsf{U}]A \to A$
(AM9)	$\langle\mathsf{U}\rangle T \wedge [\mathsf{U}]A \to A$
(AM10)	$[\mathsf{U}]A \to [\leq][\mathsf{U}]A$
(AM11)	$[\mathsf{U}]A \wedge [\geq]B \to A \vee [\mathsf{W}^2]B$
(AM12)	$[\leq]A \wedge [\mathsf{O}]B \wedge \langle\mathsf{W}^2\rangle([\mathsf{U}]C \wedge \neg A) \to [\mathsf{W}^2](B \vee C)$
(AM13)	$([\mathsf{O}]A \to A) \vee ([\mathsf{U}]B \to B)$
(AM14)	$[\preceq]A \to A$
(AM15)	$[\preceq]A \to [\leq][\preceq]A$
(AM16)	$[\preceq]A \to [\preceq][\leq]A$
(AM17)	$\langle\mathsf{o}\rangle[\mathsf{o}]A \to A$
(AM18)	$\langle\mathsf{o}\rangle T \wedge [\mathsf{o}]A \to A$
(AM19)	$[\mathsf{o}]A \to [\mathsf{o}][\leq]A$
(AM20)	$[\mathsf{O}]A \to [\mathsf{o}][\preceq]A$
(AM21)	$[\mathsf{o}]A \wedge [\preceq]B \to A \vee [\mathsf{W}^2]B$
(AM22)	$[\preceq]A \wedge [\mathsf{o}]B \wedge \langle\mathsf{W}^2\rangle([\mathsf{U}]C \wedge \neg A) \to [\mathsf{W}^2](B \vee C)$
(AM23)	$\langle\mathsf{u}\rangle[\mathsf{u}]A \to A$
(AM24)	$\langle\mathsf{u}\rangle T \wedge [\mathsf{u}]A \to A$
(AM25)	$[\mathsf{u}]A \to [\leq][\mathsf{u}]A$
(AM26)	$[\mathsf{U}]A \to [\preceq][\mathsf{u}]A$
(AM27)	$[\preceq]A \wedge [\mathsf{O}]B \wedge \langle\mathsf{W}^2\rangle([\mathsf{u}]C \wedge \neg A) \to [\mathsf{W}^2](B \vee C)$
(AM28)	$[\mathsf{u}]A \wedge [\succeq]B \to A \vee [\mathsf{W}^2]B$
(AM29)	$([\mathsf{o}]A \to A) \vee ([\mathsf{U}]B \to B)$
(AM30)	$([\mathsf{O}]A \to A) \vee ([\mathsf{u}]B \to B)$

където A, B и C са съждителни променливи, а T е произволна фиксирана модална тавтология (например $T = A \vee \neg A$).

Правилата за извод са:

(Modus Ponens) $\dfrac{A \to B, A}{B}$

(Necessitation) $\dfrac{A}{[R]A}$ за всяка модалност R

Дефинициите за *формален извод*, *доказателство*, *теорема*, *теория* и *максимална теория* остават същите както и в класическата модална логика.

Сега ще докажем, че изброените аксиоми модално определят условията за нестандартни структури.

Известно е че формулите ($\mathsf{W}^2 1$) $\div$ ($\mathsf{W}^2 4$) определят исканите условия за универсалната релация, а ($\geq$1), ($\geq$2), ($\succeq$1) и ($\succeq$2) определят връзките между релациите $\leq$ и $\preceq$ и техните симетрични.

Т.к. (M1), (M2), (M4), (M8), (M14), (M17) и (M23) са условия за рефлексивност, транзитивност и симетричност, то те се определят модално от аксиомите със същите номера ((AM1), (AM2) и т.н.). (M13), (M29) и (M30) са условия които комбинират две условия за рефлексивност и така те се определят съответно от аксиоми (AM13), (AM29) и (AM30).

Това че (M3$'$), (M3$''$) и (M3$'''$) се определят от (AM3$'$), (AM3$''$) и (AM3$'''$) ще използваме наготово, като факт доказан в [1].

Определимостта на останалите условия ще покажем с няколко твърдения.

Определимостта на условията (M6), (M10), (M15), (M16), (M19), (M20), (M25) и (M26) ще докажем наведнъж със следното

Твърдение 6.1. *Нека R, S и P са модални релации в логиката, а $\underline{W}$ е нестандартна структура с носител W. Тогава формулата $[P]A \to [R][S]A$ е вярна в $\underline{W}$ тогава и само тогава когато за $\forall x, y, z \in W : xRy$ и $ySz \Longrightarrow xPz$.*

чието доказателство е аналогично на това за определимостта на условието за транзитивност.

Определимостта на условията (M7), (M11), (M21), и (M28) ще докажем с

Твърдение 6.2. *Нека R и S са модални релации, а $\underline{W}$ е нестандартна структура с носител W. Тогава*

1) $[R]A \wedge [S]B \to A \vee [\mathsf{W}^2]B$ *е вярна в* $\underline{W} \Longleftrightarrow$ *за* $\forall x, y \in W : xRx$ *или* xSy;
2) $[R]A \wedge [S^{-1}]B \to A \vee [\mathsf{W}^2]B$ *е вярна в* $\underline{W} \Longleftrightarrow$ *за* $\forall x, y \in W : yRy$ *или* xSy.

Доказателство. Ще докажем само 1). 2) се доказва по идентичен начин като преработим условието yRy или xSy във вида yRy или $yS^{-1}x$.

($\Longrightarrow$) Нека $[R]A \wedge [S]B \to A \vee [\mathsf{W}^2]B$ е вярна в $\underline{W}$.
Нека $x, y \in W$ така че $x\overline{R}x$ и $x\overline{S}y$.
Тогава нека дефинираме оценката v такава че:
$v(x, A) = 0$, а $v(t, A) = 1$ за $\forall t \in W : t \neq x$ и
$v(y, B) = 0$, а $v(t, B) = 1$ за $\forall t \in W : t \neq y$.
Нека xRt. Следователно $t \neq x$ т.к. $x\overline{R}x \Longrightarrow v(t, A) = 1$. Следователно $v(x, [R]A) = 1$.
Нека xSt. Следователно $t \neq y$ т.к. $x\overline{S}y \Longrightarrow v(t, B) = 1$. Следователно $v(x, [S]B) = 1$.
$x\, \mathsf{W}^2 y$ и $v(y, B) = 0 \Longrightarrow v(x, [\mathsf{W}^2]B) = 0$.
Но така $v(x, [R]A) = 1$, $v(x, [S]B) = 1$, $v(x, A) = 0$ и $v(x, [\mathsf{W}^2]B) = 0$ т.е. имаме че $v(x, [R]A \wedge [S]B \to A \vee [\mathsf{W}^2]B) = 0$, което е противоречие.
Следователно xRx или xSy за $\forall x, y \in W$.

($\Longleftarrow$) Нека за $\forall x, y \in W : xRx$ или xSy.
Нека допуснем че има оценка v и $x \in W$, така че $v(x, [R]A \wedge [S]B \rightarrow A \vee [\mathsf{W}^2]B) = 0$.
Т.е. $v(x, [R]A) = 1$, $v(x, [S]B) = 1$, $v(x, A) = 0$ и $v(x, [\mathsf{W}^2]B) = 0$.
$v(x, [R]A) = 1$ и $v(x, A) = 0$ следователно $x\overline{R}x$.
$x\overline{R}x \Longrightarrow xSy$ за произволно $y \in W$.
Т.к. $v(x, [S]B) = 1$ и xSy за $\forall y \in W$ следователно $v(y, B) = 1$ за $\forall y \in W$.
$x\,\mathsf{W}^2 y$ и $v(y, B) = 1$ за $\forall y \in W$ следователно $v(x, [\mathsf{W}^2]B) = 1$, което обаче е в противоречие с $v(x, [\mathsf{W}^2]B) = 0$.
Така $[R]A \wedge [S]B \rightarrow A \vee [\mathsf{W}^2]B$ е вярна в $\underline{W}$.

$\square$

А определимостта на условията (M12), (M22), и (M27) следва от

Твърдение 6.3. *Нека R, S и P са модални релации в логиката, а $\underline{W}$ е нестандартна структура с носител W. Тогава формулата $[R]A \wedge [S]B \wedge \langle \mathsf{W}^2 \rangle([P]C \wedge \neg A) \rightarrow [\mathsf{W}^2](B \vee C)$ е вярна в $\underline{W}$ тогава и само тогава когато за $\forall x, y, z \in W : xRy$ или xSz или yPz.*

Доказателство.

($\Longrightarrow$) Нека $[R]A \wedge [S]B \wedge \langle \mathsf{W}^2 \rangle([P]C \wedge \neg A) \rightarrow [\mathsf{W}^2](B \vee C)$ е вярна в $\underline{W}$.
Нека $x, y, z \in W$ така че $x\overline{R}y$ и $x\overline{S}z$ и $y\overline{P}z$.
Тогава нека дефинираме оценката v такава че:
$v(y, A) = 0$, а $v(t, A) = 1$ за $\forall t \in W : t \neq y$ и
$v(z, B) = 0$, а $v(t, B) = 1$ за $\forall t \in W : t \neq z$ и
$v(z, C) = 0$, а $v(t, C) = 1$ за $\forall t \in W : t \neq z$.
Нека xRt. Следователно $t \neq y$ т.к. $x\overline{R}y \Longrightarrow v(t, A) = 1$. Следователно $v(x, [R]A) = 1$.
Нека xSt. Следователно $t \neq z$ т.к. $x\overline{S}z \Longrightarrow v(t, B) = 1$. Следователно $v(x, [S]B) = 1$.
Нека yPt. Следователно $t \neq z$ т.к. $y\overline{P}z \Longrightarrow v(t, C) = 1$. Следователно $v(y, [P]C) = 1$.
$x\,\mathsf{W}^2 y$ и $v(y, A) = 0$ и $v(y, [P]C) = 1 \Longrightarrow v(x, \langle \mathsf{W}^2 \rangle([P]C \wedge \neg A)) = 1$.
$x\,\mathsf{W}^2 y$ и $v(z, B) = 0$ и $v(z, C) = 0 \Longrightarrow v(x, [\mathsf{W}^2](B \vee C)) = 0$.
Но така $v(x, [R]A \wedge [S]B \wedge \langle \mathsf{W}^2 \rangle([P]C \wedge \neg A) \rightarrow [\mathsf{W}^2](B \vee C)) = 0$, което е противоречие.
Следователно xRy или xSz или yPz за $\forall x, y, z \in W$.

($\Longleftarrow$) Нека за $\forall x, y, z \in W : xRy$ или xSz или yPz.
Нека допуснем че има оценка v и $x \in W$, така че $v(x, [R]A \wedge [S]B \wedge \langle \mathsf{W}^2 \rangle([P]C \wedge \neg A) \rightarrow [\mathsf{W}^2](B \vee C)) = 0$.
Т.е. $v(x, [R]A) = 1$, $v(x, [S]B) = 1$, $v(x, \langle \mathsf{W}^2 \rangle([P]C \wedge \neg A)) = 1$ и $v(x, [\mathsf{W}^2](B \vee C)) = 0$.
$v(x, \langle \mathsf{W}^2 \rangle([P]C \wedge \neg A)) = 1 \Longrightarrow$ има $y \in W$ така че $x\,\mathsf{W}^2 y$ и $v(y, [P]C \wedge \neg A) = 1$. Т.е. има $y \in W$ такова че $v(y, [P]C) = 1$ и $v(y, A) = 0$.
$v(x, [R]A) = 1$ и $v(y, A) = 0 \Longrightarrow x\overline{R}y$.
$v(x, [\mathsf{W}^2](B \vee C)) = 0 \Longrightarrow$ има $z \in W$ така че $x\,\mathsf{W}^2 z$ и $v(z, B \vee C) = 0$.
Т.е. има $z \in W$ такова че $v(z, B) = 0$ и $v(z, C) = 0$.
$v(x, [S]B) = 1$ и $v(z, B) = 0 \Longrightarrow x\overline{S}z$.
$v(y, [P]C) = 1$ и $v(z, C) = 0 \Longrightarrow y\overline{P}z$.
Но така получихме че $x\overline{R}y$ и $x\overline{S}z$ и $y\overline{P}z$, което е в противоречие с условието.
Следователно $[R]A \wedge [S]B \wedge \langle \mathsf{W}^2 \rangle([P]C \wedge \neg A) \rightarrow [\mathsf{W}^2](B \vee C)$ е вярна в $\underline{W}$.

□

Аналогично се показва и

Твърдение 6.4. *Нека R е някоя от модалните релации в логиката, а $\underline{W}$ е нестандартна структура с носител W. Тогава формулата $\langle R\rangle T \wedge [R]A \rightarrow A$ е вярна в $\underline{W}$ тогава и само тогава когато за $\forall x, y \in W : xRy \Longrightarrow xRx$.*

От това твърдение следва че условията (M5), (M9), (M18) и (M24) се определят модално съответно от аксиомите (AM5), (AM9), (AM18) и (AM24) т.к. те отговарят на описаната в твърдението ситуация.

6.2. **Канонични модели и теорема за пълнота.**

Каноничния модел $(\underline{W}^C, v^C)$ за модалната логика ще построим по класическия начин. Нека $\underline{W}^C = (W^C, \leq^C, \mathsf{o}^C, \mathsf{u}^C, \preceq^C, \mathsf{O}^C, \mathsf{U}^C)$ където:

$$W^C = \{ \text{ всички максимални теории на MSUMRL } \}$$

$$\text{за } \forall \Gamma, \Delta \in W^C\colon \Gamma R^C \Delta \Longleftrightarrow (\text{за всяка формула } A)([R]A \in \Gamma \Longrightarrow A \in \Delta)$$

като R обхожда всички стабилни и нестабилни релации $\leq$, o, u, $\preceq$, O и U.

А оценката v^C дефинираме за всяка съждителна променлива p така:

$$\text{за } \forall \Gamma \in W^C\colon v^C(\Gamma, p) = 1 \Longleftrightarrow p \in \Gamma$$

Т.к. всички аксиоми са Салквистови формули, то следва че те са вярни и в каноничната структура. Така и условията които те определят са вярни за $\underline{W}^C$, което означава че $\underline{W}^C$ е нестандартна структура.

Единственото което създава проблем при доказване на пълнотата на MSUMRL е факта че релацията W^2 не е универсална в $\underline{W}^C$, ами е само релация на еквивалентност, включваща останалите релации. Това може да се преодолее като се използват подмодели на $(\underline{W}^C, v^C)$, генерирани от някой елемент на W^C. В тях вече W^2 ще е универсална релация и може индуктивно да се докаже че за всяка формула A и за всяка максимална теория от носителя на генерираната подструктура, имаме че A е вярна в подмодела, тогава и само тогава когато A принадлежи на теорията.

Теорема 6.1 (Теорема за пълнота на MSUMRL)**.** *Следните четири твърдения са еквивалентни за всяла формула A:*

(1) *A е теорема на MSUMRL*
(2) *A е вярна във всяка нестандартна структура*
(3) *A е вярна във всяка абстрактна структура*
(4) *A е вярна във всяка стандартна структура*

Доказателство.

((1) $\Longrightarrow$ (2)) Коректността на аксиомите се подсигурява от това че те модално определят условията на които отговарят нестандартните структури. И т.к. правилата за извод запазват верността на формулите, то индуктивно се вижда че ако A е теорема на MSUMRL, то тя ще е вярна във всяка нестандартна структура.

((2) $\Longrightarrow$ (1)) Нека допуснем че A е вярна във всяка нестандартна структура, но A не е теорема на MSUMRL.
Тогава съществува максимална теория на MSUMRL Γ, такава че $A \notin \Gamma$. Нека разгледаме генерирания от Γ подмодел на $(\underline{W}^C, v^C)$: $(\underline{W}^C_\Gamma, v^C_\Gamma)$. Тогава имаме че $v^C_\Gamma(\Gamma, A) = 0$ т.к. $A \notin \Gamma$.

Но това означава че A не е вярна в $\underline{W}^C_\Gamma$, което е противоречие, т.к. $\underline{W}^C_\Gamma$ е нестандартна структура.

Следователно A е теорема на MSUMRL.

Останалите еквивалентности следват от теоремите за еквивалентност на семантиките:

$$\begin{array}{l}
A \text{ е вярна във всяка нестандартна структура } \Longleftrightarrow \\
A \in \mathcal{L}(\Sigma_{\text{nonstd}}) \xLeftrightarrow{\text{по \textbf{Теорема 5.2}}} A \in \mathcal{L}(\Sigma_{\text{abst}}) \Longleftrightarrow \\
A \text{ е вярна във всяка абстрактна структура } \Longleftrightarrow \\
A \in \mathcal{L}(\Sigma_{\text{abst}}) \xLeftrightarrow{\text{по \textbf{Теорема 5.1}}} A \in \mathcal{L}(\Sigma_{\text{std}}) \Longleftrightarrow \\
A \text{ е вярна във всяка стандартна структура}
\end{array}$$

□

7. Разрешимост на MSUMRL

Също както и при PSUMRL, разрешимостта на MSUMRL ще следва от факта че логиката притежава силното свойство на крайните модели. За целта ще докажем че MSUMRL допуска филтрации.

Така нека $(\underline{W}, v)$ е модел, като $\underline{W} \in \Sigma_{\text{nonstd}}$ и $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$, а Γ е крайно множество от формули, което отговаря на следните условия:

(1) Γ е затворено относно подформули;
(2) $\langle R\rangle T \in \Gamma$ за всяка една от модалностите o, u, O и U, където T е произволна, фиксирана отнапред, тавтология на MSUMRL;
(3) ако $[R]A \in \Gamma$, където R е коя да е от модалностите от езика на логиката, то тогава $[R]A \in \Gamma$ за всяка една модалност R.

Подобни множества например ще съставяме като разгледаме дадена формула A и множеството Γ образуваме от подформулите на A, като добавим нужните формули по точки (2) и (3) от изискванията на Γ. Така т.к. подформулите на A са краен брой, а чрез добавяне на минималния необходим набор от формули по точки (2) и (3) се добавят отново краен брой формули, то след получаването на Γ се гарантира и неговата крайност.

За да дефинираме филтрация на $(\underline{W}, v)$ ще ни е необходима следната релация на еквивалентност между елементите на W

Дефиниция 10. *Нека $\simeq$ е двуместна релация над W, такава че за $\forall x, y \in W$:*

$$x \simeq y \Longleftrightarrow (\forall A \in \Gamma)(v(x, A) = v(y, A))$$

С $|x|$ ще означаваме класа на еквивалентност на x относно релацията $\simeq$.

Така за филтрация на $(\underline{W}, v)$ ще търсим модел $(\underline{W}', v')$, като $\underline{W}' = (W', \leq', \mathsf{o}', \mathsf{u}', \preceq', \mathsf{O}', \mathsf{U}')$, за който

$$W' = \{\ |x| \mid x \in W\ \}$$
$$v'(|x|, p) = v(x, p) \text{ за } \forall p \in Var$$

и за който са изпълнени следните изисквания за модалностите на логиката

(R1) За всяка модалност R от езика на логиката и за $\forall x, y \in W$:
$x\ R\ y \Longrightarrow |x|\ R'\ |y|$

(R2) За всяка модалност R от езика на логиката и за $\forall x, y \in W$:
$|x|\ R'\ |y| \Longrightarrow (\forall [R]A \in \Gamma)(v(x, [R]A) = 1 \Longrightarrow v(y, A) = 1)$

Твърдение 7.1. *Нека* $(\underline{W}, v)$ *е модел, като* $\underline{W} \in \Sigma_{nonstd}$ *и* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$*, а* Γ *е крайно множество от формули, както е описано по-горе. Тогава съществува филтрация на* $(\underline{W}, v)$*.*

Доказателство. Филтрирания модел $(\underline{W}', v')$ ще построим по следния начин. Нека $\underline{W}' = (W', \leq', \mathsf{o}', \mathsf{u}', \preceq', \mathsf{O}', \mathsf{U}')$, като носителя W' и оценката v' са определени както по-горе. Релациите $\leq'$, o', u', $\preceq'$, O' и U' ще дефинираме за произволни $|x|, |y| \in W'$ така:

$$\begin{aligned} |x| \leq' |y| \Longleftrightarrow (\forall[\leq]A \in \Gamma)(&v(x, [\leq]A) = 1 \Longrightarrow v(y, [\leq]A) = 1 \text{ и}\\ &v(y, [\geq]A) = 1 \Longrightarrow v(x, [\geq]A) = 1 \text{ и}\\ &v(y, [\mathsf{O}]A) = 1 \Longrightarrow v(x, [\mathsf{O}]A) = 1 \text{ и}\\ &v(x, [\mathsf{U}]A) = 1 \Longrightarrow v(y, [\mathsf{U}]A) = 1 \text{ и}\\ &v(x, [\preceq]A) = 1 \Longrightarrow v(y, [\preceq]A) = 1 \text{ и}\\ &v(y, [\succeq]A) = 1 \Longrightarrow v(x, [\succeq]A) = 1 \text{ и}\\ &v(y, [\mathsf{o}]A) = 1 \Longrightarrow v(x, [\mathsf{o}]A) = 1 \text{ и}\\ &v(x, [\mathsf{u}]A) = 1 \Longrightarrow v(y, [\mathsf{u}]A) = 1 \text{ и}\\ &v(x, \langle\mathsf{O}\rangle T) = 1 \Longrightarrow v(y, \langle\mathsf{O}\rangle T) = 1 \text{ и}\\ &v(y, \langle\mathsf{U}\rangle T) = 1 \Longrightarrow v(x, \langle\mathsf{U}\rangle T) = 1 \text{ и}\\ &v(x, \langle\mathsf{o}\rangle T) = 1 \Longrightarrow v(y, \langle\mathsf{o}\rangle T) = 1 \text{ и}\\ &v(y, \langle\mathsf{u}\rangle T) = 1 \Longrightarrow v(x, \langle\mathsf{u}\rangle T) = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x| \mathrel{\mathsf{O}'} |y| \Longleftrightarrow (\forall[\mathsf{O}]A \in \Gamma)(&v(x, [\mathsf{O}]A) = 1 \Longrightarrow v(y, [\leq]A) = 1 \text{ и}\\ &v(y, [\mathsf{O}]A) = 1 \Longrightarrow v(x, [\leq]A) = 1 \text{ и}\\ &v(x, \langle\mathsf{O}\rangle T) = 1 \text{ и}\\ &v(y, \langle\mathsf{O}\rangle T) = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x| \mathrel{\mathsf{U}'} |y| \Longleftrightarrow (\forall[\mathsf{U}]A \in \Gamma)(&v(x, [\mathsf{U}]A) = 1 \Longrightarrow v(y, [\geq]A) = 1 \text{ и}\\ &v(y, [\mathsf{U}]A) = 1 \Longrightarrow v(x, [\geq]A) = 1 \text{ и}\\ &v(x, \langle\mathsf{U}\rangle T) = 1 \text{ и}\\ &v(y, \langle\mathsf{U}\rangle T) = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x| \preceq' |y| \Longleftrightarrow (\forall[\preceq]A \in \Gamma)(&v(x, [\preceq]A) = 1 \Longrightarrow v(y, [\leq]A) = 1 \text{ и}\\ &v(y, [\succeq]A) = 1 \Longrightarrow v(x, [\geq]A) = 1 \text{ и}\\ &v(y, [\mathsf{O}]A) = 1 \Longrightarrow v(x, [\mathsf{o}]A) = 1 \text{ и}\\ &v(x, [\mathsf{U}]A) = 1 \Longrightarrow v(y, [\mathsf{u}]A) = 1 \text{ и}\\ &v(x, \langle\mathsf{o}\rangle T) = 1 \Longrightarrow v(y, \langle\mathsf{O}\rangle T) = 1 \text{ и}\\ &v(y, \langle\mathsf{u}\rangle T) = 1 \Longrightarrow v(x, \langle\mathsf{U}\rangle T) = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x| \mathrel{\mathsf{o}'} |y| \Longleftrightarrow (\forall[\mathsf{o}]A \in \Gamma)(&v(x, [\mathsf{o}]A) = 1 \Longrightarrow v(y, [\leq]A) = 1 \text{ и}\\ &v(y, [\mathsf{o}]A) = 1 \Longrightarrow v(x, [\leq]A) = 1 \text{ и}\\ &v(x, [\mathsf{O}]A) = 1 \Longrightarrow v(y, [\preceq]A) = 1 \text{ и}\\ &v(y, [\mathsf{O}]A) = 1 \Longrightarrow v(x, [\preceq]A) = 1 \text{ и}\\ &v(x, \langle\mathsf{o}\rangle T) = 1 \text{ и}\\ &v(y, \langle\mathsf{o}\rangle T) = 1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|x| \ \mathsf{u}' \ |y| \Longleftrightarrow (\forall [\mathsf{u}]A \in \Gamma)(& v(x, [\mathsf{u}]A) = 1 \Longrightarrow v(y, [\geq]A) = 1 \text{ и} \\
& v(y, [\mathsf{u}]A) = 1 \Longrightarrow v(x, [\geq]A) = 1 \text{ и} \\
& v(x, [\mathsf{U}]A) = 1 \Longrightarrow v(y, [\succeq]A) = 1 \text{ и} \\
& v(y, [\mathsf{U}]A) = 1 \Longrightarrow v(x, [\succeq]A) = 1 \text{ и} \\
& v(x, \langle \mathsf{u} \rangle T) = 1 \text{ и} \\
& v(y, \langle \mathsf{u} \rangle T) = 1)
\end{aligned}
$$

Остава да покажем че (R1) и (R2) са в сила и че $\underline{W}'$ е нестандартна структура (т.е. че $(\underline{W}', v')$ наистина е модел на логиката).

Т.к. доказателството на (R1) е аналогично за всички релации, то тук ще бъде описано само доказателството за релацията с най-много условия в дефиницията - $\leq'$.

Нека $x \leq y$ и нека $[\leq]A \in \Gamma$. Ще докажем вярността на всички дванайсет импликации от дефиницията на $\leq'$.
Нека например $v(x, [\leq]A) = 1$. Ще докажем че и $v(y, [\leq]A) = 1$. Нека $y \leq t$.
Тогава от това че (M2) е вярно за $\underline{W}$ имаме че $x \leq y$ и $y \leq t \Longrightarrow x \leq t$.
Т.к. $v(x, [\leq]A) = 1$ и $x \leq t$ следователно и $v(t, A) = 1$.
Така $y \leq t \Longrightarrow v(t, A) = 1$ за произволно t. Следователно $v(y, [\leq]A) = 1$.
Импликациите от втора до осма, по реда на изброяване в дефиницията на $\leq'$, се доказват аналогично като се използва че (M2) и условията за симетричност на O, U, o и u са изпълнени за $\underline{W}$.
Нека $v(x, \langle \mathsf{O} \rangle T) = 1$. Следователно $\exists t \in W$ такова че $x \ \mathsf{O} \ t$.
$x \ \mathsf{O} \ t \xRightarrow{\text{по (M4)}} t \ \mathsf{O} \ x$. $t \ \mathsf{O} \ x$ и $x \leq y \xRightarrow{\text{по (M6)}} t \ \mathsf{O} \ y \Longrightarrow y \ \mathsf{O} \ t$.
От $y \ \mathsf{O} \ t$ и $v(t, T) = 1$ следва че $v(y, \langle \mathsf{O} \rangle T) = 1$.
И последните три импликации от дефиницията на $\leq'$ се доказват аналогично.

Сега ще покажем (R2) за релацията $\leq'$.
Нека $|x| \leq' |y|$ и $[\leq]A \in \Gamma$ така че $v(x, [\leq]A) = 1$.
Т.к. $|x| \leq' |y|$ и $v(x, [\leq]A) = 1$ то по дефиницията на $\leq'$ имаме че $v(y, [\leq]A) = 1$.
От (M1) за $\underline{W}$ имаме че $y \leq y$.
А от $v(y, [\leq]A) = 1$ и $y \leq y$ следва че $v(y, A) = 1$.

(R2) за релацията $\preceq'$ се доказва аналогично.

Сега за O'. Нека $|x| \ \mathsf{O}' \ |y|$ и $[\mathsf{O}]A \in \Gamma$ така че $v(x, [\mathsf{O}]A) = 1$.
От дефиницията на O' имаме че $v(y, [\leq]A) = 1$, а от (M1) за $\underline{W}$ че $y \leq y$.
Така получаваме $v(y, A) = 1$.

(R2) за релацията o' се доказва аналогично на O', а за релациите $\geq'$, $\succeq'$, U' и u', доказателството е дуално съответно на $\leq'$, $\preceq'$, O' и o'.

Това че $\underline{W}' \in \Sigma_{\text{nonstd}}$ ще докажем, като проверим че $\underline{W}'$ удовлетворява условията (M1), (M2), (M3$'$) $\div$ (M3$'''$), (M4) $\div$ (M30).

За условие (M1) искаме да покажем че $|x| \leq' |x|$. От прилагане на (M1) за $\underline{W}$ имаме че $x \leq x$, а от (R1) получаваме и резултата който се изисква.

Аналогично на (M1) се проверява и условието (M14).

Условията (M4) и (M17), съответно за симетричност на релациите O' и o', са изпълнени т.к. дефинициите на тези релации са симетрични по отношение на аргументите си.

Удовлетворимостта на условия (M2), (M6), (M15), (M16), (M19) и (M20) се доказва по един и същи начин. Всяко едно от тези условия представлява импликация с две предпоставки и едно заключение. Като допуснем че предпоставките са изпълнени, то проверката на това че заключението е в сила следва директно от твърденията, с които разполагаме поради верността на предпоставките. Например като доказваме (M2) и искаме да покажем че $|x| \leq' |z|$, едно от условията които трябва да проверим е че $v(x, [\leq]A) = 1 \Longrightarrow v(z, [\leq]A) = 1$. Но от дефиницията на $\leq'$ и от предпоставките $|x| \leq' |y|$ и $|y| \leq' |z|$ имаме че $v(x, [\leq]A) = 1 \Longrightarrow v(y, [\leq]A) = 1$ и $v(y, [\leq]A) = 1 \Longrightarrow v(z, [\leq]A) = 1$. Така като комбинираме тези две условия директно получаваме това което трябва да проверим. Единственото изключение е при доказателството на (M20), когато трябва да се провери условието $v(x, \langle \mathsf{O} \rangle T) = 1$ за $|x|\ \mathsf{O}'\ |z|$. То се показва по следния начин. Т.к. $|x|\ \mathsf{o}'\ |y|$ то по дефиницията на o' имаме че $v(x, \langle \mathsf{o} \rangle T) = 1$. Следователно $\exists t \in W$ такова че $x\ \mathsf{o}'\ t$. Следователно по (Mo) получаваме $x\ \mathsf{O}'\ t$. Така от $x\ \mathsf{O}'\ t$ и $v(t, T) = 1$ следва че $v(x, \langle \mathsf{O} \rangle T) = 1$.

Условията (M5) и (M18) също се доказват аналогично едно на друго. Ето например какво е доказателството за (M5). Нека $|x| \mathsf{O}' |y|$. Тогава по дефиницията на O' имаме че $v(x, \langle \mathsf{O} \rangle T) = 1$. Следователно $\exists t \in W$ такова че $x\ \mathsf{O}\ t$. Тогава по (M5) за $\underline{W}$ получаваме $x\ \mathsf{O}\ x$. Тогава по (R1) получаваме исканото $|x|\ \mathsf{O}'\ |x|$.

Условията (M7), (M12), (M13), (M21), (M22) и (M29) се показват за $\underline{W}'$, като се приложат съответно същите условия за $\underline{W}$. Например от (M22) за $\underline{W}$ имаме че $x\ \mathsf{o}\ z$ или $y\ \mathsf{U}\ z$ или $x \preceq y$. Така от (R1) следва и че $|x|\ \mathsf{o}'\ |z|$ или $|y|\ \mathsf{U}'\ |z|$ или $|x| \preceq' |y|$ в $\underline{W}'$.

Вярността на (M8), (M9), (M10), (M11), (M23), (M24), (M25), (M26), (M27), (M28) и (M30), следва от вярността на (M4), (M5), (M6), (M7), (M17), (M18), (M19), (M20), (M22), (M21) и (M29) съответно, поради съображения за дуалност.

Остава да покажем само вярността на (M3$'$), (M3$''$) и (M3$'''$). Това ще направим само за (M3$'''$), т.к. то е най-сложно от трите. Доказателствата за останалите две са аналогични. Нека $|z|\ \overline{\mathsf{O}'}\ |x|$, $|z|\ \overline{\mathsf{U}'}\ |y|$ и $|y| \leq' |x|$. Нека допуснем че $|x| \neq |y|$. Тогава $x \not\simeq y$ и следователно по дефиницията на $\simeq$ съществува формула $A \in \Gamma$, такава че $v(x, A) \neq v(y, A)$. Тогава $x \neq y$. От $|z|\ \overline{\mathsf{O}'}\ |x|$ и $|z|\ \overline{\mathsf{U}'}\ |y|$ чрез контрапозиция на (R1) получаваме че $z\ \overline{\mathsf{O}}\ x$ и $z\ \overline{\mathsf{U}}\ y$. Тогава от (M3$'''$) за $\underline{W}$ следва че $y \not\leq x$. Тогава от (M12) за $\underline{W}$ следва че $y\ \mathsf{O}\ z$ или $x\ \mathsf{U}\ z$.

- ако $y\ \mathsf{O}\ z \xRightarrow{\text{по (R1)}} |y|\ \mathsf{O}'\ |z| \xRightarrow{\text{по (M4) за } \underline{W}'} |z|\ \mathsf{O}'\ |y|$. $|z|\ \mathsf{O}'\ |y|$ и $|y| \leq' |x| \xRightarrow{\text{по (M6) за } \underline{W}'} |z|\ \mathsf{O}'\ |x|$.
- ако $x\ \mathsf{U}\ z$ то по аналогичен начин получаваме че $|z|\ \mathsf{U}'\ |y|$.

Така и в двата случая стигаме до противоречие с това че $|z|\ \overline{\mathsf{O}'}\ |x|$ и $|z|\ \overline{\mathsf{U}'}\ |y|$. Следователно допускането ни е погрешно и така $|x| = |y|$. $\square$

От факта че логиката допуска филтрации следва и тази теорема, която ни гарантира че MSUMRL притежава силното свойство на крайните модели.

Теорема 7.1. *Нека A е формула, като n е броя на подформулите ѝ. Следователно A не е теорема, тогава и само тогава, когато съществува модел $(\underline{W}, v)$ с носител W, такива че $|W| \leq 2^{9n+4}$ и $v(A) = 0$.*

Литература

[1] Yavor Nenov and Dimiter Vakarelov, *Modal Logics for Mereotopological Relations*, Advances in Modal Logic, 2008

[2] Peter Simons, *Parts. A Study in Ontology*, Oxford, Clarendon Press, 1987.

[3] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema, *Modal Logic*, Cambridge Univercity Press, 2001.

E-mail address: lucifer.dev.0@gmail.com