С О Ф И Й С К И   У Н И В Е Р С И Т Е Т
СВ.   "К Л И М Е Н Т   О Х Р И Д С К И"

Ф А К У Л Т Е Т   П О   М А Т Е М А Т И К А   И   И Н Ф О Р М А Т И К А

Христо Александров Ганчев

ω–НОМЕРАЦИОННИ СТЕПЕНИ

ДИСЕРТАЦИЯ

за получаване на образователната и научна степен "доктор"
по научната специалност 01.01.01 "Математическа логика"

Научен ръководител
проф. дмн Иван Сосков

СОФИЯ, 2008

Увод

Началото на теорията на степените е поставено с работата на Емил Пост [**27**] през 1944 г. В нея той забелязва, че до този момент в математическите изследвания се срещат само два типа рекурсивно номеруеми множества, а именно: от една страна рекурсивно номеруеми множества, чието допълнение също е рекурсивно номеруемо (като например $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$ и много други), а от друга рекурсивно номеруеми множества, които са пълни, т.е. можем да получим характеристичната функция на кое да е рекурсивно номеруемо множество, като композицията на характеристичната функция на пълното множество с рекурсивна функция (такова например е множеството K състоящо се от номерата на онези машини на Тюринг, които завършват работа над вход същия този номер). Въпросът, който Пост поставя, е има ли рекурсивно номеруеми множества, които да не са от тези два типа?

Отговорът на този въпрос дават Фридберг [**9**] и Мучник [**2**] и той е утвърдителен. Така пред математическата общност се открива светът на теорията на степените на неразрешимост. През последните 64 години са въведени повече от 10 различни структури от степени, измежду които тези на рекурсивно номеруемите степени ($\mathcal{R}$), тюринговите степени ($\mathcal{D}_T$), номерационните степени ($\mathcal{D}_e$), медведевите степени ($\mathfrak{M}$), степените на мучник ($\mathfrak{M}_e$). В следващите няколко параграфа ще се опитаме да дадем неформална, интуитивна представа за основната идея, стояща зад тези структури.

Всяка структура от степени започва с въвеждането на релация сводимост между обекти от дадено фиксирано множество. Така например в случая на $\mathcal{R}$, това са рекурсивно номеруемите множества, в този на $\mathcal{D}_T$ и $\mathcal{D}_e$ – подмножествата на $\mathbb{N}$, а в този на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_e$ множествата от подмножества на $\mathbb{N}$. Във всички случаи релацията на сводимост се означава със знака $\leq$, като обикновено той е придружен от индекс, с помощта на който да различаваме различните сводимости. Общата идея, стояща зад понятието сводимост, е че обектът A е сводим към обектът B, ако съществува алгоритъм преобразуващ B в A (тук придържайки съм към тезиса на Чърч-Тюринг, под алгоритъм разбираме машина на Тюринг използваща оракул B). Голямото разнообразие от сводимости, произлиза от ограниченията, които се налагат върху използваните алгоритми.

За да дадем обща идея как се въвеждат тези релации ще се съсредоточим върху тюринговата и номерационната сводимост, които ще играят важна роля в по-нататъчните ни разглеждания.

Приликата между двете сводимости е, че и двете не налагат никакви ограничения върху използваните алгоритми. Разликата е в начина, по който третираме понятието множество от естествени числа. В случая на тюринговата сводимост, третираме множеството като единен обект, който може да дава отговор на въпроса дали дадено естествено число му принадлежи или не. С други думи, в този случай, считаме, че знаем характеристичната функция на множеството. В случая на номерационната сводимост, считаме че знаем само функция от $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, чиято област от стойности е множеството, което ни интересува. Подобни функции наричаме номерации на множеството. С други думи, за множеството знаем само една негова апроксимация с крайни множества. Така, имаме достът само до положителната информация на множеството. Например, ако числото 5 принадлежи на множеството, то ще можем да установим това след краен брой експерименти (например изреждайки стойностите на номерацията за 0,1,2 и т.н.). В случай, обаче, че числото 5 не принадлежи на множеството, тази информация ще остане скрита за нас, колкото и краен брой въпроси да задаваме към номерацията. Така за да разберем, че числото 5 не принадлежи, трябва да направим някакъв вид "граничен преход", което нямаше да ни се наложи, в случай че разполагахме с характеристичната функция на множеството.

И така — множеството A е тюрингово сводимо към множеството B (записваме $A \leq_T B$), ако съществува алгоритъм преобразуващ характеристичната функция на B в характеристичната функция на A. Множеството A е номерационно сводимо към множеството B (записваме $A \leq B$), ако съществува алгоритъм преобразуващ всяка номерация на B в номерация на A. И двете релации ($\leq_T$ и $\leq_e$) са рефлексивни и транзитивни, поради което пораждат нетривиални релации на еквивалентност $\equiv_T$ и $\equiv_e$ по следния начин:

$$A \equiv B \iff A \leq B \;\&\; B \leq A.$$

Класовете на еквивалентност по релацията $\equiv_T$ наричаме тюрингови степени, а тези по $\equiv_e$ — номерационни. Преднаредбите $\leq_T$ и $\leq_e$ се превръщат в частични наредби в съответните множества от степени.

За нашите разглеждания ще бъде важна още една сводимост между множества, а именно сводимостта "рекурсивно номеруемо в". Тя, за разлика от двете горе споменати сводимости, третира по различен начин сводимото и сводящото множество. Казваме, че A

е рекурсивно номеруемо в B (записваме $A \leq_{r.e.} B$), ако има алгоритъм, преобразуващ характеристичната функция на B в номерация на A.

За разлика от $\leq_T$ и $\leq_e$ релацията $\leq_{r.e.}$ е само рефлексивна и значи не е преднаредба. Заради това, не бихме могли да получим степенна структура въз основа на тази релация. Бихме могли обаче да направим нещо друго, което е безсмислено в предните два случая. С помощта на релацията $\leq_{r.e.}$ можем да въведем релация $\leq_*$ чрез

$$A \leq_* B \iff \forall X (B \leq_{r.e.} X \Longrightarrow A \leq_{r.e.} X).$$

При тази дефиниция по-правилно е да четем знака $\leq$ като "по-просто от" вместо "сводимо към". Наистина, дефиницията по никакъв начин не ни подсказва какъвто и да е било алгоритъм, чрез който да преобразуваме множеството B в множеството A. Единственото, което дефиницията казва, е, че всяко множество "кодиращо" B "кодира" и A и в този смисъл, действително, A е по-просто от B.

Изненадващо, Селман **[32]** показва, че релацията $\leq_*$ действително е релация на сводимост и то не коя да е, а номерационната сводимост.

Сега нека си поставим следната задача: да се опитаме да въведем сводимост $\leq_\omega$ между редица от множества от естествени числа и множество от естествени числа. Придържайки се към основната идея за сводимост, трябва да осигурим алгоритъм преобразуващ множеството в редицата. В случай, че не наложим ограничения върху допустимите алгоритми (по точно, върху това, как те използват оракула), ще загубим структурата на редицата, т.е. това че тя има първи, втори, трети и т.н. членове. От друга страна не бихме искали да ограничаваме прекалено много изчислителната способност на използваните алгоритми.

В **[39]** и **[36]** е предложено едно "естествено" решение на този проблем, което се възползва от операцията скок на множество.

Операцията скок е унарна операция, която се въвежда при разглеждането на тюринговата и номерационната сводимост и има следните свойства по отношение на тях:

(1) $X \leq X' \;\&\; X' \not\leq X$;
(2) $X \leq Y \Longrightarrow X' \leq Y'$.

Така всяко множество X поражда една монотонно растяща редица

$$X \lneq X' \lneq X'' \lneq \cdots \lneq X^{(n)} \lneq \dots,$$

която бихме могли да разглеждаме, като копие на естествените числа.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots \\ X & X' & X'' & \dots & X^{(n)} & \dots \end{array}$$

От своя страна, всяка редица $\{A_n\}_{n<\omega}$ от множества от естествени числа е всъщност изображение на множеството на естествените числа в $2^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots \\ A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_n & \dots \end{array}$$

Комбинирайки двете редици получаваме

$$\begin{array}{cccccc} X & X' & X'' & \dots & X^{(n)} & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots \\ A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_n & \dots \end{array}$$

Така всъщност редицата $\{A_n\}_{n<\omega}$ е сводима към множеството X, ако A_0 е сводимо към X, A_1 е сводимо към X' и т.н. Тъй като, обаче, искаме да имаме единен алгоритъм ще изискваме да имаме и алгоритъм, който по n да ни казва, кой точно алгоритъм да използваме за да сведем A_n към $X^{(n)}$.

Остава само да подберем две неща: дали ще използваме тюринговия или номерационния скок и с коя сводимост ще заменим стрелките. В дисертацията ще се спрем на номерационния скок и номерационната сводимост. Така, в крайна сметка, ще казваме, че редицата $\{A_n\}_{n<\omega}$ е сводима към множеството X (и ще записваме $\{A_n\}_{n<\omega} \leq_\omega X$), ако съществува алгоритъм, който за всяко n ни дава алгоритъм, преобразуващ произволна номерация на n-тия номерационнен скок на X в номерация на A_n.

Ясно е, че релацията $\leq_\omega$ не би могла да бъде нито рефлексивна, нито симетрична (или антисиметрична), нито транзитивна, тъй като тя сравнява обекти различни по същността си. Така, тя сама по себе си не би могла да породи степенна структура. От друга страна, както при сводимостта $\leq_{r.e.}$, бихме могли да използваме релацията $\leq_\omega$ за да въведем релация "по-проста" (която отново ще отбелязваме с $\leq_\omega$) между редици $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B} \iff \forall X \subseteq \mathbb{N}[\mathcal{B} \leq_\omega X \Longrightarrow \mathcal{A} \leq_\omega X].$$

Релацията $\leq_\omega$ между редици е преднаредба и също както тюринговата и номерационната сводимост поражда степенна структура, която ще означаваме с $\mathcal{D}_\omega$ и ще наричаме структурата на ω-номерационните степени.

Целта на дисертацията е да изследва основните свойства на тази структура, като свойства на изброимити идеали, определимост от първи ред, локална теория (теорията на степените под скока на най-малката степен) и влагания на други структури.

Глава 1 е уводна и има за цел да фиксира основните понятия и означения и да изложи основните факти за тюринговата и номерационната сводимост (съответно за тюринговите и номерационните степени), които ще бъдат необходими при по-нататъчните разглеждания.

В Глава 2 е въведена релацията сводимост между редица и множество и са изследвани някои от нейните основни свойства.

В Глава 3 е въведена горната полу-решетка на ω-номерационните степени и са показани нейните основни свойства.

В Глава 4 се разглеждат изброими идеали в $\mathcal{D}_\omega$. Показано е, че по свойствата си те съществено се различават от изброимитие идеали в $\mathcal{D}_T$ и $\mathcal{D}_e$. По-точно, оказва се, че не всеки изброим идеал в $\mathcal{D}_\omega$ е сечение на два главни идеала, нещо което е изпълнено в $\mathcal{D}_T$ и $\mathcal{D}_e$. Така възниква естествения въпрос, кои са идеалите в $\mathcal{D}_\omega$, притежаващи точна двойка. В тази глава е даден частичен отговор на този въпрос, като е посочен клас идеали не притежаващи точна двойка и клас идеали притежаващи точна двойка.

В Глава 5 е изследвана операцията скок в $\mathcal{D}_\omega$. Показана е една силна теорема за обръщане на скока, с чияно помощ е възможно да въведем операция обръщане на скока (нещо невъзможно в $\mathcal{D}_T$ и $\mathcal{D}_e$). Благодарение на тази нова операция е показано, че в ω-номерационните степени със скок е определима с формула от първи ред подструктура изоморфна на номерационните степени. Освен това е показано, че групите на автоморфизмите на ω-номерационните степени със скок и тази на автоморфизмите на номерационните степени са изоморфни.

Галава 6 е посветена на локалната теория на $\mathcal{D}_\omega$ — по-точно на йерархията на ниските и високи степени. Показани са необходими и достатъчни условия за принадлежност към различните класове на тази йерархията.

В Глава 7 са разгледани различни влагания на номерационните степени в $\mathcal{D}_\omega$. Показано е, че съществуват безброй много различни влагания запазващи или операцията точна горна граница или операцията скок и е показано необходимо и достатътчно условие за съществуване на влагане запазващо и двете операции.

Бих искал да изкажа благодарността си на всички колеги от катедрата по "Математическа логика", ФМИ, СУ, които през последните 10 години, бяха мои учители, а сега вече са и мои приятели. Специална благодарност бих искал да изкажа на научния си ръководител проф. И. Сосков, който разкри пред мен тайните на теорията на степените, с когото беше изключително удоволствие да работя и с когото се надявам да работя и занапред.

София,
Септември 2008 г. Авторът

Съдържание

Глава 1

Тюрингови и номерационни степени

Целта на тази глава е да фиксира основните означения, които ще бъдат използвани, както и да напомни основните дефиниции на тюрингови и номерационни степени, а също така и определенията за краен и безкраен скок. Ще предполагаме, че читателят е запознат с тези понятия, така че в тази глава по-голямата част от твърденията ще бъдат без доказателство. За подробен увод в теорията на тюринговите и номерационните степени препоръчваме **[29]**, **[24]** и **[25]**.

1.1. Основни означения

Както е обичайно, с $\mathbb{N}$ означаваме множеството на естествените числа. Когато не е казано друго, под множество ще разбираме множество от естествени числа.

Ще предполагаме, че читателят е запознат с понятията частично рекурсивна функция и частична функция рекурсивна в множество A. Всяка такава функция притежава така наречен гьоделев индекс, като различни функции имат различни индекси, а от друга страна всяко естествено число е индекс на такава функция. Ако не е казано друго, с φ_p ще означаваме частично рекурсивната функция с гьоделев индекс p. Съответно, с φ_p^A ще означаваме частичната функция рекурсивна в A с гьоделев индекс p. Рекурсивни наричаме всички частично рекурсивни функции, които са дефинирани за всяко естествено число. Освен това за дадено естествено p с $\{p\}(x)$ ще означаваме стойността на φ_p в точката x.

С W_p^A ще означаваме множеството $W_p^A = \mathrm{dom}(\varphi_p^A)$. Ще казваме, че множеството B е рекурсивно номеруемо в A, и ще пишем $A \leq_{r.e.} B$, ако $B = W_p^A$, за някой индекс p. Множествата, рекурсивно номеруеми в празното, наричаме рекурсивно номеруеми и ще означаваме с W_p вместо с $W_p^{\emptyset}$.

Ако не е казано друго, с D_u ($u \in \mathbb{N}$) ще означаваме крайното множество D, за което $u = \sum\limits_{y \in D} 2^y$. В такъв случай казваме, че u е каноничен код (или индекс) на множеството.

За произволни естествени числа x и y с $\langle x, y\rangle$ ще означаваме числото $2^x(2y+1)-1$, което ще наричаме код на наредената двойка (x, y).

Ще предполагаме, че е фиксирано ефективно кодиране на всички крайни редици от естествени числа. Кода на редицата $x_0, x_1, \ldots, x_k$ ще означаваме (отново) с $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle$ За да не настъпва объркване с кода на наредената двойка ще направим следната уговорка: по подразбиране $\langle x_1, x_2\rangle$ е кодът на наредената двойка (x_1, x_2). Ако искаме да използваме това означение за кода на редицата x_1, x_2 ще казваме това изрично. Нека да напомним, че ефективно кодиране на крайните редици означава, че всяко число е код на крайна редица, като при това са фиксирани две рекурсивни функции $\lambda x.\mathrm{lh}\,(x)$ и $\lambda i, x.(x)_i$, такива че, ако $a = \langle x_0, x_1, \ldots, x_k\rangle$, то $\mathrm{lh}\,(a) = k + 1$ и $\forall(0 \leq i < \mathrm{lh}\,(a))((a)_i = x_i)$.

За две естествени числа a и x с $a*x$ ще означаваме кодът на редицата, която се получава като в края на редицата с код a залепим x, т.е. $a * x = \langle (a)_0, (a)_1, \ldots, (a)_{\mathrm{lh}\,(a)-1}, x\rangle$.

За две множества A и B полагаме

$$A \oplus B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x + 1 \mid x \in B\}.$$

Ако $I \subseteq \mathbb{N}$ и за всяко $i \in I$ е фиксирано множество A_i с $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ ще означаваме множеството

$$\bigoplus_{i\in I} A_i = \{\langle x, i\rangle \mid x \in A_i\}.$$

Ако A е множество от естествени числа с $A[i]$ ще означаваме множеството

$$A[i] = \{x \mid \langle x, i\rangle \in A\}.$$

За две множества A и B с $A(B)$ ще означаваме множеството

$$A(B) = \{\langle x, u\rangle \in A \mid D_u \subseteq B\}.$$

Ако f е частично изображение на $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, под $f(x) \simeq y$ ще имаме предвид, че f е дефинирано в x и приема стойност y. С $\mathrm{Graph}\,(f)$ ще означаваме множеството

$$\mathrm{Graph}\,(f) = \{\langle x, y\rangle \mid f(x) \simeq y\}.$$

За две частични изображения f и g ще казваме $f \subseteq g$, ако за всяко x и y е изпълнено

$$f(x) \simeq y \Longrightarrow g(x) \simeq y,$$

с други думи, ако дефиниционната област на f се съдържа в дефиниционната област на g и f и g съвпадат върху дефиниционната област на f.

Ако $f_0 \subseteq f_2 \subseteq \ldots \subseteq f_n \subseteq \ldots$ с $\bigcup_n f_n$ ще означаваме изображението действащо по правилото

$$\bigcup_n f_n(x) \simeq y \iff \exists n(f_n(x) \simeq y).$$

Ако f е частично изображение от $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, а $A \subseteq \mathbb{N}$ полагаме

$$f[A] = \{y \mid (\exists x \in A)(f(x) \simeq y)\},$$

$$f^{-1}[A] = \{x \mid (\exists y \in A)(f(x) \simeq y)\}.$$

Накрая, нека $\Phi \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ще казваме, че

"за всяко n съществува x, такова че $(n, x) \in \Phi$ равномерно по n",

ако съществува рекурсивна функция g, такава че за всяко n,

$$(n, g(n)) \in \Phi$$

Ако не е казано друго, с главни латински букви (евентуално с индекси) ще означаваме множествата от естествени числа. С калиграфските букви $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и т.н. ще означаваме безкрайните редици от множества от естестствени числа (дължината на редиците ще зависи от контекста). Ще използваме съответните печатни букви с индекси за да означаваме съответните координати на редицата. Така например, n-тата координата на редицата $\mathcal{A}$ ще означаваме с A_n (винаги ще започваме от координата 0). С други думи $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n \ldots)$.

1.2. Тюрингови степени

Ще казваме, че множеството B е тюрингово сводимо към множеството A и ще пишем $B \leq_T A$, ако съществува естествено число p, такова че $\chi_B = \varphi_p^A$, където χ_B е характеристичната функция на B. Релацията $\leq_T$ е рефлексивна и транзитивна, което ни позволява да дефинираме релацията на еквивалентност $\equiv_T$ чрез

$$A \equiv_T B \iff A \leq_T B \;\&\; B \leq_T A.$$

Класовете на еквивалентност по релацията $\equiv_T$ наричаме тюрингови степени на неразрешимост. Използваме означението

$$\mathbf{d}_T(A) = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid B \equiv_T A\}$$

Съвкупността от всички тюрингови степени означаваме с $\mathbf{D}_T$. В $\mathbf{D}_T$ въвеждаме релация на частична наредба

$$\mathbf{d}_T(B) \leq \mathbf{d}_T(A) \iff B \leq_T A.$$

Оказва се, че частично нареденото множество $(\mathbf{D}_T, \leq)$ е горна полу-решетка, т.е. всяко двуелементно множество $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ има точна горна граница $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$, като при това, ако $\mathbf{a} = \mathbf{d}_T(A)$ и $\mathbf{b} = \mathbf{d}_T(B)$, то $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{d}_T(A \oplus B)$. Нещо повече — Спектър[**41**] доказва, че не всяко двуелементно множество има точна долна, граница и значи $(\mathbf{D}_T, \leq)$ не е решетка.

Степента $\mathbf{0}_T = \mathbf{d}_T(\emptyset)$ е най-малката от всички тюрингови степени. Така $(\mathbf{D}_T, \mathbf{0}_T, \leq, \vee)$ е горна полу-решетка с най-малък елемент. Структурата $(\mathbf{D}_T, \mathbf{0}_T, \leq, \vee)$ ще означаваме с $\mathcal{D}_T$.

Освен бинарната операция $\vee$ в $\mathbf{D}_T$ се дефинира и едноместна операция $'$, наречена скок, чрез правилото

$$(\mathbf{d}_T(A))' = \mathbf{d}_T(A'_T),$$

където $A'_T = \{x \mid \ x \in W_x^A\}$. Множеството A'_T наричаме тюрингов скок на A.

Както е обичайно, с $\mathbf{a}^{(n)}$ и $A_T^{(n)}$ ще означаваме съответно n-тата итерация на операциите $'$ и J_T.

Структурата $(\mathbf{D}_T, \mathbf{0}_T, \leq, \vee, ')$ ще означаваме с $\mathcal{D}_T{}'$.

1.3. Номерационни степени

Казваме, че множеството B е сводимо по номеруемост към множеството A и записваме $B \leq_e A$, ако $B = W_i(A)$ за някое естествено число i.

Преди да дадем дефиницията на номерационните степени, ще формулираме един резултат за равномерност, който ще ни послужи и в следващите глави.

Твърдение 1.3.1. *Съществуват рекурсивни функции $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{i}$, такива че*

(1) $W_{\mathfrak{c}(i,j)}(A) = W_i(W_j(A))$, *за всяко i и j и множество A;*
(2) $W_{\mathfrak{j}(i,j)}(A) = W_i(A) \oplus W_j(A)$, *за всяко i и j и множество A;*
(3) *Ако I е множество от индекси и на всяко $i \in I$ сме съпоставили множества A_i и B_i, и z е такова, че $\forall i \in I(A_i = W_{\varphi_z(i)}(B_i))$, то $\bigoplus_{i \in I} A_i = W_{\mathfrak{i}(z)}(\bigoplus_{i \in I} B_i)$.*

Доказателство. Ще докажем само последното свойство (първите две са малко или много очевидни). За целта нека I е индексно множество и за всяко $i \in I$ сме фиксирали множества A_i и B_i. Нека $\lambda v, i.h(v,i)$ е рекурсивна функция, такава че за всяко v и i

$$D_{h(v,i)} = \{\langle x, i\rangle \mid x \in D_v\}.$$

Ясно е, че такава функция съществува.

Нека сега z е естествено число и да разгледаме множеството

$$W = \{\langle\langle x, i\rangle, h(v,i)\rangle \mid \langle x, v\rangle \in W_{\varphi_z(i)}\}.$$

Ясно, е че множеството W е рекурсивно номеруемо и можем да получим негов индекс равномерно по z. Нека $\mathfrak{i}$ е рекурсивната функция осигуряваща тази равномерност.

За да докажем, че $\mathfrak{i}$ има исканото свойство нека z е, такова че $A_i = W_{\varphi_z(i)}(B_i)$ за всяко $i \in I$. Тогава за всяко x и всяко j имаме

$$\begin{aligned}
\langle x, j\rangle \in \bigoplus_{i \in I} A_i &\iff j \in I \;\&\; x \in A_j \\
&\iff j \in I \;\&\; x \in W_{\varphi_z(j)}(B_j) \\
&\iff j \in I \;\&\; \exists v[\langle x, v\rangle \in W_{\varphi_z(j)} \;\&\; D_v \subseteq B_j]
\end{aligned}$$

$$\iff j \in I \ \& \ \exists v[\langle\langle x, j\rangle, h(v,j)\rangle \in W_{\mathfrak{i}(z)} \ \& \ D_{h(v,j)} \subseteq \{\langle y, j\rangle \mid y \in B_j\}]$$

$$\iff \langle x, j\rangle \in W_{\mathfrak{i}(z)}\left(\bigoplus_{i \in I} B_i\right).$$

□

Нека сега се върнем към въвеждането на структурата на номерационните степени. Релацията $\leq_e$ е рефлексивна и транзитивна, което ни дава право да въведем следната релация на еквивалентност върху множества от естествени числа

$$A \equiv_e B \iff A \leq_e B \ \& \ B \leq_e A.$$

Класовете на еквивалентност по релацията $\equiv_e$ наричаме номерационни степени. Използваме означението

$$\mathbf{d}_e(A) = \{B \mid B \equiv_e A\}.$$

Съвкупността от всички номерационни степени означаваме с $\mathbf{D}_e$, т.е. $\mathbf{D}_e = \{\mathbf{d}_e(A) \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$. Релацията $\leq_e$ поражда релация на частична наредба $\leq$ в $\mathbf{D}_e$, а именно

$$\mathbf{d}_e(B) \leq \mathbf{d}_e(A) \iff B \leq_e A.$$

Тъй като за всяко $A \subseteq \mathbb{N}$, $\emptyset \leq_e A$, то $\mathbf{d}_e(\emptyset)$ е най-малкият елемент в частично нареденото множество $(\mathbf{D}_e, \leq)$. Ще означаваме, този най-малък елемент с $\mathbf{0}_e$.

Както и при тюринговите степени, степента $\mathbf{d}_e(A \oplus B)$ е точната горна граница на множеството $\{\mathbf{d}_e(A), \mathbf{d}_e(B)\}$, т.е.

$$\mathbf{d}_e(A \oplus B) = \mathbf{d}_e(A) \vee \mathbf{d}_e(B)$$

Така $(\mathbf{D}_e, \mathbf{0}_e, \leq, \vee)$ е горна полу-решетка с най-малък елемент.

Възниква въпросът, дали всеки две номерационни степени имат точна долна граница. Отговорът на този въпрос е даден от Кейз **[3]** и е отрицателен.

Вече разполагаме с две горни полу-решетки — тази на тюринговите степени и тази на номерационните степени. Майхил **[23]** показва, че полу-решетката на тюринговите степени се влага в тази на номерационните степени, чрез роджърсовото влагане $\iota : \mathbf{D}_T \to \mathbf{D}_e$, действащо по правилото $\iota(\mathbf{d}_T(A)) = \mathbf{d}_e(A^+)$, където $A^+ = A \oplus (\mathbb{N} \backslash A)$. Това е така, тъй като

$$A \leq_T B \iff A^+ \leq_e B^+.$$

В сила е и следната по силна връзка между тюринговата и номерационната сводимост доказана в **[29]**.

Лема 1.3.2. *Съществуват рекурсивни функции $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$, такива, че за всяко i и множества A и B е изпълнено*

(1) $\chi_A = \varphi_i^B \Longrightarrow A^+ = W_{\mathfrak{f}(i)}(B^+)$
(2) $A^+ = W_i(B^+) \Longrightarrow \chi_A = \varphi_{\mathfrak{g}(i)}^B$.

Тъй като за всяко множество X, $(X^+)^+ \equiv_e X^+$, то от дефиницията на изображението ι следва

$$Range(\iota) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_e \mid (\exists A \in \mathbf{a})(A \equiv_e A^+)\}.$$

Множества, за които $A^+ \equiv_e A$, наричаме тотални. Съответно, една номерационна степен е тотална, ако съдържа тотално множество. Така, областта от стойностите на ι са точно тоталните номерационни степени.

Не всички номерационни степени са тотални. Степените, които не са тотални наричаме частични, а множествата, които ги пораждат — частични множества. Оказва се, че всяка номерационна степен е точна долна граница на две частични и следователно съществуват континуум много частични степени. Нещо повече — съгласно Майхил [**23**] "почти всички" номерационни степени са частични.

Накрая на раздела, нека отбележим връзката между номерационната сводимост и релацията рекурсивно номеруемо в ($\leq_{r.e.}$), показана от Селман [**32**].

Теорема 1.3.3. *За всеки две множества A и B е в сила*

$$A \leq_e B \iff \forall X(B \leq_{r.e.} X \Rightarrow A \leq_{r.e.} X).$$

В частност, за всеки две номерационни степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \iff \forall(\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T)(\mathbf{b} \leq \iota(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{a} \leq \iota(\mathbf{x})).$$

1.4. Номерационен скок

Както в полу-решетката на тюринговите степени, така и в полу-решетката на номерационните степени се въвежда едноместна операция скок. За целта въвеждаме първо номерационен скок на множество, който означаваме с $'_e$, като полагаме

$$A'_e = E_A^+, \text{ където } E_A = \{\langle x, i\rangle \mid x \in W_i(A)\}.$$

Съгласно Купър [**5**] и МакЕвой [**22**] операцията номерационен скок има следните основни свойства

(1J) $A \lneq_e A'_e$.
(2J) $B \leq_e A \Longrightarrow B'_e \leq_e A'_e$.
(3J) Множеството A'_e е тотално.
(4J) $(A'_T)^+ \equiv_e (A^+)'_e$.

Свойства (1J) и (2J) ни дават право да въведем операцията скок на номерационна степен (която ще означаваме с $'$), чрез

$$\mathbf{d}_e(A)' = \mathbf{d}_e(A'_e).$$

Свойство (4J) пък ни казва, че роджърсовото влагане запазва операцията скок, а именно

$$\iota(\mathbf{a}') = (\iota(\mathbf{a}))'.$$

Това ни дава право да считаме, че $(\mathbf{D}_T, \mathbf{0}_T, \leq, \vee, ') \subseteq (\mathbf{D}_e, \mathbf{0}_e, \leq, \vee, ')$.

От свойство (1J) получаваме, че $\mathbf{0}_e \lneq \mathbf{0}_e{}'$ и значи операцията скок не е сюрективна. От свойство (3J) пък можем да заключим, че само тоталните степени над $\mathbf{0}_e{}'$ могат да бъдат номерационни скокове. Съгласно Теорамата на Фридберг за обръщане на скока [**8**] е вярно нещо повече: за всяка номерационна степен $\mathbf{a}$ е в сила

$$\mathbf{0}_e{}' \leq \mathbf{a} \;\&\; \mathbf{a} \text{ е тотална} \iff \exists \mathbf{b}(\mathbf{a} = \mathbf{b}').$$

По този начин тоталните степени над $\mathbf{0}_e{}'$ са определими в $\mathcal{D}_e{}'$ с формула от първи ред.

Както е обичайно с $A_e^{(n)}$, $n \geq 0$, ще означаваме n-тия номерационен скок на множеството A. По-точно, $A_e^{(n)}$ се дефинира, чрез

(1) $A^{(0)} = A$.
(2) $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'_e$.

Нека отбележим, че съгласно [**5, 22**] свойства (2J) и (4J) могат да бъдат усилени по следния начин.

Твърдение 1.4.1. *Съществуват рекурсивни функции g, h_1 и h_2, такива че за всяко множество A*

(2U) $W_i(A)_e^{(n)} = W_{g(i)}(A_e^{(n)})$, *за всяко n;*
(4U) $(A_T^{(n)})^+ = W_{h_1(n)}\left((A^+)_e^{(n)}\right)$ *и* $(A^+)_e^{(n)} = W_{h_2(n)}\left((A_T^{(n)})^+\right)$, *за всяко n.*

1.5. Системата $\mathcal{O}$ и безкраен скок

Дефинираме ω-скок (тюрингов и номерационен) на A чрез

$$A^{(\omega)} = \bigoplus_{n<\omega} A^{(n)},$$

Разполагайки с ω скок на множеството A, бихме могли да продължим да итерираме операцията скок, като кажем, че $A^{(\omega+n)} = (A^{(\omega)})^{(n)}$. При това трансфинитно продължение ще се сблъскаме с проблем на стъпка 2ω. Ако продължим по аналогия с $A^{(\omega)}$ би трябвало да дефинираме $A^{(2\omega)}$, като $A^{(2\omega)} = \{\langle x, \alpha\rangle \mid \alpha < 2\omega \;\&\; x \in \mathcal{A}^{(\alpha)}\}$. Такава дефиниция, обаче, не е коректна, тъй като не е ясно, какво трябва да разбираме под код на наредена двойка естествено число–ординал. За да можем все пак да продължим трансфинитната итерация, вместо самите ординали използваме означения за тях, които са естествени числа. В нашите разглеждания ще използваме системата за означения $\mathcal{O}$ въведена от Клиини [**17**]. За подробно изложение виж [**29**].

Системата $\mathcal{O}$ се състои от естествени числа, на всяко едно от които е съпоставен ординал и частична наредба $<_{\mathcal{O}}$. Дефинираме множеството от естествени числа $\mathcal{O}$, наредбата $<_{\mathcal{O}}$ и изображение $\lambda x.|x|$, което на всяко число от $\mathcal{O}$ съпоставя ординал чрез следната индукция:

(1) $1 \in \mathcal{O}$ и $|1| = 0$.

(2) Ако $x \in \mathcal{O}$ и $|x| = \alpha$, то $2^x \in \mathcal{O}$, $|2^x| = \alpha + 1$ и

$$\forall y[y <_{\mathcal{O}} x \vee y = x \Rightarrow y <_{\mathcal{O}} 2^x].$$

(3) Ако p е такова, че φ_p е тотална и $\forall m \forall n[m < n \Rightarrow \varphi_p(m) <_{\mathcal{O}} \varphi_p(n)]$, то $3.5^p \in \mathcal{O}$, $|3.5^p| = \bigcup_{n<\omega} |\varphi_p(n)|$ и

$$\forall y[\exists n[y <_{\mathcal{O}} \varphi_p(n)] \Rightarrow y <_{\mathcal{O}} 3.5^p].$$

Ако на числото x е съпоставен ординала α, казваме, че x е означение за α. Означенията в $\mathcal{O}$ са такива, че ако α има означение в $\mathcal{O}$, то и всеки ординал по-малък от него има означение. Ясно е, че ординалите по-големи или равни на ω имат безброй много означения.

Непосредствено от дефиницията следва, че разполагаме с ефективен метод, с който да разбираме дали едно означение е означение на 0, ординал наследник или граничен ординал. Съгласно **[17]** ординалите, които имат означение в системата $\mathcal{O}$ са точно рекурсивните ординали. Нещо повече — множеството $\{y \mid y <_{\mathcal{O}} x\}$, за произволно означение x, е добре наредено по отношение на $<_{\mathcal{O}}$ и освен това е рекурсивно номеруемо. При това гьоделевият индекс на това множество се получава равномерно по x, т.е. съществува рекурсивна функция g, такава че за всяко означение x

$$\{y \mid y <_{\mathcal{O}} x\} = W_{g(x)}.$$

По този начин, знаейки означение за ординала α, ние знаем и означения за всички ординали по-малки от него.

Накрая, нека направим следната уговорка: ако α е граничен рекурсивен ординали и сме фиксирали означение 3.5^p за него, то под $\lambda n.\alpha(n)$ ще имаме предвид рекурсивната функция φ_p.

Нека сега да видим, как с помощта на системата $\mathcal{O}$ дефинираме α-ти скок за произволен рекурсивен ординал α.

Първо ще разгледаме тюринговият случай.

Дефиниция 1.5.1. *Нека A е произволно множество от естествени числа. Дефинираме изображението $H_A : \mathcal{O} \to 2^{\mathbb{N}}$ чрез*

(1) $H_A(1) = A$.
(2) $H_A(2^x) = H_A(x)'_T$
(3) $H_A(3.5^p) = \{\langle y, x\rangle \mid x <_{\mathcal{O}} 3.5^p \;\&\; y \in H_A(x)\}$.

Така дефинираните функции H_A имат следните свойства доказани от Спектър **[40]** (виж **[29]**):

(TJ1) За всяко $x, y \in \mathcal{O}$, ако $|x| = |y|$, то $H_A(x) \leq_T H_A(y)$, равномерно по x и y.
(TJ2) За всяко $A \leq_T B$ и всяко $x \in \mathcal{O}$, $H_A(x) \leq_T H_B(x)$, равномерно по x.

Сега за произволен рекурсивен ординал α, дефинираме α скок на тюринговата степен $\mathbf{a}$ чрез

$$\mathbf{a}^{(\alpha)} = \mathbf{d}_T(H_A(x)),$$

където A е произволно множество от $\mathbf{a}$, а $x \in \mathcal{O}$ е произволно означение за α. Свойства (TJ1) и (TJ2) ни гарантират коректността на дефиницията.

За да въведем α-ти скок на номерационна степен $\mathbf{a}$, ще разсъждаваме аналогично на тюринговия случай. Първо въвеждаме функциите E_A, които са номерационен аналог на функциите H_A.

Дефиниция 1.5.2. *Нека A е произволно множество от естествени числа. Дефинираме изображението $E_A : \mathcal{O} \to 2^{\mathbb{N}}$ чрез*

(1) $E_A(1) = A$.
(2) $E_A(2^x) = E_A(x)'_e$
(3) $E_A(3.5^p) = \{\langle y, x\rangle \mid x <_{\mathcal{O}} 3.5^p \;\&\; y \in E_A(x)\}$.

За да можем да завършим дефиницията на α-ти скок на номерационна степен, първо ще трябва да докажем свойства аналогични на (TJ1) и (TJ2), а именно

(EJ1) За всяко $x, y \in \mathcal{O}$, ако $|x| = |y|$, то $E_A(x) \leq_e E_A(y)$, равномерно по x и y.
(EJ2) За всяко $A \leq_e B$ и всяко $x \in \mathcal{O}$, $E_A(x) \leq_e E_B(x)$, равномерно по x.

Ще докажем (EJ1) и (EJ2), като ги сведем до (TJ1) и (TJ2). Ще се възползваме от следната Лема за рекурсията (виж **[29]**).

Лема 1.5.3. *Нека $(S, \leq_S)$ е частично наредено множество, като S няма безкрайно намаляваща редица. Нека $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Нека още съществува частично рекурсивна функция η (на два аргумента), такава че за всяко $y \in S$ и всяко z, за което φ_z има свойството*

$$(\forall x <_S y)(\varphi_z(x) \text{ е дефинирано } \& \ (x, \varphi_z(x)) \in R),$$

е в сила $\eta(z, y)$ е дефинирано и $(y, \eta(z, y)) \in R$. Тогава съществува частично рекурсивна функция ψ, такава че за всяко $x \in S$, $\psi(x)$ е дефинирана и $(x, \psi(x)) \in R$.

Лема 1.5.4. *Нека A е тотално множество. Тогава*

$$E_A(x) \equiv_e H_A(x)^+ \text{ равномерно по } x.$$

Първо ще докажем, че $E_A(x) \leq_e H_A(x)^+$, равномерно по x. Нека фиксираме рекурсивни функции $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}_1$ и $\mathfrak{i}_2$, и числа $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$ и $\mathfrak{j}_3$ такива че

- $W_i(W_j(X)) = W_{\mathfrak{c}_1(i,j)}(X)$;
- $\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_{\mathfrak{c}_2(i,j)}$;
- $(W_i(X))'_e = W_{\mathfrak{g}(i)}(X'_e)$;
- $\bigoplus_{n\in I} W_{\varphi_p(n)}(X_n) = W_{\mathfrak{i}(p)}(\bigoplus_{n\in I} A_n)$;

- $X = W_{\mathfrak{j}_1}(X^+)$;
- $(X^+)'_e = W_{\mathfrak{j}_2}((X'_T)^+)$;
- $\bigoplus_{n\in I} X_n^+ = W_{\mathfrak{j}_3}((\bigoplus_{n\in I} X_n)^+)$.

Такива има съгласно казаното в предните раздели.

За да приложим Лема 1.5.3, нека $(S, <_S) = (\mathcal{O}, <_\mathcal{O})$ и нека да разгледаме релацията

$$R = \{(x,t) \mid E_A(x) = W_t(H_A(x)^+)\}.$$

Остава само да покажем, че съществува частично рекурсивна функция η, такава че за всяко $y \in \mathcal{O}$ и всяко z, за което φ_z има свойството

$$\text{(LR)} \qquad (\forall x <_\mathcal{O} y)(\varphi_z(x) \text{ е дефинирано } \& \ (x, \varphi_z(x)) \in R),$$

е в сила $\eta(z,y)$ е дефинирано и $(y, \eta(z,y)) \in R$.

Ще разгледаме трите възможни случая за y. Нека първо $y = 1$. За произволно z полагаме $\eta(z,1) = \mathfrak{j}_1$.

Нека сега $y = 2^x$ за някое x. Тогава за произволно z полагаме $\eta(z,y) = \mathfrak{c}(\mathfrak{g}(\varphi_z(x)), \mathfrak{j}_2)$.

Нека сега $y = 3.5^p$ за някое p. Тогава за произволно z полагаме $\eta(z,y) = \mathfrak{c}_1(\mathfrak{i}(\mathfrak{c}_2(z,p)), \mathfrak{j}_3)$.

Очевидно така дефинираната функция η е частично рекурсивна. Нека сега фиксираме произволни $y \in \mathcal{O}$ и $z \in \mathbb{N}$, за които φ_z удовлетворява (LR). Ще докажем, че $(y, \eta(z,y)) \in R$ или с други думи $E_A(y) = W_{\eta(z,y)}(H_A(y)^+)$.

Нека първо $y = 1$. Тогава

$$E_A(y) = A = W_{\mathfrak{j}_1}(A^+) = W_\eta(z,y)(H_A(y)^+).$$

Нека сега $y = 2^x$. Тогава

$$E_A(y) = (E_A(x))'_e = (W_{\varphi_z(x)}(H_A(x)^+))'_e = W_{\mathfrak{g}(\varphi_z(x))}((H_A(x)^+)'^e) = \\ W_{\mathfrak{g}(\varphi_z(x))}(W_{\mathfrak{j}_2}((H_A(x)'_T)^+)) = W_{\mathfrak{c}_1(\mathfrak{g}(\varphi_z(x)),\mathfrak{j}_2)}(H_A(y)^+) = \\ W_{\eta(z,y)}(H_A(y)^+).$$

Нека накрая $y = 3.5^p$. Тогава

$$E_A(y) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_A(\varphi_p(n)) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W_{\varphi_z(\varphi_p(n))}(H_A(\varphi_p(n))^+) = \\ \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W_{\varphi_{\mathfrak{c}_2(z,p)}(n)}(H_A(\varphi_p(n))^+) = W_{\mathfrak{i}(\mathfrak{c}_2(z,p))}\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_A(\varphi_p(n))^+\right) = \\ W_{\mathfrak{i}(\mathfrak{c}_2(z,p))}\left(W_{\mathfrak{j}_3}\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_A(\varphi_p(n))^+\right)\right) = W_{\mathfrak{c}_1(\mathfrak{i}(\mathfrak{c}_2(z,p)),\mathfrak{j}_3)}(H_A(y)^+) = \\ W_{\eta(z,y)}(H_A(y)^+).$$

Сега от Лема 1.5.3 следва, че $E_A(x) \leq_e H_A(x)^+$ равномерно по x.

Обратната посока ($H_A(x)^+ \leq_e E_A(x)$, равномерно по x) е аналогична.

$\square$

С това, (EJ1) и (EJ2) на практика са доказани в случая на тотални множества. За да можем да покажем, че те са изпълнени и за частични множества ще се възползваме от следните три факта:

1. За всяко множество A, множеството A'_e е тотално.
2. Всеки краен ординал има единствено означение в $\mathcal{O}$.
3. Интуитивно — ω-скокът на A и A'_e трябва да бъде един и същ.

Възоснова на тези идеи ще докажем следната лема.

Лема 1.5.5. *За всяко множество A и всяко $x \in \mathcal{O}$, за което $|x| \geq \omega$,*

$$E_A(x) \equiv_e E_{A'_e}(x) \text{ равномерно по } x.$$

Доказателство. Нека преди всичко въведем рекурсивният предикат T_2 чрез

$$T_2(x) \iff x = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^0}}}}.$$

Тогава от дефиницията на $\mathcal{O}$ получаваме

$$x \in \mathcal{O} \;\&\; |x| < \omega \iff T_2(x).$$

Първо ще докажем, че за произволно A, $E_{A'_e}(x) \leq_e E_A(x)$, равномерно по x.

Нека фиксираме рекурсивна функция $\mathfrak{h}$, такава че за всяко $x \in \mathcal{O}$

$$W_{\mathfrak{h}(x)} = \{i \mid i <_{\mathcal{O}} x\}$$

За произволни x и z дефинираме множествата $W_1(x,z)$ и $W_2(x,z)$ чрез

$$W_1(x,z) = \{\langle\langle y,i\rangle, v\rangle \mid i \in W_{\mathfrak{h}(x)} \;\&\; T_2(i) \;\&\; D_v = \{\langle y, 2^i\rangle\}\}$$

$$W_2(x,z) = \{\langle\langle y,i\rangle, l(v,i)\rangle \mid i \in W_{\mathfrak{h}(x)} \;\&\; \neg T_2(i) \;\&\; \langle\langle y,i\rangle, v\rangle \in W_{\varphi_z(i)}\}$$

където $\mathfrak{l}$ е рекурсивна функция, такава че за всяко v и i

$$D_{\mathfrak{l}(v,i)} = \{\langle y,i\rangle \mid y \in D_v\}.$$

Ясно е, че множествата $W_1(x,z)$ и $W_2(x,z)$ са рекурсивно номеруеми равномерно по x и z и значи множеството $W_1(x,z) \cup W_2(x,z)$ също е рекурсивно номеруемо равномерно по x и z. Нека $\mathfrak{g}$ е рекурсивна функция даваща неговият индекс за x и z, т.е.

$$W_{\mathfrak{g}(x,z)} = W_1(x,z) \cup W_2(x,z).$$

От дефиницията на двете множества е ясно, че

$$W_1(x,z) \cap W_2(x,z) = \emptyset$$

(заради условието $(\neg)T_2(i)$). Освен това

$$\langle\langle y,i\rangle, v\rangle \in W_1(x,z) \cup W_2(x,z) \;\&\; \langle u,j\rangle \in D_v \Longrightarrow i = j.$$

Нека сега за произволно множество X с $X_{<\omega}$ и $X_{\geq\omega}$ означим множествата

$$X_{<\omega} = \{\langle y, i\rangle \in X \mid T_2(i)\}$$
$$X_{\geq\omega} = \{\langle y, i\rangle \in X \mid \neg T_2(i)\}.$$

Тогава от гореспоменатите свойства на $W_1(x,z) \cup W_2(x,z)$ получаваме, че

$$(W_1(x,z) \cup W_2(x,z))(X) = W_1(x,z)(X_{<\omega}) \cup W_2(x,z)(X_{\geq\omega}).$$

Вече сме готови да приложим лемата за рекурсията. Нека $S = \{x \in \mathcal{O} \mid |x| \geq \omega\}$ и да разгледаме частично нареденото множествот $(S, <_{\mathcal{O}})$. Ясно е, че то удовлетворява условията на лемата. Нека R е релацията

$$R = \{(x,z) \mid E_{A'_e}(x) = W_{\varphi_z(x)}(E_A(x))\},$$

и да разгледаме частично рекурсивната функция η дефинирана чрез правилото

$$\eta(z,x) = \begin{cases} \mathfrak{g}(z,x), & x = 3.5^p \text{ за някое } p \\ \\ \mathfrak{f}(\varphi_z(x_1)), & x = 2^{x_1} \end{cases}$$

където $\mathfrak{f}$ е рекурсивна функция, такава че $(W_i(X))'_e = W_{\mathfrak{f}(i)}(X'_e)$ за всяко X и всяко i.

Остава само да докажем, че η има свойствата, изисквани в условието на лемата за рекурсията. За целта нека фиксираме $x \in S$ и z, такова че за всяко $x_1 \in S$, за което $x_1 <_{\mathcal{O}} x$ да бъде изпълнено, че $\varphi_z(x_1)$ е дефинирана и $(x_1, \varphi_z(x_1)) \in R$.

Нека първо $|x| = \omega$. Тогава $x = 3.5^p$ и значи $\eta(z,x) = \mathfrak{g}(z,x)$. Освен това, тъй като за $i <_{\mathcal{O}} x$ е в сила $T_2(i)$, то $(E_A(x))_{<\omega} = E_A(x)$, а $(E_A(x))_{\geq\omega} = W_2(x,z) = \emptyset$. Следователно

$$W_{\eta(z,x)}(E_A(X)) = W_1(z,x)(E_A(x)).$$

Тогава за произволни y и i получаваме

$$\langle y, i\rangle \in W_{\eta(z,x)}(E_A(X)) \iff \langle y, 2^i\rangle \in E_A(x) \iff$$

$$i <_{\mathcal{O}} x \;\&\; y \in E_A(2^i) \iff i <_{\mathcal{O}} x \;\&\; y \in E_{A'_e}(i) \iff \langle y, i\rangle \in E_{A'_e}(x).$$

и значи в този случай $W_{\eta(z,x)}(E_A(X)) = E_{A'_e}(x)$.

Нека сега отново $x = 3.5^p$, но този път $|x| > \omega$. Нека $x_\omega <_{\mathcal{O}} x$ и $|x_\omega| = \omega$. Нека забележим, че в в този случай

$$(E_A(x))_{<\omega} = E_A(x_\omega), \quad (E_A(x))_{\geq\omega} = \bigoplus_{x_\omega \leq_{\mathcal{O}} i <_{\mathcal{O}} x} E_A(i),$$

като същото важи и ако заменин A с A'_e.

Отново $\eta(z,x) = \mathfrak{g}(z,x)$ и значи

$$W_{\eta(z,x)}(E_A(x)) = W_1(z,x)(E_A(x_\omega)) \cup W_2(z,x)(E_A(x)_{\geq\omega}).$$

От случая $|x| = \omega$, получаваме $W_1(z,x)(E_A(x_\omega)) = E_{A'_e}(x_\omega)$.

Нека y и i са произволни. От дефинициите на множествата $W_2(z,x)$ и $\bigoplus_{x_\omega \leq_\mathcal{O} j <_\mathcal{O} x} E_A(j)$ следва, че

$$\langle y,i\rangle \in W_2(z,x)(E_A(x)_{\geq\omega}) \iff$$
$$x_\omega \leq_\mathcal{O} i <_\mathcal{O} x \ \&\ \exists v[\langle\langle y,i\rangle,v\rangle \in W_{\varphi_z(i)} \ \&\ D_v \subseteq E_A(i)]$$
$$\iff x_\omega \leq_\mathcal{O} i <_\mathcal{O} x \ \&\ \langle y,i\rangle \in W_{\varphi_z(i)}(E_A(i))$$
$$\iff \langle y,i\rangle \in E_{A'_e}(x)_{\geq\omega},$$

и значи и в този случай $(x,\eta(z,x)) \in R$.

Остава да разгледаме само случая $x = 2^{x_1}$. Но тогава $x_1 <_\mathcal{O} x$ и значи

$$E_{A'_e}(x) = (E_{A'_e}(x_1))'_e = \left(W_{\varphi_z(x_1)}(E_A(x_1))\right)'_e =$$
$$W_{\mathfrak{f}(\varphi_z(x))}\left((E_A(x_1))'_e\right) = W_{\eta(z,x)}(E_A(x))$$

и значи и в този случай $(x,\eta(z,x)) \in R$.

Следователно условията на лемата за рекурсията са налице и значи, действително, $E_{A'_e(x)} \leq_e E_A(x)$ равномерно по x ($|x| > \omega$).

За обратната сводимост изменяме дефиницията на множеството $W_1(x,z)$ по следния начин: полагаме

$$W_1(x,z) = \tilde{W}_1(x,z) \cup \hat{W}_1(x,z),$$

където

$$\tilde{W}_1(x,z) = \{\langle\langle y,2^i\rangle,v\rangle \mid i \in W_{\mathfrak{h}(x)} \ \&\ T_2(i) \ \&\ D_v = \{\langle y,i\rangle\}\}$$
$$\hat{W}_1(x,z) = \{\langle\langle y,1\rangle,v\rangle \mid D_v = \{\langle\langle y,\mathfrak{i}\rangle,1\rangle\}\},$$

където $\mathfrak{i}$ е фиксиран индекс, за който $W_\mathfrak{i}(X) = X$ за всяко X. Така $\hat{W}_1(x,z)(A') = \{\langle y,1\rangle \mid y \in A\}$.

Нататък разсъжденията са аналогични.

$\square$

Вече сме готови да докажем (EJ1) и (EJ2). От връзката между тюринговата и номерационната сводимост (Лема 1.3.2) от (TJ1) и (TJ2) получаваме

- (TJ1') За всяко $x,y \in \mathcal{O}$, ако $|x| = |y|$, то $H_A(x)^+ \leq_e H_A(y)^+$, равномерно по x и y.
- (TJ2') За всяко $A \leq_T B$ и всяко $x \in \mathcal{O}$, $H_A(x)^+ \leq_T H_B(x)^+$, равномерно по x.

Тогава за всяко A и всяко $x,y \in \mathcal{O}$, такива че $|x| = |y| \geq \omega$ получаваме

$$E_A(x) \leq_e E_{A'_e}(x) \leq_e H_{A'_e}(x)^+ \leq_e H_{A'_e}(y)^+ \leq_e E_{A'_e}(y) \leq_e E_A(y),$$

където всичките сводимости са равномерни. Тъй като за $|x| = |y| < \omega$, $E_A(x) = E_A(y)$, то гороното доказва (EJ1). Доказателството на (EJ2) е аналогично.

И така, вече можем да дефинираме α-ти скок на една номерационна степен $\mathbf{a}$, за произволен рекурсивен ординал α, чрез

$$\mathbf{a}^{(\alpha)} = \mathbf{d}_e(E_A(x)),$$

където A е произволен представител на $\mathbf{a}$, а x е произволно означение на α. Коректността на дефиницията се гарантира от (EJ1) и (EJ2).

Накрая ще направим следните две уговорки. Първо, тъй като почти винаги ще се интересуваме от номерационния скок на дадено множество A, за да не претрупваме означенията ще записваме A' вместо A'_e. Второ — ако сме фиксирали означение x_α за рекурсивния ординал α, то вместо $E_A(x_\alpha)$ ще пишем просто $A^{(\alpha)}$.

Глава 2

Редици от множества

В тази глава ще разгледаме едно кодиране на редици от множества от естествени числа. Неформално, ще казваме че едно множество кодира дадена редица с дължина ζ, ако от α-тия скок на множеството можем да "възстановим" α-тия член на редицата, като при това "възстановяването" става равномерно по α. По същество, въпреки че терминологията е друга, такова кодиране е разгледано за първи път за крайни редици от Сосков [**35**]. По-късно Сосков и Балева[**37**] обобщават резултатите от [**35**] за безкрайни редици. Накрая Сосков и Ковачев[**39**] дефинират релация "сводимост между редици" и показват теорема от селманов тип за тази сводимост, именно използвайки кодиране на редица с множество. Накрая, тези разглеждания водят до появата на ω-номерационните степени в [**36**].

В 2.1 ще дадем точната дефиниция на релацията на горе споменатото кодиране и ще приведем основните резултати от [**35**],[**37**] и[**39**]. В 2.2 ще покажем обща схема, с чиято помощ от генерични номерации получаваме частични множества под тях. С нейна помощта ще докажем обобщения на резултатите от 2.1. Накрая, в 2.3 ще покажем един метод за разделяне на тотални степени, с който допълнително ще обобщим теоремите от 2.1 и 2.2.

Пълно доказателство на Теорема 2.2.5 е изложено в [**10**]. По времето на публикуване на тази статия на автора не бе известна общата схема изложена в 2.2, така че доказателството в [**10**] е направена пълната форсинг конструкция. Както ще видим в 2.2, тя е излишна, а Теорема 2.2.5 може да бъде изведена от съответната теорема доказана в [**35**].

Резултатите от 2.3 са докладвани в [**11**].

2.1. Кодиране на редици от множества

Нека ζ е рекурсивен ординал с фиксирано означение за него. Ще предполагаме, че за всеки ординал под ζ е фиксирано означение $<_{\mathcal{O}}$ от означението за ζ. Така, ако $\alpha < \zeta$, ще отъждествяваме α с неговото означение.

Дефиниция 2.1.1. *Нека $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha<\zeta}$ е редица от множества от естествени числа и $X \subseteq \mathbb{N}$. Ще казваме, че $\mathcal{A}$ е сводима към X*

(или още, че X кодира $\mathcal{A}$) и ще записваме $\mathcal{A} \leq_\zeta X$, ако съществува рекурсивна функция g, такава че $A_\alpha = W_{g(\alpha)}(X^{(\alpha)})$ за всяко $\alpha < \zeta$.

С други думи, редицата $\mathcal{A}$ с дължина ζ е сводима към множеството X, ако за всяко $\alpha < \zeta$, $A_\alpha \leq_e X^{(\alpha)}$ равномерно по α. Тъй като, ако $X \leq_e Y$, то $X^{(\alpha)} \leq_e Y^{(\alpha)}$ равномерно по α (свойство (EJ2) от 1.5), получаваме

$$\mathcal{A} \leq_\zeta X \;\&\; X \leq_e Y \Longrightarrow \mathcal{A} \leq_\zeta Y.$$

Това от своя страна означава, че кодирането на редици е инвариатно относно номерационната еквивалентност. По-точно: ако $X \equiv_e Y$, то за всяка редица $\mathcal{A}$ с дължина α

$$\mathcal{A} \leq_\alpha X \iff \mathcal{A} \leq_\alpha Y.$$

Оказва се, че ако множеството X кодира $\mathcal{A}$, то то кодира и една по-сложна редица, която ние ще наричаме скок редица на $\mathcal{A}$ и ще означаваме с $P(\mathcal{A})$. Нейната дефиниция е следната:

Дефиниция 2.1.2. *Нека $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha<\zeta}$ е редица от множества от естествени числа. За всяко $\alpha < \zeta$ дефинираме множеството $P_\alpha(\mathcal{A})$ чрез следната трансфинитна индукция:*

(1) $P_0(\mathcal{A}) = A_0$.
(2) $P_{\alpha+1}(\mathcal{A}) = P_\alpha(\mathcal{A})' \oplus A_{\alpha+1}$.
(3) *Ако α е граничен, то $P_\alpha(\mathcal{A}) = P_{<\alpha}(\mathcal{A}) \oplus A_\alpha$, където*

$$P_{<\alpha} = \{\langle x, \beta\rangle \mid \beta < \alpha \;\&\; x \in P_\beta(\mathcal{A})\}.$$

Полагаме $P(\mathcal{A}) = \{P_\alpha(\mathcal{A})\}_{\alpha<\zeta}$.

В сила е следната лема.

Лема 2.1.3. *Нека $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha<\zeta}$ е редица от множества от естествени числа и $X \subseteq \mathbb{N}$. Тогава*

$$\mathcal{A} \leq_\zeta X \iff P(\mathcal{A}) \leq_\zeta X.$$

Доказателство. Посоката отдясно-наляво е ясна. За обратната посока ще се възползваме от Лемата за рекурсията (Лема 1.5.3). Нека фиксираме редица $\mathcal{A}$, множество X и рекурсивна функция g, такива че $A_\alpha = W_{g(\alpha)}(X^{(\alpha)})$ за всяко $\alpha < \zeta$. Нека $S = \{\alpha \mid \alpha < \zeta\}$ (S е множество от означенията на съответните ординали) и да разгледаме частично нареденото множество $(S, <_{\mathcal{O}})$ (ясно е, че то удовлетворява условията на Лемата за рекурсията). Нека още R е релацията

$$R = \{(\alpha, i) \mid P_\alpha(\mathcal{A}) = W_i(X^{(\alpha)}.$$

Нека фиксираме рекурсивни функции $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{l}$ такива че

- $W_i(Y)' = W_{\mathfrak{j}(i)}(Y')$ за всяко i и Y.
- $W_i(Y) \oplus W_k(Y) = W_{\mathfrak{f}(i,k)}(Y)$ за всяко i, k и Y.
- $\bigoplus_{i\in I} W_{\varphi_p(i)}(Y_i) = W_{\mathfrak{h}(p)}(\bigoplus_{i\in I} Y_i)$.

Да разгледаме частично рекурсивната функция η дефинирана чрез правилото

$$\eta(z,\alpha) = \begin{cases} g(0), & \alpha = 0, \\ \mathfrak{f}(\mathfrak{j}(\varphi_z(\beta)), g(\alpha)), & \alpha = \beta + 1, \\ \mathfrak{f}(\mathfrak{h}(z)), g(\alpha)), & \alpha \text{ е граничен} \end{cases}$$

За да завършим доказателството, нека фиксираме $\alpha < \zeta$ и z, такова че $\varphi_z(\beta)$ е дефинирано и $(\beta, \varphi_z(\beta)) \in R$ за всяко $\beta < \alpha$. Трябва да докажем, че $\eta(z,\alpha) \in R$.

Нека първо $\alpha = 0$. Тогава имаме

$$P_\alpha(\mathcal{A}) = P_0(\mathcal{A}) = A_0 = W_{g(0)}(X) = W_{\eta(z,\alpha)}(X^{(0)}),$$

и значи в този случай $\eta(z,\alpha) \in R$.

Нека сега $\alpha = \beta + 1$. Съгласно предположението за z имаме $P_\beta(\mathcal{A}) = W_{\varphi_z(\beta)}(X^{(\beta)})$. Тогава

$$\begin{aligned} P_\alpha &= P_\beta(\mathcal{A})' \oplus A_\alpha \\ &= (W_{\varphi_z(\beta)}(X^{(\beta)}))' \oplus W_{g(\alpha)}(X^{(\alpha)}) \\ &= (W_{\mathfrak{j}(\varphi_z(\beta))}(X^{(\alpha)})) \oplus W_{g(\alpha)}(X^{(\alpha)}) \\ &= W_{\mathfrak{f}(\mathfrak{j}(\varphi_z(\beta)),g(\alpha))}(X^{(\alpha)}) = W_{\eta(z,\alpha)}(X^{(\alpha)}). \end{aligned}$$

Така и в този случай $(\alpha, \eta(z,\alpha)) \in R$.

Накрая нека α е граничен. Съгласно дефиницията на $P_{<\alpha}$ имаме

$$P_{<\alpha} = \bigoplus_{\beta<\alpha} P_\beta(\mathcal{A}).$$

Сега използвайки предположението за z, получаваме

$$\begin{aligned} P_\alpha(\mathcal{A}) &= P_{<\alpha}(\mathcal{A}) \oplus A_\alpha \\ &= \bigoplus_{\beta<\alpha} P_\beta(\mathcal{A}) \oplus A_\alpha \\ &= \bigoplus_{\beta<\alpha} W_{\varphi_z(\beta)}(X^{(\beta)}) \oplus W_{g(\alpha)}(X^{(\alpha)}) \\ &= W_{\mathfrak{h}(z)}(X^{(\alpha)}) \oplus W_{g(\alpha)}(X^{(\alpha)}) \\ &= W_{\mathfrak{f}(\mathfrak{h}(z),g(\alpha))}(X^{(\alpha)}) = W_{\eta(z,\alpha}(X^{(\alpha)}). \end{aligned}$$

Така и в този случай $(\alpha, \eta(z,\alpha)) \in R$ и значи можем да приложим Лемата за рекурсията. С това доказателството на твърдението е завършено.

$\square$

Възниква следният естествен въпрос: нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са две редици с дължина ζ, такива че всяко множество, кодиращо $\mathcal{B}$, кодира и $\mathcal{A}$, т.е.

$$\forall X[\mathcal{B} \leq_\zeta X \Longrightarrow \mathcal{A} \leq_\zeta X], \tag{2.1.1}$$

Има ли някаква връзка между редиците $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$?

В случай, че $\zeta < \omega$ отговор ни дава следната Теорема доказана от Сосков [**35**].

Теорема 2.1.4 (Сосков). *Нека $1 \leq \zeta < \omega$, а $\mathcal{B}$ е редица с дължина ζ. Нека още $n < \zeta$, а $A, Q \subseteq \mathbb{N}$ са такива, че Q е тотално $A^+ \leq_e Q$, $P_{\zeta-1}(\mathcal{B}) \leq_e Q$ и $A \not\leq_e P_n(\mathcal{A})$. Тогава съществува тотално множество F, такова че $\mathcal{B} \leq_\zeta F$, $F^{(\zeta-1)} \equiv_e Q$ и $A \not\leq_e F^{(n)}$.*

Чрез нея можем да докажем, че (2.1.1) е еквивалентно на

$$\forall n < \zeta [A_n \leq_e P_n(\mathcal{B})]. \tag{2.1.2}$$

Наистина, ако (2.1.2) е изпълнено, то (2.1.1) се получава, като следствие на Лема 2.1.3. От друга страна, ако допуснем, че (2.1.1) е вярно, а (2.1.2) не е вярно то ще получим редица $\mathcal{B}$ и множество A_n, такива че $A_n \not\leq_e P_n(\mathcal{B})$, но за всяко X, за което е изпълнено $\mathcal{B} \leq_\zeta X$ е изпълнено $A_n \leq_e X^{(n)}$. Това противоречи на горната теорема и значи е невъзможно.

Нека да отбележим, че при крайни редици условието за равномерност не играе никаква роля. Това е така, тъй като ние трябва да покажем само краен брой индекси на оператори, което винаги може да се направи, чрез рекурсивна функция.

За безкрайно ζ Сосков и Балева [**37**] обобщават Теорема 2.1.4 по следния начин:

Теорема 2.1.5 (Сосков, Балева). *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са две редици с дължина ζ, такива че за всяко $\alpha < \zeta$, $B_\alpha \not\leq_e P_\alpha(\mathcal{A})$. Нека още Q е тотално множество, такова, че $\bigoplus_{\alpha<\zeta} P_\alpha(\mathcal{A}) \leq_e Q$ и $\bigoplus_{\alpha<\zeta} B_\alpha^+ \leq_e Q$. Тогава съществува тотално множество F, такова че $\mathcal{A} \leq_\zeta F$, $F^{(\zeta)} \equiv_e Q$ и за всяко $\alpha < \zeta$, $B_\alpha \not\leq_e F^{(\alpha)}$.*

За разлика от случая на крайни редици, тази теорема не ни помага да получим условие върху редици еквивалентно на (2.1.1) в случай на безкрайни редици. Това е така, тъй като, ако $\zeta \geq \omega$, условието за равномерност започва да играе съществена роля. За това необходимо е да се докаже "равномерен" вариант на Теорема 2.1.5. Точно това правят Сосков и Ковачев [**39**].

Теорема 2.1.6. *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са две редици с дължина ζ, такива че за всяка рекурсивна функция g, съществува $\alpha < \zeta$, такова че $B_\alpha \neq W_{g(\alpha)}(P_\alpha(\mathcal{A}))$. Тогава съществува тотално множество F, такова че $\mathcal{A} \leq_\zeta F$ и $\mathcal{B} \not\leq_\zeta F$.*

Така окончателно получаваме исканото условие върху редиците $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ еквивалентно на (2.1.1).

Теорема 2.1.7 (Сосков, Ковачев). *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са редици с дължина ζ. Следните условия са еквивалентни*

(OE1) $\forall X(\mathcal{A} \leq_\zeta X^+ \Rightarrow \mathcal{B} \leq_\zeta X^+)$[1]
(OE2) $\forall \alpha < \zeta[B_\alpha \leq_e P_\alpha(\mathcal{A})$ *равномерно по* $\alpha]$.

Накрая нека да отбележим, че със стандартно (за подобни конструкции) обобщение Теорема 2.1.6 може да бъде доказана в следния "изброим" вариант.

ТЕОРЕМА 2.1.8. *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n, \ldots$ са редици с дължина ζ, такива че за всяка рекурсивна функция g и всяко есествено n, съществува $\alpha < \zeta$, такова че $B_{n\alpha} \neq W_{g(\alpha)}(P_\alpha(\mathcal{A}))$. Тогава съществува тотално множество F, такова че $\mathcal{A} \leq_\zeta F$ и за всяко естествено n, $\mathcal{B}_n \not\leq_\zeta F$.*

В следващия раздел ще видим, че в Теорема 2.1.4, Теорема 2.1.5, Теорема 2.1.7 и Теорема 2.1.6 изразът "съществува тотално множество" може да бъде заменен с изразът "съществува частично множество".

2.2. Обръщане на скока с частично множество

В този раздел ще видим, как твърдения за генерични тотални множества могат да бъдат обобщени за частични множества. По-точно, ще видим, как към всяко множество, което е графиката на генерична функция (в смисъла, който ще дадем след малко и който е използван в **[14, 26, 15]**), е номерационно сводимо частично множество с подобни свойства по отношение на номерационната сводимост. Благодарение на това ще можем да докажем теоремите от предния раздел и за частични множества.

За пръв път свойствата на частичните генерични множества и връзката им с генеричността в тюринговия случай са изследвани от Купстейк **[6]**. По-голямата част от идеите в следващите доказателства са заимствани именно от там.

Ще започнем, като въведем понятието генеречина номерация (виж **[?, 37]**).

ДЕФИНИЦИЯ 2.2.1. *Нека A е непразно множество от естествени числа. Казваме, че функцията $\tau : [0, 2q+1) \to \mathbb{N}$ е A-регулярна крайна част, ако $\tau[2\mathbb{N}+1] \subseteq A$. Казваме, че изображението $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е A-регулярно, ако $f[2\mathbb{N}+1] = A$.*

Всъщност A-регулярните крайни части представляват крайни редици. Това ни дава право да дефинираме код на крайна част, като кодът на крайната редица, на която крайната част е еквивалентна. Както е обичайно, няма да различаваме крайните части от техните кодове и значи крайните части са всъщност естествени числа.

---

[1]Условието (OE1) показва, че е достатъчно да се интересуваме само от тоталните множества кодиращи дадена редица. В следващия раздел ще видим, че е достатъчно да се интересуваме само от частичните множества кодиращи редицата.

Множеството от всички A-регулярни крайни части ще означаваме с $\mathcal{R}_A$. Ясно е, че $\mathcal{R}_A \leq_e A$.

Дефиниция 2.2.2. *Нека A е непразно множество от естествени числа. Казваме, че изображението $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е A-генерична номерация, ако f е A-регулярно и за всяко i съществува A-регулярна крайна част $\tau \subseteq f$, такава че*

$$\tau \in W_i(A) \vee (\forall \rho \in \mathcal{R}_A)(\tau \subseteq \rho \Rightarrow \rho \notin W_i(A)).$$

В сила е следната лема.

Лема 2.2.3. *Нека A е непразно множество и f е A-генерично изображение. Тогава* $\mathrm{Graph}\,(f)' \equiv_e A' \oplus \mathrm{Graph}\,(f)$.

Доказателство. Нека за простота на означенията положим $F = \mathrm{Graph}\,(f)$. Тъй като f е A-регулярно изображение, то $A \leq_e F$ и значи $A' \oplus F \leq_e F'$.

Нека сега да видим обратната посока. Нека за произволни $e, y \in \mathbb{N}$

(1) $X_{\langle e,y\rangle} = \{\tau \in \mathcal{R}_A \mid y \in W_e(\mathrm{Graph}\,(\tau))\}$;
(2) $Y_{\langle e,y\rangle} = \{\tau \in \mathcal{R}_A \mid \exists \rho \in \mathcal{R}_A[\tau \subseteq \rho \;\&\; \rho \in X_{\langle e,y\rangle}]\}$;
(3) $Z_{\langle e,y\rangle} = \{\tau \in \mathcal{R}_A \mid \forall \rho \in \mathcal{R}_A[\tau \subseteq \rho \Rightarrow \rho \notin X_{\langle e,y\rangle}]\}$.

Тъй като $\mathcal{R}_A \leq_e F$, то $X_{\langle e,y\rangle} \leq_e A$ равномерно по e и y. За множеството $Y_{\langle e,y\rangle}$ е в сила

$$Y_{\langle e,y\rangle} \leq_e X_{\langle e,y\rangle} \oplus \mathcal{R}_A,$$

тъй като за да номерираме елементите на $Y_{\langle e,y\rangle}$, достатъчно е да изредим онези подчастите на елементите на $X_{\langle e,y\rangle}$, които принадлежат на $\mathcal{R}_A$. По този начин, $Y_{\langle e,y\rangle} \leq_e A$ равномерно по e и y.

Накарая, тъй като $Z_{\langle e,y\rangle} = \mathcal{R}_A \backslash Y_{\langle e,y\rangle}$, то $Z_{\langle e,y\rangle} \leq_e A'$ равномерно по e и y.

От дефиницията на номерационна сводимост и A-регулярна номерация получаваме

$$x \in W(F) \iff \exists \tau \subseteq f[\tau \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \;\&\; x \in W_e(\mathrm{Graph}\,(\tau))].$$

Тогава

$$x \in W(F) \iff \exists \tau \subseteq f[\tau \in X_{\langle e,x\rangle}]. \tag{2.2.1}$$

и значи

$$x \notin W(F) \iff \forall \tau \subseteq f[\tau \notin X_{\langle e,x\rangle}].$$

Тъй като f е A-генерична, то за произволно e и x

$$\exists \tau \subseteq f[\tau \in X_{\langle e,x\rangle} \vee \tau \in Z_{\langle e,x\rangle}]$$

Следователно

$$x \notin W(F) \iff \exists \tau \subseteq f[\tau \in Z_{\langle e,x\rangle}]. \tag{2.2.2}$$

Сега от (2.2.1) и (2.2.2) и от

$$X_{\langle e,x\rangle}, Z_{\langle e,x\rangle} \leq_e A' \text{ равномерно по } e \text{ и } y$$

получаваме $F' \leq_e A' \oplus F$.

$\square$

В следващото твърдение ще видим, как от A-генерична номерация f можем да получим, частично множество F^*, такова че

$$A \lneq_e F^* \lneq_e \mathrm{Graph}\,(f) \text{ и } F^{*\prime} \equiv_e \mathrm{Graph}\,(f)'.$$

Твърдение 2.2.4. *Нека A е непразно множество и нека f е A-генерична номерация. Нека f^* е частично изображение на $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ действащо по правилото*

$$f^*(x) \simeq \begin{cases} f(x) - 1, & f(x) \neq 0 \\ \neg! \quad\quad\;\; , & f(x) = 0 \end{cases}$$

Тогава:

(Q1) $A \leq_e \mathrm{Graph}\,(f^*) \leq_e \mathrm{Graph}\,(f)$;
(Q2) $\mathrm{Graph}\,(f^*)' \equiv_e \mathrm{Graph}\,(f)'$
(Q3) $\mathrm{Graph}\,(f^*) \not\leq_e A$;
(Q4) $\forall X \subseteq \mathbb{N}[X^+ \leq_e \mathrm{Graph}\,(f^*) \implies X^+ \leq_e A]$.

Доказателство. Нека отново с цел простота на означенията $F = \mathrm{Graph}\,(f)$ и $F^* = \mathrm{Graph}\,(f^*)$.

(Q1) Ясно е, че $F^* \leq_e F$. Освен това

$$A = \begin{cases} f^*[2\mathbb{N}+1] \cup \{0\}, & 0 \in A \\ f^*[2\mathbb{N}+1] \quad\quad\;\;\, , & 0 \notin A \end{cases}$$

и значи $A \leq_e F^*$.

(Q2) Трябва само да докажем, че $F' \leq_e F^{*\prime}$. От дефиницията на f^* следва, че $F \leq_e F^{*\prime}$. Съгласно Лема 2.2.3, $F' \equiv_e A' \oplus F$ и значи $F' \leq_e F^{*\prime}$.

(Q3) Без ограничение можем да предполагаме, че A е безкрайно. Да допуснем, че $F^* \leq_e A$ и нека с S отбележим множеството

$$S = \{\tau \in \mathcal{R}_A \mid (\exists x < \mathrm{lh}\,(\tau))(f^*(x) + 2 \simeq \tau(x))\}.$$

Тогава $S \leq_e A$ и нека $S = W_i(A)$. Освен това, тъй като A е безкрайно, f приема безброй много пъти стойност различна от 0, и значи за всяка крайна част $\tau \in \mathcal{R}_A$ съществува крайна част $\sigma \in S$, такава че $\tau \subseteq \sigma$. Но тогава от A-генеричността на f получаваме, че съществува крайна част $\tau \subseteq f$, такава че $\tau \in S$. Нека x е такова, че $f^*(x) + 2 \simeq \tau(x)$. Но тогава $f^*(x) + 2 \simeq f(x)$, което е невъзможно.

Значи $F^* \not\leq_e A$.

(Q4) Нека за произволно естествено i с $W_{\tilde{i}}$ означим полуразрешимото множество за което

$$\langle x, \tilde{u} \rangle \in W_{\tilde{i}} \iff \exists u(\langle x, u \rangle \in W_i \;\&\; \mathcal{D}_{\tilde{u}} = \{\langle z, y+1 \rangle \mid \langle z, y \rangle \in \mathcal{D}_u\})$$

Тогава

$$X = W_i(F^*) \iff X = W_{\tilde{i}}(F).$$

Нека още за произволно $\tau \in \mathcal{R}_A$ с $\langle\tau\rangle$ означим множеството

$$\langle\tau\rangle = \{\langle x, y\rangle \in \mathrm{Graph}\,(\tau) \mid y \neq 0\}$$

Тогава $W_{\tilde{i}}(\mathrm{Graph}\,(\tau)) = W_{\tilde{i}}(\langle\tau\rangle)$.

Както и в Лема 2.2.3 с $X_{\langle e,y\rangle}$ ще означаваме множеството

$$X_{\langle e,y\rangle} = \{\tau \in \mathcal{R}_A \mid y \in W_e(\mathrm{Graph}\,(\tau))\}.$$

Вече сме готови да докажем (Q4). Нека X е тотално множество, такова че $X \leq_e F^*$. Без ограничение, можем да считаме че $X = \mathrm{Graph}\,(h)$ за някоя тотална функция h. Нека $X = W_i(F^*)$. Да разгледаме множеството

$$S_1 = \{\tau \in \mathcal{R}_A \mid \exists x \exists y_1 \exists y_2 (y_1 \neq y_2 \;\&\; \tau \in X_{\langle \tilde{i}, \langle x, y_1\rangle\rangle} \;\&\; \tau \in X_{\langle \tilde{i}, \langle x, y_2\rangle\rangle}\}$$

Имаме $S_1 \leq_e A$ и следователно съществува крайна част $\tau \subseteq f$, такава че $\tau \in S_1$ или за всяка крайна част $\sigma \in \mathcal{R}_A$, ако $\tau \subseteq \sigma$, то $\sigma \notin S_1$. Нека фиксираме едно такова τ и да допуснем, че $\tau \in S_1$. Нека x, y_1 и y_2 са числа, такива че $y_1 \neq y_2$ и $\tau \in X_{\langle \tilde{i}, \langle x, y_1\rangle\rangle}$ и $\tau \in X_{\langle \tilde{i}, \langle x, y_2\rangle\rangle}$. Тогава, съгласно доказателството на Лема 2.2.3, $\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle \in W_{\tilde{i}}(F)$. Но $W_{\tilde{i}}(F)$ е графика на функция, което е противоречие. Следователно за всяко $\sigma \in \mathcal{R}_A$, ако $\tau \subseteq \sigma$, то $\sigma \notin S_1$.

Нека с S_2 означим множеството от онези крайни части $\overline{\tau}$, за които $\tau \subseteq \overline{\tau}$ и съществуват крайни части σ_1 и σ_2, и естествени числа x, y_1 и y_2, такива че

(1) $\mathrm{lh}\,(\sigma_1), \mathrm{lh}\,(\sigma_2) \leq \mathrm{lh}\,(\overline{\tau})$;
(2) $\forall k[\mathrm{lh}\,(\tau) \leq k < \mathrm{lh}\,(\sigma_i) \;\&\; \sigma_i(k) \neq 0 \Longrightarrow \overline{\tau}(k) = 0]$ за всяко $i = 1, 2$.
(3) $\sigma_1 \in X_{\langle \tilde{i}, \langle x, y_1\rangle\rangle}$;
(4) $\sigma_2 \in X_{\langle \tilde{i}, \langle x, y_2\rangle\rangle}$.

Отново $S_2 \leq_e A$. Нека фиксираме крайна част $\overline{\tau} \subseteq f$, такава че $\overline{\tau} \in S_2$ или за всяко $\sigma \in \mathcal{R}_A$, ако $\overline{\tau} \subseteq \sigma$, то $\sigma \notin S_2$. Да допуснем, че $\overline{\tau} \in S_2$ и нека σ_1, σ_2, x, y_1 и y_2 удовлетворяват условията (1),(2),(3) и (4). Тъй като X е графика на тотална функция, можем да фиксираме y, така че $\langle x, y\rangle \in X$. Тогава $\langle x, y\rangle \in W_{\tilde{i}}(F)$. Нека $\overline{\tau}_1 \subseteq f$ е такава, че $\overline{\tau} \subseteq \overline{\tau}_1$ и $\overline{\tau}_1 \in X_{\langle \tilde{i}, \langle x, y\rangle\rangle}$. Тъй като $y_1 \neq y_2$, можем да считаме, че $y_1 \neq y$. Да разгледаме крайната част $\sigma : [0, \mathrm{lh}\,(\overline{\tau}_1)) \to \mathbb{N}$, за която

$$\sigma(k) = \begin{cases} \overline{\tau}(k), & k < \mathrm{lh}\,(\tilde{\tau}); \\ \sigma_1(k), & \mathrm{lh}\,(\overline{\tau}) \leq k < \mathrm{lh}\,(\sigma_1) \;\&\; \sigma_1(k) \neq 0; \\ \overline{\tau}_1(k), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно е, че $\sigma \in R_A$. Освен това $\langle\sigma_1\rangle, \langle\overline{\tau}_1\rangle \subseteq \langle\sigma\rangle$ и следователно $\sigma \in X_{\langle \tilde{i}, \langle x, y_1\rangle\rangle}$ и $\sigma \in X_{\langle \tilde{i}, \langle x, y\rangle\rangle}$. Следователно $\sigma \in S_1$. Но тъй като $\tau \subseteq \sigma$ и $\sigma \in \mathcal{R}_A$, получаваме противоречие с избора на τ.

Следователно за всяко $\sigma \in \mathcal{R}_A$, ако $\overline{\tau} \subseteq \sigma$, то $\sigma \notin S_2$.

Сега твърдим, че $X = \{x \mid \exists\sigma \in \mathcal{R}_A[\overline{\tau} \subseteq \sigma \ \& \ \sigma \in X_{\langle \tilde{i},x\rangle}]\}$. Тъй като множеството отдясно е номерационно сводимо към A с това ще завърши доказателството на (Q4).

Ясно е, че

$$X = \{x \mid \exists\sigma \in \mathcal{R}_A(\overline{\tau} \subseteq \sigma \ \& \ \sigma \subseteq f^* \ \& \ \sigma \in X_{\langle i,x\rangle}\}.$$

Остава само да покажем, че ако $\sigma \in \mathcal{R}_A$, $\overline{\tau} \subseteq \sigma$ и $\sigma \in X_{\langle i,x\rangle}$, то $x \in X$. Да допуснем противното, и нека $\sigma \in \mathcal{R}_A$, $\overline{\tau} \subseteq \sigma$, $\sigma \in X_{\langle i,x\rangle}$, но $x \notin X$. Нека $x = \langle x_1, y_1\rangle$. Тогава $h(x_1) = y' \neq y_1$. Нека фиксираме крайна част $\sigma_2 \in V$, такава че $\overline{\tau} \subseteq \sigma_2 \subseteq f$ и $\sigma_2 \in X_{\langle i,\langle x_1,y'\rangle\rangle}$. Да разгледаме крайната част $\tilde{\tau} : [0, \max\{\mathrm{lh}\,(\sigma), \mathrm{lh}\,(\sigma_2)\}) \to \mathbb{N}$, действаща по правилото

$$\overline{\tau}(k) = \begin{cases} \overline{\tau}(k), \ k < \mathrm{lh}\,(\overline{\tau}); \\ 0, \qquad \mathrm{lh}\,(\overline{\tau}) \leq k < \mathrm{lh}\,(\tilde{\tau}) \end{cases}$$

Тогава $\tilde{\tau} \in V$, $\overline{\tau} \subseteq \tilde{\tau}$ и $\tilde{\tau}$, σ и σ_2 удовлетворяват условия (1)–(4) от дефиницията на S_2. Но тогава $\tilde{\tau} \in S_2$, което е противоречие с избора на $\overline{\tau}$.

$\square$

Като използваме Твърдение 2.2.4 можем да обобщим теоремите от предния раздел. Започваме с Теорема 2.1.5.

Теорема 2.2.5. *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са две редици с дължина ζ, такива че за всяко $\alpha < \zeta$, $B_\alpha \not\leq_e P_\alpha(\mathcal{A})$. Нека още Q е тотално множество, такова, че $\bigoplus_{\alpha<\zeta} P_\alpha(\mathcal{A}) \leq_e Q$ и $\bigoplus_{\alpha<\zeta} B_\alpha^+ \leq_e Q$. Тогава съществува частично множество F^*, такова че*

(R1) $\mathcal{A} \leq_\zeta F^*$;
(R2) $(\forall\alpha < \zeta)(B_\alpha \not\leq_e F^{*(\alpha)})$;
(R3) $F^{*(\zeta)} \equiv_e Q$;
(R4) $(\forall X \subseteq \mathbb{N})(X \leq_e F \Longrightarrow X \leq_e A_0)$.
(R5) $F^* \not\leq_e A_0$.

Доказателство. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ удовлетворяват условието на теоремата. Съгласно доказателството на Теорема 2.1.5 изложено в [**35**], съществува множество F, такова че $\mathcal{A} \leq_\zeta F$, $F^{(\zeta)} \equiv_e Q$ и за всяко $\alpha < \zeta$, $B_\alpha \not\leq_e F^{(\alpha)}$, като при това F е графика на A_0-генерична функция f. Нека f^* се получава от f, както в Твърдение 2.2.4 и нека означим $F^* = \mathrm{Graph}\,(f^*)$.

(R1) Съгласно (Q2), $F^{*\prime} \equiv_e F'$ и следователно $F^{*(\alpha)} \equiv_e F^{(\alpha)}$, равномерно по $\alpha > 0$. От друга страна, $A_0 \leq_e F^*$ и значи $\mathcal{A} \leq_\zeta F^*$.

(R2) Следва от (Q1).
(R3) Следва от (Q2).
(R4) Това е точно (Q4).
(R5) Това е точно (Q3).

$\square$

Като следствие на горната теорема, можем да получим следната теорема за обръщане на номерационния скок доказана от МакЕвой [**22**].

Следствие 2.2.6. *Нека* $\mathbf{b}$ *е тотална номерационна степен, такава че* $\mathbf{0}_e{}' \leq \mathbf{b}$. *Тогава съществува ненулева номерационна степен* $\mathbf{a}$, *такава че* $\mathbf{a}' = \mathbf{b}$ *и*

$$\forall \mathbf{x}(\mathbf{x} \text{ е тотална} \;\&\; \mathbf{x} \leq \mathbf{a} \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_e).$$

Теорема 2.2.7. *Нека* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n, \dots$ *са редици с дължина* ζ, *такива че за всяка рекурсивна функция* g *и всяко естествено* n, *съществува* $\alpha < \zeta$, *такова че* $B_{n\alpha} \neq W_{g(\alpha)}(P_\alpha(\mathcal{A}))$. *Тогава съществува частично множество* F, *такова че* $\mathcal{A} \leq_\zeta F$ *и за всяко естествено* n, $\mathcal{B}_n \not\leq_\zeta F$.

Доказателство. В доказателството на Теорема 2.1.6 от [**39**], конструираното множество не е A_0-генерично, но това може да бъде осигурено с лека модификация в една от дефинициите. Така получаваме A_0-генерична номерация f, такава че $\mathcal{A} \leq_\zeta \mathrm{Graph}\,(f)$ и $\mathcal{B}_n \not\leq_\zeta \mathrm{Graph}\,(f)$ за всяко n.

Нека сега f^* се получава от f, както в Твърдение 2.2.4. Нека означим $F = \mathrm{Graph}\,(f)$ и $F^* = \mathrm{Graph}\,(f^*)$. Съгласно (Q2), $F' \equiv_e F^{*\prime}$ и значи $F^{(\alpha)} \equiv_e F{*}^{(\alpha)}$ равномерно по $\alpha > 1$. Тъй като $A_0 \leq_e F^*$, то $\mathcal{A} \leq_\zeta F^*$.

Съгласно (Q1), $F^* \leq_e F$ и значи, за всяка редица $\mathcal{B}$, ако $\mathcal{B} \leq_\zeta F^*$, то $\mathcal{B} \leq_\zeta F$. Следователно $\forall n[\mathcal{B}_n \not\leq_\zeta F^*]$.

Накрая, съгласно (Q3) и (Q4), F^* е частично множество.

□

Следствие 2.2.8. *Нека* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *са редици с дължина* ζ. *Тогава*

$$(\forall F \subseteq \mathbb{N})(F - \text{частично} \;\&\; \mathcal{A} \leq_\zeta F \Rightarrow \mathcal{B} \leq_\zeta F) \iff$$

$$\exists g(g \text{ е рекурсивна функция} \;\&\; \forall(\alpha < \zeta)(B_\alpha = W_{g(\alpha)}(P_\alpha(\mathcal{A})))).$$

2.3. Един метод за разделяне на тотални множества

Под разделяне на едно множество Q (съответно степен $\mathbf{q}$), имаме предвид намирането на две множества X и Y (съответно степени $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$), такива че $X, Y \lneq_e Q$ (съответно $\mathbf{x}, \mathbf{y} \lneq \mathbf{q}$) и $Q \equiv_e X \oplus Y$ (съответно $\mathbf{q} = \mathbf{x} \vee \mathbf{y}$). В този раздел ще покажем метод, който може да се използва за обобщаване на определени форсинг конструкции, така че вместо едно множество, удовлетворяващо определени свойства, да строим две множества X и Y притежаващи същите свойства, като допълнително изискаме $X \oplus Y \equiv_e Q$, където Q е множество, в което оригиналната конструкция е рекурсивна. Освен метода (Лема 2.3.1) ще видим и някои приложения, които ще използваме по-късно за да изследваме подструктури на ω-номерационните степени.

Нека първо да въведем някои означения, които ще считаме валидни само в рамките на раздела. Както е обичайно, крайна част ще наричаме изображение $\tau : [0, q) \to \mathbb{N}$, като при това всяка крайна част τ ще отъждествяваме с крайната редица $\tau(0), \tau(1), \dots, \tau(q-1)$. По този начин всяка крайна част има код и можем да отъждествим крайните части с техните кодове. В частност, множеството

$$\{\tau \mid \tau \text{ е крайна част}\}$$

е рекурсивно.

Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, а $\{y_i\}_{i<\omega}$ е редица от естествени числа. Разглеждаме редицата $\tau_0, \tau_1, \dots$, получена по правилото

$$\begin{aligned} \tau_0 \ &= \emptyset \\ \tau_{i+1} &= f(\tau_i * y_i) \end{aligned}$$

Ако за всяко i, $\tau_i \subseteq \tau_{i+1}$ с $f(\{y_i\}_{i<\omega})$ ще означаваме изображението $\bigcup\limits_{i<\omega} \tau_i$. В противен случай, ще считаме, че $f(\{y_i\}_{i<\omega})$ не е дефинирано.

Вече сме готови да формулираме и докажем основното твърдение в този раздел.

Лема 2.3.1. *Нека с $\mathcal{F}$ означим множеството от всички изображения на $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ и нека $P \subseteq \mathcal{F}$. Нека f е функция рекурсивна в тоталното множество Q, такава че за всяка редица от естествени числа $\{y_i\}_{i<\omega}$ рекурсивна в Q*

$$f(\{y_i\}_{i<\omega}) \in P.$$

Тогава съществуват функции $g, h \in P$, такива че

$$Q \equiv_e \operatorname{Graph}(g) \oplus \operatorname{Graph}(h)$$

Доказателство. Нека фиксираме една номерация f_Q на Q, такава че $\operatorname{Graph}(f_q) \leq_e Q$. С индукция по i дефинираме две редици от крайни части $\{\tau_i\}_{i<\omega}$ и $\{\sigma_i\}_{i<\omega}$, както и две редици от естествени числа $\{y_i\}_{i<\omega}$ и $\{z_i\}_{i<\omega}$.

(1) $\tau_0 = \sigma_0 = \emptyset$;
(2) $y_i = \langle \operatorname{lh}(\sigma_i), f_Q(2i) \rangle$;
(3) $\tau_{i+1} = f(\tau_i * y_i)$;
(4) $z_i = \langle \operatorname{lh}(\tau_{i+1}), f_Q(2i+1) \rangle$;
(5) $\sigma_{i+1} = f(\sigma_i * z_i)$.

Нека $g = f(\{y_i\}_{i<\omega})$, а $h = f(\{z_i\}_{i<\omega})$. Следователно $g, h \in P$ и освен това $\operatorname{Graph}(g), \operatorname{Graph}(h) \leq_e Q$. От друга страна и е изпълнено, че

(1) $\operatorname{lh}(\tau_0) = 0$
(2) $\operatorname{lh}(\sigma_i) = (g(\operatorname{lh}(\tau_i)))_0$
(3) $\operatorname{lh}(\tau_{i+1}) = (h(\operatorname{lh}(\sigma_i)))_0$

и следователно редицата

$$\operatorname{lh}(\tau_0), \operatorname{lh}(\sigma_0), \operatorname{lh}(\tau_1), \operatorname{lh}(\sigma_1), \dots, \operatorname{lh}(\tau_n), \operatorname{lh}(\sigma_n), \dots$$

е рекурсивно номеруема в $\mathrm{Graph}\,(g) \oplus \mathrm{Graph}\,(h)$. Но от друга страна имаме, че

$$f_Q(2i) = (g(\mathrm{lh}\,(\tau_i)))_1, \quad f_Q(2i+1) = (h(\mathrm{lh}\,(\sigma_i)))_1$$

и значи $Q \leq_e \mathrm{Graph}\,(g) \oplus \mathrm{Graph}\,(h)$.

□

На пръв поглед изглежда, че условията наложени върху функцията f в условието на Лема 2.3.1 са твърде силни. Оказва се, обаче, че подобни функции се получават често конструирайки дадено множество от естествени числа използвайки форсинг метод. Така, например, стоят нещата с доказателството на Теорема 2.1.5 изложено в [**35**]. Прилагайки Лема 2.3.1 към това доказателство получаваме следната теорема:

Теорема 2.3.2. *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са две редици с дължина ζ, такива че за всяко $\alpha < \zeta$, $B_\alpha \not\leq_e P_\alpha(\mathcal{A})$. Нека още Q е тотално множество, такова, че $\bigoplus_{\alpha<\zeta} P_\alpha(\mathcal{A}) \leq_e Q$ и $\bigoplus_{\alpha<\zeta} B_\alpha^+ \leq_e Q$. Тогава съществуват тотални множества F и G, такива че $\mathcal{A} \leq_\zeta F, G$, $F^{(\zeta)} \equiv_e G^{(\zeta)} \equiv_e Q$ и за всяко $\alpha < \zeta$, $B_\alpha \not\leq_e F^{(\alpha)}$, $F \oplus G \equiv_e Q$ и $B_\alpha \not\leq_e G^{(\alpha)}$.*

При това F и G са графиките на A_0-генерични номерации.

Като следствие от горната теорема получаваме една теорема на Селман [**33**].

Следствие 2.3.3. *За всяко естествено n, съществуват номерационни степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, такива че*

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{b}^{(n)} = \mathbf{0}_e{}^{(n)}.$$

Прилагайки Твърдение 2.2.4 получаваме още следното следствие:

Теорема 2.3.4. *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са две редици с дължина ζ, такива че за всяко $\alpha < \zeta$, $B_\alpha \not\leq_e P_\alpha(\mathcal{A})$. Нека още Q е тотално множество, такова, че $\bigoplus_{\alpha<\zeta} P_\alpha(\mathcal{A}) \leq_e Q$ и $\bigoplus_{\alpha<\zeta} B_\alpha^+ \leq_e Q$. Тогава съществуват частични множества F и G, такива че $\mathcal{A} \leq_\zeta F, G$, $F^{(\zeta)} \equiv_e G^{(\zeta)} \equiv_e Q$, $F \oplus G \equiv_e Q$ и за всяко $\alpha < \zeta$, $B_\alpha \not\leq_e F^{(\alpha)}$ и $B_\alpha \not\leq_e G^{(\alpha)}$. При това за всяко тотално X, $X \leq_e F \vee X \leq_e G \Longrightarrow X \leq_e A_0$.*

Глава 3

ω-Номерционни степени

В тази глава ще въведем структурата на ω-номерационните степени $\mathcal{D}_\omega$. В 3.1 ще дефинираме понятието за ω-номерационна степен и ще въведем релация на частична наредба $\leq_\omega$ между ω-номерационните степени. Ще видим, че по отношение на $\leq_\omega$ ω-номерационните степени образуват горна полу-решетка с най-малък елемент. В 3.2 ще изследваме основните свойства на релацията $\leq_\omega$. По-нататък, в 3.3 ще видим, че съществува естествено влагане κ на номерационните степени в ω-номерационните степени. Образът на номерационните степени под действието на това влагане ще означим с $\mathcal{D}_1$. Ще докажем и две теореми от селманов тип за релацията $\leq_\omega$ по отношение на степените от $\mathcal{D}_1$. Накрая, в 3.4 ще въведем операторът скок и ще видим, че той е съгласуван с влагането κ.

Всички дефиниции и резултати в тази глава се дължат на Сосков [**36**]. Изключение в това отношение правят само Теорема 3.2.4 и Теорема 3.3.2, като първата е просто следствие на резултатите от [**39, 36**], а втората е еквивалентна на Теорема 2.1.6 и Теорема 2.2.8.

3.1. Дефиниция на ω-номерационните степени

Нека с $\mathcal{S}_\omega$ означим множеството на всички редици с дължина ω, състоящи се от множества от естествени числа. Елементите на $\mathcal{S}_\omega$ ще отбелязваме с буквите $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и т.н., а с $\emptyset_\omega$ ще означаваме редицата $\emptyset_\omega = (\emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset, \ldots)$.

Дефиниция 3.1.1. *Нека $\mathcal{A}$ е елемент на $\mathcal{S}_\omega$ и нека $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$. Скок-клас на редицата $\mathcal{A}$ ще наричаме множеството*

$$J_\mathcal{A} = \{\mathbf{d}_T(X) \mid A_n \leq_{r.e.} X_T^{(n)} \text{ равномерно по } n\}.$$

По този начин с всяка редица от $\mathcal{S}_\omega$ свързваме едно множество от тюрингови степени. Така, например, скок-класът на $\emptyset_\omega$ се състои от всички тюрингови степени, а скок-класът на редицата $(A, \emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset)$ се състои от тюринговите степени на онези множества, в които множеството A е рекурсивно номеруемо.

С помощта на скок-класовете дефинираме две бинарни релации в $\mathcal{S}_\omega$.

Дефиниция 3.1.2. *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са два елемента на $\mathcal{S}_\omega$. Ще казваме, че редицата $\mathcal{A}$ е равномерно сводима към редицата $\mathcal{B}$ и ще записваме $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}$, ако $J_\mathcal{B} \subseteq J_\mathcal{A}$. Ще казваме, че редицата $\mathcal{A}$ е* *равномерно еквивалентна на редицата $\mathcal{B}$ и ще записваме $\mathcal{A} \equiv_\omega \mathcal{B}$, ако $J_\mathcal{B} = J_\mathcal{A}$.*

От дефиницията е ясно, че $\leq_\omega$ е рефлексивна и транзитивна релация, а $\equiv_\omega$ е релация на еквивалентност, като при това

$$\mathcal{A} \equiv_\omega \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B} \;\&\; \mathcal{B} \leq_\omega \mathcal{A}. \tag{3.1.1}$$

Множеството

$$\mathbf{d}_\omega(\mathcal{A}) = \{\mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega \mid \mathcal{A} \equiv_\omega \mathcal{B}\}$$

ще наричаме ω-номерационна степен породена от $\mathcal{A}$, а с $\mathbf{D}_\omega$ ще бележим множеството на всички ω-номерационни степени, т.е.

$$\mathbf{D}_\omega = \{\mathbf{d}_\omega(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega\}.$$

В $\mathbf{D}_\omega$ въвеждаме релация на частична наредба $\leq_\omega$ по обичайния начин, а именно:

$$\mathbf{d}_\omega(\mathcal{A}) \leq_\omega \mathbf{d}_\omega(\mathcal{B}) \iff \mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}.$$

Така въведената релация е коректно дефинирана (следва от (3.1.1)). Нещо повече, тя е релация на частична наредба.

Нека с $\mathbf{0}_\omega$ означим ω-номерационната степен на редицата $\emptyset_\omega$. Така $\mathbf{0}_\omega$ е най-малкият елемент на $\mathbf{D}_\omega$ и следователно $\leq_\omega$ е частична наредба с най-малък елемент.

Нека сега $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са два елемента на $\mathcal{S}_\omega$ и нека с $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ означим редицата $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{A_n \oplus B_n\}_{n<\omega}$. Тогава $J_{\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}} = J_\mathcal{A} \cap J_\mathcal{B}$ и следователно $\mathbf{d}_\omega(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$ е точната горна граница на степените $\mathbf{d}_\omega(\mathcal{A})$ и $\mathbf{d}_\omega(\mathcal{B})$. Така всеки две ω-номерационни степени притежават точна горна граница и следователно $(\mathbf{D}_\omega, \leq_\omega)$ е горна полу-решетка с най-малък елемент.

Да напомним, че точната горна граница на степените $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ще означаваме с $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$. Структурата $(\mathbf{D}_\omega, \mathbf{0}_\omega, \leq_\omega, \vee)$ ще отбелязваме с $\mathcal{D}_\omega$.

3.2. Основни свойства на релацията $\leq_\omega$

Нека $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$ и нека разгледаме скок-класа $J_\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}$. Съгласно дефиницията, за произволно множество $X \subseteq \mathbb{N}$

$$\mathbf{d}_T(X) \in J_\mathcal{A} \iff A_n \leq_{r.e.} X_T^{(n)} \text{ равномерно по } n.$$

Както отбелязахме в Глава 1, съществуват рекурсивни функции h_1 и h_2, за които е изпълнено $W_i^A = W_{h_1(i)}(A^+)$ и $W_i(A^+) = W_{h_2(i)}^A$ за произволно естествено i. Следователно

$$\mathbf{d}_T(X) \in J_\mathcal{A} \iff A_n \leq_e (X_T^{(n)})^+ \text{ равномерно по } n.$$

От друга страна, съгласно Твърдение 1.4.1, $(X_T^{(n)})^+ \equiv_e (X^+)^{(n)}$ равномерно по n и следователно

$$\mathbf{d}_T(X) \in J_\mathcal{A} \iff A_n \leq_e (X^+)^{(n)} \text{ равномерно по } n.$$

Така, в сила е следното твърдение

Твърдение 3.2.1.

$$J_{\mathcal{A}} = \{\mathbf{d}_T(X) \mid \mathcal{A} \leq_\omega X^+\},$$

където тук с $\leq_\omega$ означаваме сводимостта на редица към множество дефинирана в 2.1.

Тогава, съгласно дефиницията на релацията $\leq_\omega$, за всеки две редици $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$ е в сила

$$\mathcal{B} \leq_\omega \mathcal{A} \iff (\forall X \subseteq \mathbb{N})(\mathcal{A} \leq_\omega X^+ \Rightarrow \mathcal{B} \leq_\omega X^+).$$

Сега, използвайки Теорема 2.1.7, получаваме следното необходимо и достатъчно условие за релацията $\leq_\omega$ между редици, което се оказва важно за следващите ни разглеждания.

Твърдение 3.2.2. *Нека $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$ и $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n<\omega}$ са два елемента на $\mathcal{S}_\omega$. Тогава*

$$\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B} \iff \forall n (A_n \leq_e P_n(\mathcal{B}) \text{ равномерно по } n)$$

(за дефиниция на множествата $P_n(\mathcal{B})$ виж 2.1)

Тъй като рекурсивните функции са изброимо много, получаваме следното следствие.

Следствие 3.2.3. *Нека $\mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$. Тогава съществуват изброимо много $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$, такива че $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}$*

Вече сме готови да формулираме и докажем основните свойства на релацията $\leq_\omega$.

Теорема 3.2.4. *Нека $\mathbf{b}$ е ω-номерационна степен. Тогава*

(1) *$\mathbf{b}$ съдържа изброимо много елементи на S_ω.*
(2) *$\mathbf{D}_\omega$ съдържа континуум много елементи.*
(3) *Множеството $[\mathbf{0}_\omega, \mathbf{b}] = \{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_\omega \mid \mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{b}\}$ е изброимо.*
(4) *Ако $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}_\omega$, то множеството $\{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_\omega \mid \mathbf{a} \not\leq_\omega \mathbf{b} \,\&\, \mathbf{b} \not\leq_\omega \mathbf{a}\}$ е неизброимо.*
(5) *Множеството $[\mathbf{b}, \infty) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_\omega \mid \mathbf{b} \leq_\omega \mathbf{a}\}$ е неизброимо.*

Доказателство. Доказателството на (1), (2) и (3) е директно приложение на Следствие 3.2.3 и на дефиницията на ω-номерационните степени.

Нека сега докажем (4). Нека $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}_\omega$ и да допуснем, че множеството $\{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_\omega \mid \mathbf{a} \not\leq_\omega \mathbf{b} \,\&\, \mathbf{b} \not\leq_\omega \mathbf{a}\}$ е изброимо и нека неговите елементи са $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \ldots$. Нека още $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n, \ldots$ са всички ненулеви ω-номерационни степени под $\mathbf{b}$. Нека фиксираме редици $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots$ и $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n, \ldots$ такива че $\mathbf{b} = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{B})$ и за всяко n, $\mathbf{a}_n = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{A}_n)$ и $\mathbf{r}_n = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{R}_n)$. Тъй като $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}_\omega$, то тогава $\mathcal{B} \not\leq_\omega \emptyset_\omega$ и за всяко n, $\mathcal{A}_n \not\leq_\omega \emptyset_\omega$ и $\mathcal{R}_n \not\leq_\omega \emptyset_\omega$. Тогава съгласно Теорема 2.1.8 съществува множество F, такова че $\mathcal{B} \not\leq_\omega F$ и за всяко

n, $\mathcal{A}_n \not\leq_\omega F$ и $\mathcal{R}_n \not\leq_\omega F$. Да разгледаме редицата $\mathcal{F} = (F, \emptyset, \emptyset, \ldots)$. Ясно е, че $\mathcal{F} \leq_\omega F$ и следователно съгласно Теорема 2.1.7 е в сила $\mathcal{B} \not\leq_\omega \mathcal{F}$ и $\mathcal{A}_n \not\leq_\omega \mathcal{F}$, $\mathcal{R}_n \not\leq_\omega \mathcal{F}$ за всяко естествено n. Нека положим $\mathbf{f} = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{F})$. Тогава $\mathbf{b} \not\leq_\omega \mathbf{f}$ и за всяко естествено n, $\mathbf{a}_n \not\leq_\omega \mathbf{f}$ и $\mathbf{r}_n \not\leq_\omega \mathbf{f}$. Но тогава $\mathbf{f}$ е несравнимо с $\mathbf{b}$ и не съвпада с нито една от всичките степени несравними с $\mathbf{b}$, което е противоречие.

Остава да докажем (5). Ако $\mathbf{b} = \mathbf{0}_\omega$, твърдението следва от (2). Нека сега $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}_\omega$ и да разгледаме множеството $Q = \{\mathbf{b} \vee \mathbf{a} \mid \mathbf{a} \not\leq_\omega \mathbf{b} \;\&\; \mathbf{b} \not\leq_\omega \mathbf{a}\}$. Очевидно $Q \subseteq [\mathbf{b}, \infty)$. Тъй като

$$\{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_\omega \mid \mathbf{a} \not\leq_\omega \mathbf{b} \;\&\; \mathbf{b} \not\leq_\omega \mathbf{a}\} \subseteq \bigcup_{\mathbf{c} \in Q} [\mathbf{0}_\omega, \mathbf{c}]$$

и множествата $[\mathbf{0}_\omega, \mathbf{c}]$ са изброими, а $\{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_\omega \mid \mathbf{a} \not\leq_\omega \mathbf{b} \;\&\; \mathbf{b} \not\leq_\omega \mathbf{a}\}$ е неизброимо, то тогава Q е неизброимо и следователно $[\mathbf{b}, \infty)$ е неизброимо.

□

3.3. Подструктурата $\mathcal{D}_1$ и теореми от селманов тип

Нека за произволно множество A от естествени числа с $A \uparrow \omega$ означим редицата $(A, \emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset)$. От дефиницията на скок-клас на една редица, и от това, че $\emptyset$ е рекурсивно номеруемо в $X^{(n)}$ равномерно по n и X, следва, че скок-класът на една редица $\mathcal{A} \uparrow \omega$ е

$$J_{A \uparrow \omega} = \{\mathbf{d}_T(X) \mid A \leq_{r.e.} X\}$$

Но тогава $A \uparrow \omega \leq_\omega B \uparrow \omega$, ако и само ако $\{\mathbf{d}_T(X) \mid B \leq_{r.e.} X\} \subseteq \{\mathbf{d}_T(X) \mid A \leq_{r.e.} X\}$, което, съгласно теоремата на Селман, е еквивалентно на $A \leq_e B$. Така окончателно

$$A \leq_e B \iff A \uparrow \omega \leq_\omega B \uparrow \omega \tag{3.3.1}$$

Това ни кара да очакваме, че $\mathcal{D}_\omega$ съдържа подструктура изоморфна на структурата на номерационните степени $\mathcal{D}_e$. Наистина, нека да разгледаме множеството

$$\mathbf{D}_1 = \{\mathbf{d}_\omega(A \uparrow \omega) \mid A \subseteq \mathbb{N}\}.$$

В сила е следното твърдение:

Твърдение 3.3.1.
(i) $(\mathbf{D}_1, \mathbf{0}_\omega, \leq_\omega, \vee) \subseteq (\mathbf{D}_\omega, \mathbf{0}_\omega, \leq_\omega, \vee)$
(ii) $(\mathbf{D}_1, \mathbf{0}_\omega, \leq_\omega, \vee) \cong (\mathbf{D}_e, \mathbf{0}_e, \leq_e, \vee)$

Доказателство. (i) Достатъчно е да покажем, че $\mathbf{0}_\omega \in \mathbf{D}_1$ и че $\mathbf{D}_1$ е затворено относно операцията $\vee$. Наистина, $\mathbf{0}_\omega = \mathbf{d}_\omega(\emptyset_\omega)$, $\emptyset_\omega = \emptyset \uparrow \omega$ и следователно $\mathbf{0}_\omega \in \mathbf{D}_1$. Нека сега $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_1$ и нека $\mathbf{a} = \mathbf{d}_\omega(A \uparrow \omega)$ и $\mathbf{b} = \mathbf{d}_\omega(B \uparrow \omega)$. Тогава $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{d}_\omega((A \uparrow \omega) \oplus (B \uparrow \omega))$. Но

$$(A \uparrow \omega) \oplus (B \uparrow \omega) \equiv_\omega (A \oplus B) \uparrow \omega$$

и следователно $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \in \mathbf{D}_1$.

(ii) Да разгледаме изображението $\kappa : \mathbf{D}_e \to \mathbf{D}_1$, действащо по правилото

$$\kappa(\mathbf{d}_e(A)) = \mathbf{d}_\omega(A \uparrow \omega)$$

за всяко $A \subseteq \mathbb{N}$. Нека първо да видим, че дефиницията е коректна. За целта, нека A и B са такива, че $\mathbf{d}_e(A) = \mathbf{d}_e(B)$, т.е. $A \equiv_e B$. Тогава от (3.3.1) получаваме, че $A \uparrow \omega \equiv_\omega B \uparrow \omega$ и следователно $\mathbf{d}_\omega(A \uparrow \omega) = \mathbf{d}_\omega(B \uparrow \omega)$.

Нека сега видим, че κ е хомоморфизъм. Наистина,

$$\kappa(\mathbf{0}_e) = \kappa(\mathbf{d}_e(\emptyset)) = \mathbf{d}_\omega(\emptyset \uparrow \omega) = \mathbf{0}_\omega.$$

Освен това

$$\mathbf{d}_e(A) \leq \mathbf{d}_e(B) \iff A \leq_e B \iff A \uparrow \omega \leq_\omega B \uparrow \omega \iff$$
$$\mathbf{d}_\omega(A \uparrow \omega) \leq_\omega \mathbf{d}_\omega(B \uparrow \omega) \iff \kappa(\mathbf{d}_e(A)) \leq_\omega \kappa(\mathbf{d}_e(B)).$$

Накрая имаме, че

$$\kappa(\mathbf{d}_e(A) \vee \mathbf{d}_e(B)) = \kappa(\mathbf{d}_e(A \oplus B)) = \mathbf{d}_\omega((A \oplus B) \uparrow \omega) =$$
$$\mathbf{d}_\omega(A \uparrow \omega) \vee \mathbf{d}_\omega(B \uparrow \omega) = \kappa(\mathbf{d}_e(A)) \vee \kappa(\mathbf{d}_e(B)).$$

От това, че κ запазва частичната наредба, следва, че κ е инективно. Остава само да покажем, че κ е сюрективно, което обаче следва директно от дефиницията на $\mathbf{D}_1$ и κ. Така, κ е изоморфизъм между двете структури, с което завършва доказателството на (ii).

$\square$

Съществуването на влагането κ ни дава право да считаме, че структурата на ω-номерационните степени е разширение на структурата на номерационните степени. Като вземем предвид, че номерационните степени са разширение на тюринговите, получаваме $\mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{D}_e \subseteq \mathcal{D}_\omega$. Нека отбележим, че при така разгледаните включвания $\mathbf{D}_e = \mathbf{D}_1 = \{\mathbf{d}_\omega(A \uparrow \omega) \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$, а

$$\mathbf{D}_T = \{\mathbf{d}_\omega(A^+ \uparrow \omega) \mid A \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Възниква въпросът, каква е връзката между тези разширения.

Първото свойство, което ще отбележим е, че всяка ω-номерационна степен се определя еднозначно от всички степени от $\mathbf{D}_T$ (както и от тези от $\mathbf{D}_e \backslash \mathbf{D}_T$), които са над нея. Тези свойства наричаме теореми от селманов тип.

Теорема 3.3.2. *Нека* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *са ω-номерационни степени. Тогава*

(i) $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{b} \iff (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}_T)(\mathbf{b} \leq_\omega \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{x})$.
(ii) $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{b} \iff (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}_e \backslash \mathbf{D}_T)(\mathbf{b} \leq_\omega \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{x})$.

Доказателство. От казаното до тук е ясно, че за произволни $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$ и $X \subseteq \mathbb{N}$

$$\mathcal{A} \leq_\omega X \uparrow \omega \iff \mathcal{A} \leq_\omega X.$$

Но тогава (i) е точно Теорема 2.1.7, а (ii) е Теорема 2.2.8

□

Следващото наблюдение ще ни бъде от полза за по-нататъчните ни разглеждания.

Твърдение 3.3.3. *Нека* $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_\omega$. *Тогава множеството* $\{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_1 \mid \mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a}\}$ *има най-голям елемент.*

Доказателство. Да фиксираме редица $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ и да разгледаме редицата $P_0(\mathcal{A}) \uparrow \omega$. Тъй като $P_0(\mathcal{A}) \leq_e P_0(\mathcal{A})$, то $P_0(\mathcal{A}) \uparrow \omega \leq_\omega \mathcal{A}$. От друга страна, ако $X \uparrow \omega \leq_\omega \mathcal{A}$ за някое $X \subseteq \mathbb{N}$, то $X \leq_e P_0(\mathcal{A})$ и значи $P_0(\mathcal{A}) \uparrow \omega \leq_\omega X \uparrow \omega$.

Следователно $\mathbf{d}_\omega(X \uparrow \omega)$ е търсеният най-голям елемент на множеството $\{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_1 \mid \mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a}\}$.

□

3.4. Операцията скок

Дефиниция 3.4.1. *Нека* $\mathcal{A}$ *е елемент на* $\mathcal{S}_\omega$. *Скок на редицата* $\mathcal{A}$ *ще наричаме редицата* $\mathcal{A}' = \{P_{1+n}(\mathcal{A})\}_{n<\omega}$.

На пръв поглед дефиницията не изглежда естествена. Неформално тя казва, че скокът на една редица е нейната скок редица отместена с една позиция наляво.

Лесно се вижда, че

$$\mathcal{A}' \equiv_\omega (P_1(A), A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}, \ldots). \tag{3.4.1}$$

Наистина, ако означим редицата отдясно с $\mathcal{A}^*$, то тогава за всяко n, $P_n(\mathcal{A}^*) = P_{1+n}(\mathcal{A})$, което прави (3.4.1) очевидно. Тази еквивалентна дефиниция на скока все още не изглежда съвсем естествена. Следващото твърдение, обаче, показва, че скокът е дефиниран правилно.

Твърдение 3.4.2.

$$J_{\mathcal{A}'} = \{\mathbf{x}' \mid \mathbf{x} \in J_{\mathcal{A}}\}.$$

Доказателство. Наистина, нека $\mathbf{x} \in J_{\mathcal{A}}$ и нека $X \in \mathbf{x}$. Тогава $A_n \leq_{r.e.} X_T^{(n)}$ равномерно по n и значи $P_1(\mathcal{A}) \leq_{r.e.} X'_T$ и $A_{1+n} \leq_{r.e.} (X_T^{(n)})'_T$ равномерно по n, от където $\mathbf{x}' = \mathbf{d}_T(X'_T) \in J_{\mathcal{A}'}$.

Нека сега $\mathbf{y} \in J_{\mathcal{A}'}$ и нека $\mathbf{y} = \mathbf{d}_T(Y)$. Тогава $P_1(\mathcal{A}) \leq_{r.e.} Y$ и $A_{1+n} \leq_{r.e.} Y_T^{(n)}$ равномерно по n. Тъй като $P_1(\mathcal{A}) = A'_0 \oplus A_1$, то съгласно Теорема 2.1.4 съществува X, такова че $A_0 \leq_{r.e.} X$ и $X'_T \equiv_T Y$. Така $A_n \leq_{r.e.} X_T^{(n)}$ равномерно по n и следователно $\mathbf{x} = \mathbf{d}_T(X) \in J_{\mathcal{A}}$.

□

От Твърдение 3.4.2 следва, че скокът на една редица има следните основни свойства:

$$\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}' \leq_\omega \mathcal{B}' \tag{3.4.2}$$

$$\mathcal{A} \lneq_\omega \mathcal{A}' \tag{3.4.3}$$

Свойство (3.4.2) ни позволява да дефинираме операцията скок и върху ω-номерационните степени, а именно:

Дефиниция 3.4.3. *Скок на ω-номерационната степен* $\mathbf{a}$ *ще наричаме степента* $\mathbf{a}' = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{A}')$, *където* $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ *е произволно.*

В сила са следните свойства:

$$\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a}' \leq_\omega \mathbf{b}' \tag{3.4.4}$$

$$\mathbf{a} \lneq_\omega \mathbf{a}' \tag{3.4.5}$$

Така дефинираната операция скок има редици интересни свойства, които ще изследваме в следващите глави. Тук ще се спрем на това, че операцията скок на ω-номерационните степени е съгласувана с влагането κ на $\mathcal{D}_e$ в $\mathcal{D}_\omega$, а именно:

Твърдение 3.4.4. *Множеството* $\mathbf{D}_1$ *е затворено относно операцията скок. При това, ако* κ *е естественият изоморфизъм между* $\mathcal{D}_e$ *и* $\mathcal{D}_1$ *(дефиниран в* Твърдение 3.3.1*), то*

$$\kappa(\mathbf{a}') = \kappa(\mathbf{a})'.$$

Доказателство. Достатъчно е да покажем, че $(A \uparrow \omega)' \equiv_\omega A' \uparrow \omega$ за всяко множество A.

Нека A е множество от естествени числа. Тогава

$$(A \uparrow \omega)' \equiv_\omega (A' \oplus \emptyset, \emptyset, \dots)$$

и значи $(A \uparrow \omega)' \equiv_\omega (A' \oplus \emptyset) \uparrow \omega$. Но $A' \oplus \emptyset \equiv_e A'$ и значи $(A \uparrow \omega)' \equiv_\omega A' \uparrow \omega$, което трябваше да докажем.

□

3.5. Безкраен скок в $\mathcal{D}_\omega$

Нека α е рекурсивен ординал. Ако искаме да дефинираме α-ти скок на редицата $\mathcal{A}$, по аналогия с дефиницията на $\mathcal{A}'$, трябва да подберем редица $\mathcal{A}^{(\alpha)}$ така, че $J_{\mathcal{A}^{(\alpha)}} = \{\mathbf{x}^{(\alpha)} \mid \mathbf{x} \in J_\mathcal{A}\}$. Ясно е, че ако $\alpha < \omega$, то това свойство се изпълнява от редицата $\mathcal{A}^{(\alpha)} = \{P_{\alpha+n}(\mathcal{A})\}_{n<\omega}$. Нека сега да видим, как стоят нещата при $\alpha \geq \omega$.

Твърдение 3.5.1. *Нека* $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$ *и* α *е рекурсивен ординал с фиксирано означение за него. Тогава скок класът на редицата* $(P_{<\omega})^{(\alpha)} \uparrow \omega$ *е точно*

$$\{\mathbf{x}^{(\omega+\alpha)} \mid \mathbf{x} \in J_\mathcal{A}\}.$$

Доказателство. Нека $\mathbf{x} \in J_\mathcal{A}$ и нека $X \in \mathbf{x}$. Тогава, $P_n(\mathcal{A}) \leq_e (X^+)^{(n)}$, равномерно по n и следователно $P_{<\omega}(\mathcal{A}) \leq_e (X^+)^{(\omega)}$. Тогава $P_{<\omega}^{(\alpha)} \leq_e (X^+)^{(\omega+\alpha)}$ и значи $\mathbf{x} \in J_{((P_{<\omega})^{(\alpha)} \uparrow \omega)}$.

Нека сега $\mathbf{y} \in J_{((P_{<\omega})^{(\alpha)} \uparrow \omega)}$ и нека $Y \in \mathbf{y}$. Тогава $(P_{<\omega})^{(\alpha)} \leq_e Y^+$ и значи, съгласно Теорема 2.1.5, съществува множество X, такова че $\mathcal{A} \leq_\omega X^+$ и $(X^+)^{(\omega+\alpha)} \equiv_e Y^+$. Нека $\mathbf{x} = \mathbf{d}_T(X)$. Тогава $\mathbf{x} \in J_{\mathcal{A}}$ и $\mathbf{x}^{(\omega+\alpha)} = \mathbf{y}$.

□

Това твърдение ни позволява да дефинираме α-ти скок на една редица $\mathcal{A}$ за произволен рекурсивен ординал α.

Дефиниция 3.5.2. *Нека α е произволен рекурсивен ординал с фиксирано означение за него. Нека още $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$. Дефинираме α-ти скок на $\mathcal{A}$ чрез*

(1) *Ако $\alpha < \omega$, полагаме $\mathcal{A}^{(\alpha)} = \{P_{\alpha+n}(\mathcal{A})\}_{n<\omega}$.*
(2) *Ако $\alpha = \omega + \beta$, полагаме $\mathcal{A}^{(\alpha)} = (P_{<\omega})^{(\beta)} \uparrow \omega$.*

От дефиницията и предното твърдение директно получаваме, че $J_{\mathcal{A}^{(\alpha)}}$ не зависи от означението за α. Нещо повече — за произволен рекурсивен ординал α и $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$

$$\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}^{(\alpha)} \leq_\omega \mathcal{B}^{(\alpha)}.$$

Това ни позволява да дефинираме α-ти скок за ω-номерационните степени, като

$$\mathbf{a}^{(\alpha)} = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{A}^{(\alpha)}),$$

където $\mathcal{A}$ е произволен елемент на $\mathbf{a}$.

Сега, от Твърдение 3.5.1 получаваме следната теорема, даваща основните свойства на α-тия скок на ω-номерационните степени.

Теорема 3.5.3. *За произволни рекурсивни ординали α и β и ω-номерационни степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$*

(1) $\alpha < \beta \Longrightarrow \mathbf{a}^{(\alpha)} \lneq_\omega \mathbf{a}^{(\beta)}$.
(2) $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{b} \Longrightarrow \mathbf{a}^{(\alpha)} \leq_\omega \mathbf{b}^{(\alpha)}$.
(3) *Нека $\alpha < \omega$. Тогава $\mathbf{a}^{(\alpha)}$ съвпада с α-тата итерация на операцията $'$.*
(4) *Ако $\alpha \geq \omega$, то $\mathbf{a}^{(\alpha)} \in \mathbf{D}_1$.*
(5) $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}_e)(\kappa(\mathbf{x}^{(\alpha)}) = \kappa(\mathbf{x})^{(\alpha)})$.

Глава 4

Структурни свойства на $\mathcal{D}_\omega$

Целта на тази глава е да изследва изброимите идеали на $\mathcal{D}_\omega$. За простота на изказа на твърденията, в тази глава ще считаме, че $\mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{D}_e \subseteq \mathcal{D}_\omega$.

Първо в 4.1 ще видим връзката между идеалите на $\mathcal{D}_T$, $\mathcal{D}_e$ и $\mathcal{D}_\omega$. В 4.2 ще изследваме точните двойки на идеалите $\mathcal{D}_\omega$. Спектър [**41**] и Кейз [**3**] показват, че всеки изброим идеал на $\mathcal{D}_T$ и $\mathcal{D}_e$ е сечение на два главни идеала, т.е. всеки изброим идеал има точна двойка. Оказва се обаче, че това не е вярно за идеалите на $\mathcal{D}_\omega$. Причината се крие в следното свойство:

За произволни три идеала I, J и K на $\mathcal{D}_\omega$

$$I = J \cap K \Longrightarrow I' = J' \cap K',$$

където I', J' и K' са най-малките идеали съдържащи съответно скоковете на елементите на I, J и K. Така, ако вземем идеал I, такъв че $I' = I$ (например $I = \{\mathbf{x} \mid \exists n(\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{0}_\omega{}^{(n)}\})$ и той се окаже сечение на главните идеали породени от $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то той трябва да бъде сечение и на главните идеали породени от $\mathbf{a}^{(n)}$ и $\mathbf{b}^{(n)}$, което обаче в повечето случаи е невъзможно съгласно [**7**].

Все пак, благодарение на Теорема 2.1.8, ще докажем, че всеки главен идеал е нетривиално сечение на два главни идеала, т.е. за всяка степен съществува минимална двойка, като при това минималната двойка, може да бъде подбрана от $\mathcal{D}_T$ или $\mathcal{D}_e \backslash \mathcal{D}_T$. От тук можем да заключим, че $\mathcal{D}_T$ е база за автоморфизмите на $\mathcal{D}_\omega$, т.е. всеки автоморфизъм, оставящ на място степените от $\mathcal{D}_T$ е всъщност идентитета.

В 4.3 ще видим един клас от неглавни идеали притежаващи точни двойки.

Накрая в 4.4 ще въведем понятие за квази-минимална степен, аналогично на понятието за квази-минимална степен в $\mathcal{D}_e$. Отново, както и при точните двойки, ще видим, че не всеки идеал има квази-минимална степен (за разлика от случая на $\mathcal{D}_e$), но от друга страна главните имат.

Резултати от тази глава са публикувани в [**12**].

4.1. Изброими идеали

Дефиниция 4.1.1. *Нека $\mathcal{M} = (M, \leq, \vee)$ е горна полу-решетка. Казваме, че множеството $I \subseteq M$ е идеал в $\mathcal{M}$, тогава и само тогава когато:*

(1) *Ако $\mathbf{x} \in I$, то за всяко $\mathbf{y}$, такова че $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$, е изпълнено $\mathbf{y} \in I$;*
(2) *Ако $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I$, то $\mathbf{x} \vee \mathbf{y} \in I$.*

С други думи идеал е множество, което е затворено надолу и е затворено относно операцията точна горна граница. Ясно е, че произволно сечение на идеали в $\mathcal{M}$, също е идеал в $\mathcal{M}$. Така, ако $A \subseteq M$, със $\mathcal{I}(A)$ ще означаваме най-малкият (относно теоретико-множественото включване) идеал в $\mathcal{M}$, съдържащ множеството A. По-точно

$$\mathcal{I}(A) = \bigcap \{I \mid I \text{ е идеал в } \mathcal{M} \text{ и } A \subseteq I\}. \tag{4.1.1}$$

Идеалът $\mathcal{I}(A)$ ще наричаме идеал породен от A. Дефиницията (4.1.1) е еквивалентна на

$$\mathcal{I}(A) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \leq \mathbf{a}_1 \vee \mathbf{a}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{a}_n \text{ за някои } n \in \mathbb{N} \text{ и } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in A\}. \tag{4.1.2}$$

Ще казваме, че един идеал е главен, ако той се поражда от един единствен елемент. В термините на (4.1.2) това означава, че един идеал е главен точно тогава, когато той има най-голям елемент. С други думи

$$\mathcal{I}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} \leq \mathbf{a}\}.$$

Тъй като ще изучаваме идеали в $\mathcal{D}_T$, $\mathcal{D}_e$ and $\mathcal{D}_\omega$ можем да дефинираме понятието "скок на идеал" по следния начин:

Дефиниция 4.1.2. *Нека I е идеал в $\mathcal{D}_T$ (съответно в $\mathcal{D}_e$ или $\mathcal{D}_\omega$). Скок на идеала I ще означаваме с I' и ще наричаме най-малкият идеал в $\mathcal{D}_T$ (съответно в $\mathcal{D}_e$ или $\mathcal{D}_\omega$), съдържащ скоковете на елементите на I. С други думи*

$$I' = \mathcal{I}(\{\mathbf{a}' \mid \mathbf{a} \in I\}).$$

Нека отбележим, че

$$\mathbf{x} \in I' \iff \mathbf{x} \leq \mathbf{a}' \text{ за някое } \mathbf{a} \in I.$$

В частност, ако I е главен, то I' също е главен. По-точно, $\mathcal{I}(\mathbf{a})' = \mathcal{I}(\mathbf{a}')$.

Тъй като предполагаме $\mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{D}_e \subseteq \mathcal{D}_\omega$, ако вземем например $A \subseteq \mathbf{D}_T$, то означението $\mathcal{I}(A)$ става двусмислено. За това въвеждаме следните допълнителни означения: с $\mathcal{I}_\omega(A)$ ще означаваме идеалът породен от A в $\mathcal{D}_\omega$, с

Следващото твърдение показва връзката между идеалите в $\mathcal{D}_T$ и $\mathcal{D}_e$ и идеалите в $\mathcal{D}_\omega$.

Твърдение 4.1.3. *Нека J е идеал в $\mathcal{D}$, където $\mathcal{D}$ е $\mathcal{D}_T$ или $\mathcal{D}_e$. Нека J' е скокът на J в $\mathcal{D}$. Тогава*

(1) $J = \mathcal{I}_\omega(J) \cap \mathbf{D}$.
(2) $J' = \mathcal{I}_\omega(J)' \cap \mathbf{D}$.

Доказателство. Ще докажем твърдението за идеал в $\mathcal{D}_T$. Нека J е идеал в $\mathcal{D}_T$ и нека J' е неговият скок в $\mathcal{D}_T$. Тъй като J е идеал, то $\mathbf{a}_1 \vee \mathbf{a}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{a}_n \in J$, за произволни $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in J$. Така от (4.1.2) получаваме, че

$$\mathcal{I}_\omega(J) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_\omega \mid \mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a} \text{ за някое } \mathbf{a} \in J\}.$$

От друга страна

$$J = \{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T \mid \mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a} \text{ за някое } \mathbf{a} \in J\},$$

което доказва (1).

Нека сега докажем (2). Съгласно дефиницията на скок на идеал имаме, че $\mathbf{x} \in \mathcal{I}(J)' \iff \mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a}'$ за някое $\mathbf{a} \in \mathcal{I}(J)$. Така възползвайки се от монотонността на операцията скок и от (1) получаваме

$$\mathbf{x} \in \mathcal{I}(J)' \iff \mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{b}' \text{ за някое } \mathbf{b} \in J.$$

По този начин

$$\mathcal{I}(J)' = \{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_\omega \mid \mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a} \text{ за някое } \mathbf{a} \in J'\}.$$

От друга страна

$$J' = \{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T \mid \mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a} \text{ за някое } \mathbf{a} \in J'\},$$

което доказва (2).

□

4.2. Минимални и точни двойки

Дефиниция 4.2.1. *Нека I е идеал в $\mathcal{D}$, където $\mathcal{D}$ е $\mathcal{D}_T$, $\mathcal{D}_e$ или $\mathcal{D}_\omega$. Ще казваме, че степените $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ от $\mathbf{D}$, образуват точна двойка за I, ако*

$$I = \mathcal{I}_\mathcal{D}(\mathbf{x}) \cap \mathcal{I}_\mathcal{D}(\mathbf{y}),$$

т.е. I е сечението на главните идеали породени от $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$. В частност, ако I е главен идеал породен от $\mathbf{a}$, ще казваме, че $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ образуват минимална двойка за $\mathbf{a}$. В този случай, ще записваме $\mathbf{a} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$.

Когато става дума за тюрингови или номерационни степени не е необходимо, ако $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ образуват точна двойка за идеала I, то двойката $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$ да бъде точна за идеала I'. Например, нека I е идеалът съдържащ само $\mathbf{0}$ и нека изберем точна двойка $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ за I, така, че $\mathbf{0}'' \leq \mathbf{x}', \mathbf{y}'$ (това можем да направим, използвайки Теоремата за обръщане на скока от [**35**]). Но I' е точно главният идеал породен от $\mathbf{0}'$ и следователно $\mathbf{0}'' \notin I'$ и значи $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$ не могат да бъдат точна двойка за I'.

Оказва се, че за ω-номерационните степени е в сила следното твърдение.

ТВЪРДЕНИЕ 4.2.2. *Нека I е идеал в $\mathcal{D}_\omega$ и нека $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ образуват точна двойка за I. Тогава*

$$I' = \mathcal{I}_\omega(\mathbf{x}') \cap \mathcal{I}_\omega(\mathbf{y}').$$

ДОКАЗАТЕЛСТВО. Нека I е идеал в $\mathcal{D}_\omega$ и нека $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ образуват точна двойка за I, т.е.

$$\mathbf{a} \in I \iff \mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{y}.$$

Тъй като

$$\mathbf{c} \in I' \iff \mathbf{c} \leq_\omega \mathbf{a}' \text{ за някое } \mathbf{a} \in I,$$

от монотонността на скока получаваме

$$\mathbf{c} \in I' \Longrightarrow \mathbf{c} \leq_\omega \mathbf{a}' \text{ за някое } \mathbf{a} \in I \Longrightarrow \mathbf{c} \leq_\omega \mathbf{x}' \text{ и } \mathbf{c} \leq_\omega \mathbf{y}'$$

Следователно $I' \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{x}') \cap \mathcal{I}(\mathbf{y}')$.

За обратното включване да предположим, че $\mathbf{a} \in I(\mathbf{x}') \cap I(\mathbf{y}')$. Нека $\mathbf{a} = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{A})$, където $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$ и нека $\mathbf{x} = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{X})$ и $\mathbf{y} = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{Y})$. Следователно в сила е $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{X}'$ и $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{Y}'$. Това от своя страна означава, че $A_n \leq_e P_{n+1}(\mathcal{X})$ и $A_n \leq_e P_{n+1}(\mathcal{Y})$ равномерно по n. Нека положим $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n<\omega}$ да бъде редицата $(\emptyset, A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots)$, т.е. $B_0 = \emptyset$ и $B_{n+1} = A_n$ за всяко естествено n. Ясно е, че $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}'$. Също така $B_n \leq_e P_n(\mathcal{X})$ и $B_n \leq_e P_n(\mathcal{Y})$ равномерно по n, което пък от своя страна означава, че $\mathcal{B} \leq_\omega \mathcal{X}$ и $\mathcal{B} \leq_\omega \mathcal{Y}$. Следователно $\mathbf{d}_\omega(\mathcal{B}) \in I$ и значи $\mathbf{d}_\omega(\mathcal{B})' \in I'$. Но $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{d}_\omega(\mathcal{B})'$ и следователно $\mathbf{a} \in I'$. Така окончателно доказахме

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}') \cap \mathcal{I}(\mathbf{y}') \subseteq I'.$$

□

Ако с $I^{(n)}$ означим идеалът, който се получава по правилото $I^{(0)} = I$ и $I^{(n+1)} = \left(I^{(n)}\right)'$, то Твърдение 4.2.2, казва че ако $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ образуват точна двойка за I, то тогава $\mathbf{x}^{(n)}$ и $\mathbf{y}^{(n)}$ образуват точна двойка за $I^{(n)}$ за всяко n.

Възниква въпросът дали това свойство остава в сила, ако заменим n с произволен рекурсивен ординал α. Отговорът е отрицателен, което ще видим малко по-нататък.

Ясно е, че всеки два елемента могат да бъдат точна двойка за някой идеал. По-точно $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ са точна двойка за идеалът $\mathcal{I}(\mathbf{x}) \cap \mathcal{I}(\mathbf{y})$ (това е вярно за произволна горна полу-решетка). Обратната задача, а именно, кои идеали имат екзактни двойки, не е така тривиална. От Теорема 3.2.4 следва, че всеки главен идеал в $\mathcal{D}_\omega$ (а също така и в $\mathcal{D}_T$ и $\mathcal{D}_e$) съдържа най-много изброимо много елементи. Така само изброимите идеали биха могли да имат екзактни двойки. В [**41**] Спектър доказва, че всеки изброим идеал в $\mathcal{D}_T$ има точна двойка. От друга страна в [**3**] Кейз показва, че това твърдение е вярно и за $\mathcal{D}_e$ като при това в този случай точната двойка може да бъде избрана от тоталните степени (тези съответстващи на тюринговите степени при роджърсовото влагане).

За ω-номерационните степени нещата стоят по-различно. Както ще видим в следващата теорема, не всеки изброим идеал от ω-номерационни степени има точна двойка. Причината за това се крие в Твърдение 4.2.2 и следния резултат на Ендертон и Пътнам [**7**].

Теорема 4.2.3 (Ендертон и Пътнам). *Нека α е рекурсивен ординал и нека $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_T$ е такова че $(\forall \beta < \alpha)(\mathbf{0}_T{}^{(\beta)} \leq_T \mathbf{a})$. Тогава $\mathbf{0}_T{}^{(\alpha)} \leq_T \mathbf{a}''$.*

Теорема 4.2.4. *Нека I е идеал в $\mathcal{D}_\omega$, такъв че $I' = I$. Нека още съществува рекурсивен ординал α, такъв че $\mathbf{0}_\omega{}^{(\alpha)} \notin I$. Тогава*

$$I \neq \bigcap_{I \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{a})} \mathcal{I}(\mathbf{a}).$$

В частност, не съществува точна двойка за I.

Доказателство. Нека α е най-малкият рекурсивен ординал, за който $\mathbf{0}_\omega{}^{(\alpha)} \notin I$. Нека фиксираме една степен $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_\omega$, такава че $I \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{a})$ и нека $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$. Да разгледаме A_0 — първият елемент на редицата $\mathcal{A}$. Нека фиксираме означение за α. Тогава в сила е

$$\forall \beta < \alpha[\emptyset^{(\beta)} \leq_e A_0].$$

Тъй като A_0' е тотално множество, от връзката между тюринговата и номерационната сводимост (Лема 1.3.2) получаваме

$$\forall \beta < \alpha[\emptyset^{(\beta)} \leq_T A_0'].$$

Тогава съгласно Твърдение 1.4.1 и Теорема 4.2.3 $\emptyset^{(\alpha)} \leq_e A_0'''$ и значи $\emptyset^{(\alpha)} \leq_e P_3(\mathcal{A})$.

Нека $\mathcal{X} = \{X_n\}_{n<\omega}$ е редицата, за която $X_3 = \emptyset^{(\alpha)}$ и $(\forall n \neq 3)(X_n = \emptyset)$. Нека още $\mathbf{x} = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{X})$. Тогава $\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}_\omega{}^{(\alpha)}$ и освен това

$$I \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{a}) \Longrightarrow \mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a}.$$

Нека сега да допуснем, че $I = \bigcap_{I \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{a})} \mathcal{I}(\mathbf{a})$. Тогава $\mathbf{x} \in I$ и тъй като $I = I'$, то $\mathbf{x}^{(3)} \in I$, което противоречи с избора на α.

□

Този резултат ни дава надежда, че ω-номерационните степени образуват решетка. Такъв би бил случая, ако нито един неглавен идеал няма точна двойка. Това обаче се опровергава от следното просто наблюдение.

Твърдение 4.2.5. *Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_e$ нямат точна долна граница в $\mathcal{D}_e$. Тогава $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ нямат точна долна граница в $\mathcal{D}_\omega$.*

Доказателство. Нека $\mathbf{y} \in \mathbf{D}_\omega$ е такова, че $\mathbf{y} \leq_\omega \mathbf{a}, \mathbf{b}$. Нека $\mathbf{y}_0$ е най-голямата степен от $\mathbf{D}_e$, такава че $\mathbf{y}_0 \leq_\omega \mathbf{y}$ (Твърдение 3.3.3). Тъй като $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ нямат точна долна граница в $\mathcal{D}_e$, то съществува $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_e$, такова че $\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a}, \mathbf{b}$, но $\mathbf{x} \not\leq_\omega \mathbf{y}_0$. Съгласно избора на $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{x} \not\leq_\omega \mathbf{y}$ и следователно $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ нямат точна долна граница в $\mathcal{D}_\omega$.

$\square$

И така, ω-номерационните степени не са решетка и не всеки изброим идеал има точна двойка. Следващата теорема ни дава един клас от изброими идеали, които имат точна двойка.

Теорема 4.2.6. *Нека $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbf{D}_\omega$ са такива, че $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{x}$. Тогава съществува $\mathbf{y} \in \mathbf{D}_T$ (съответно от $\mathbf{D}_e \backslash \mathbf{D}_T$), такова че $\mathbf{a} \neq \mathbf{y}$ и*

$$\mathbf{a} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}.$$

В частност, всеки главен идеал има точна двойка извън идеала.

Доказателство. Нека $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$, $\mathcal{X} \in \mathbf{x}$ и нека

$$S = \{\mathcal{R} \in \mathcal{S}_\omega \mid \mathcal{R} \leq_\omega \mathcal{X} \ \& \ \mathcal{R} \not\leq_\omega \mathcal{A}\}.$$

Ясно е, че множеството S е изброимо и тогава, съгласно Теорема 2.1.8 (съответно 2.2.7), съществува тотално (частично) множество F, такова че $\mathcal{A} \leq_\omega F$ и $(\forall \mathcal{R} \in S)(\mathcal{R} \not\leq_\omega F)$. Нека $\mathbf{y} = \mathbf{d}_\omega(F \uparrow \omega)$. Тогава $\mathbf{y} \in \mathbf{D}_T$ ($\mathbf{y} \in \mathbf{D}_e \backslash \mathbf{D}_t$) и

$$\mathbf{a} \lneq_\omega \mathbf{y} \ \& \ (\forall \mathcal{R} \in S)(\mathbf{d}_\omega(\mathcal{R}) \not\leq \mathbf{y}).$$

Нека $\mathbf{z} \leq_\omega \mathbf{x}, \mathbf{y}$. Тогава $(\forall \mathcal{R} \in S)(\mathbf{z} \neq \mathbf{d}_\omega(\mathcal{R}))$. Тогава от дефиницията на S, $\mathbf{z} \leq_\omega \mathbf{a}$ и значи $\mathbf{a} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$.

$\square$

От тук получаваме следното следствие за автоморфизмите на $\mathcal{D}_\omega$.

Следствие 4.2.7. *Нека φ е автоморфизъм на $\mathcal{D}_\omega$, който оставя на място всички степени от $\mathbf{D}_T$ (съответно $\mathbf{D}_e \backslash \mathbf{D}_T$). Тогава $\varphi = \mathbf{id}$.*

Доказателство. Нека φ е автоморфизъм на $\mathcal{D}_\omega$. Тогава за всяко $\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_\omega$

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \Longrightarrow \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{a}) \wedge \varphi(\mathbf{b}).$$

Сега твърдението следва от Теорема 4.2.6.

$\square$

От връзката между идеалите на $\mathcal{D}_T$, $\mathcal{D}_e$ и $\mathcal{D}_\omega$ (Твърдение 4.1.3) получаваме следното следствие.

Следствие 4.2.8. *Нека $\mathcal{D}$ е $\mathcal{D}_T$ или $\mathcal{D}_e$. Тогава за всяко $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$, съществуват $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}$, такива че $\mathbf{a} \neq \mathbf{x}, \mathbf{y}$ и*

$$\forall n(\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)} \wedge \mathbf{y}^{(n)}).$$

Остава да видим, дали в Твърдение 4.2.2, можем да заменим $'$ с произволен рекурсивен скок.

ТВЪРДЕНИЕ 4.2.9. *Съществуват* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}_\omega$, *такива че* $\mathbf{0}_\omega = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ *и* ${\mathbf{0}_\omega}^{(\omega+1)} \leq_\omega \mathbf{x}^{(\omega)}, \mathbf{y}^{(\omega)}$.

ДОКАЗАТЕЛСТВО. Нека да разгледаме рекурсивния ординал $\alpha = \omega + 1$ и да фиксираме означение за него. Нека X е множество от естествени числа, такова че $\emptyset^{(\omega+1)} \leq_e X^{(\omega)}$. Нека $\mathcal{A} = \{A_\beta\}_{\beta<\omega+1}$, където за всяко $\beta < \omega$, $A_\beta = \emptyset$, а $A_\omega = \emptyset^{(\omega+1)}$. Ясно е, че $\mathcal{A} \leq_\alpha X$. Накрая, нека $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_1, \ldots$, $\mathcal{R}_n, \ldots$ са всички редици с дължина α, такива че за всяко n, $\mathcal{R}_n \leq_\alpha X$ и

$$(\exists F \subseteq \mathbb{N})(\mathcal{A} \leq_\alpha F \ \& \ \mathcal{R}_n \not\leq_\alpha F).$$

Прилагайки Теорема 2.1.8, получаваме множество Y, такова че $\mathcal{A} \leq_\alpha Y$ и за всяко n $R_n \not\leq_\alpha Y$. Да разгледаме степените $\mathbf{x} = \mathbf{d}_\omega(X \uparrow \omega)$ и $\mathbf{y} = \mathbf{d}_\omega(Y \uparrow \omega)$ Нека $\mathbf{b} \in \mathbf{D}_\omega$ е такова, че $\mathbf{b} \leq_\omega \mathbf{x}, \mathbf{y}$ и нека $\mathcal{B} \in \mathbf{b}$. Тогава $\mathcal{B} \leq_\omega X, Y$. Да разгледаме редицата $\mathcal{B}^* = \{B^*_\beta\}_{\beta<\alpha}$, където за $\beta < \alpha$, $B^*_\beta = B_\beta$, а $B^*_\omega = \emptyset$. Тогава $\mathcal{B}^* \leq_\alpha X, Y$ и следователно $\forall n(\mathcal{B}^* \neq \mathcal{R}_n)$. Така, съгласно избора на редиците $\mathcal{R}_n$,

$$(\forall F \subseteq \mathbb{N})(\mathcal{A} \leq_\alpha F \Longrightarrow \mathcal{B}^* \leq_\alpha F),$$

и значи съществува рекурсивна функция g, такава че $B^*_\beta \leq_e P_\beta(\mathcal{A})$ равномерно по $\beta < \alpha$. Тогава, съгласно избора на $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \leq_\omega \emptyset_\omega$ и значи $\mathbf{b} = \mathbf{0}_\omega$. Така

$$\mathbf{0}_\omega = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}.$$

От $\mathcal{A} \leq_\alpha Y$ получаваме $\emptyset^{(\omega+1)} \leq_e Y^{(\omega)}$ и следователно

$$\mathbf{0}_\omega^{(\omega+1)} \leq_\omega \mathbf{x}^{(\omega)}, \mathbf{y}^{(\omega)}.$$

□

СЛЕДСТВИЕ 4.2.10. *Съществува рекурсивен ординал* α, *идеал* I *и степени* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_\omega$, *такива че* $I = \mathcal{I}_\omega(\mathbf{x}) \cap \mathcal{I}(\mathbf{y})$, *но*

$$I^{(\alpha)} = \mathcal{I}(\{\mathbf{a}^{(\alpha)} \mid \mathbf{a} \in I\}) \neq \mathcal{I}(\mathbf{x}^{(\alpha)}) \cap \mathcal{I}(\mathbf{y}^{(\alpha)}).$$

4.3. Един клас идеали притежаващи точни двойки

В този раздел ще разгледаме един клас идеали, притежаващи точни двойки. Той е свързан със степени, които се получават благодарение на изискването за равномерност в дефиницията на кодиране на редица с множество. Нека преди всичко въведем следната релация на еквивалентност между ω-номерационните степени.

ДЕФИНИЦИЯ 4.3.1. *Нека* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *са две* ω*-номерационни степени. Ще казваме, че* $\mathbf{b}$ *е почти* $\mathbf{a}$ *и ще означаваме* $\mathbf{b} \approx \mathbf{a}$, *ако за някое* $\mathcal{B} \in \mathbf{b}$ *и* $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ *е в сила* $\forall n(P_n(\mathcal{B}) \equiv_e P_n(\mathcal{A}))$.

Нека първо да отбележим, че в горната дефиниция можем да заместим израза "за някое" с израза "за всяко". Нещо повече – нека фиксираме една степен $\mathbf{a}$ и представител $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ и да разгледаме множеството $\{\mathcal{B} \mid \forall n(P_n(\mathcal{A}) \equiv_e P_n(\mathcal{B}))\}$. Ясно е, че неговата мощност е континуум. От друга страна, една ω-номерационна степен може да съдържа само изброимо много редици и значи съществуват континуум много степени $\mathbf{b}$, такива че $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$. Така, светът на почти $\mathbf{a}$ степените е изключително голям и неговото изследване представлява интерес. Така например, както ще видим в предпоследната глава, почти $\mathbf{0}_\omega$ степените играят важна роля в локалната теория на ω-номерационните степени.

Класът идеали, който ще изследваме, се състои от изброимите идеали породени от почти $\mathbf{a}$ степени, за някое $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_\omega$. Както ще видим в следващата теорема всеки такъв идеал притежава точна двойка. За доказателството на теоремата ще използваме конструкцията от [**12**]. В [**12**] тази конструкция е употребена за доказателство на теорема, гласяща, че всеки изброим идеал от ω-номерационни степени има точна двойка. Както, обаче, видяхме в предния раздел, това твърдение не е вярно. Грешката допусната в [**12**] е, че в повечето случаи не може да бъде осигурена монотонността на форсинг релацията използвана за построяването на точната двойка. В случай, обаче, че идеалът е породен от почти $\mathbf{a}$ степени, форсинг релацията е монотонна, и конструкцията наистина ни дава точна двойка.

Теорема 4.3.2. *Нека $\mathbf{a}_1 \lneq_\omega \mathbf{a}_2 \lneq_\omega \cdots \lneq_\omega \mathbf{a}_n \lneq_\omega \cdots$ са ω-номерационни степени, такива че за всяко i и j, $\mathbf{a}_i \approx \mathbf{a}_j$. Тогава идеалът $\mathcal{I}(\{\mathbf{a}_n \mid n < \omega\})$ има точна двойка.*

За да докажем теоремата ще комбинираме техниката от доказателството на съществуване на точни двойки [**4**] и техниката за контролиране на номерационния скок [**37, 39**]. Общата идея е следната: както в доказателството на теоремата за минималните двойки, ще фиксираме една ω-номерационна степен $\mathbf{g}$, която мажорира всички степени в идеала. След което за всяка степен $\mathbf{b}_j \leq_\omega \mathbf{g}$, която не е в идеала, фиксираме редица $\mathcal{B}_j \in \mathbf{b}_j$. Освен това ще фиксираме и редици $\mathcal{A}_j \in \mathbf{a}_j$. Целта ни ще бъде да построим редица $\mathcal{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots)$, чиято степен да бъде горна граница на идеала и същевременно изпуска степените $\mathbf{b}_j$, т.е. трябва да осигурим $\mathcal{A}_j \leq_\omega \mathcal{F}$ и $\mathcal{B}_j \not\leq_\omega \mathcal{F}$ за всяко j. Ще построим редицата $\mathcal{F}$, като използваме индуктивна конструкция, като на всяка стъпка ще строим крайна апроксимация на $\mathcal{F}$. За да осигурим условията $\mathcal{A}_j \leq_\omega \mathcal{F}$ ще използваме аналог на техниката на кодиране от [**4**]. Необходимо е $\mathcal{F}$ да кодира множествата A_{jk} за $j, k < \omega$ ($\mathcal{A}_j = \{A_{jk}\}_{k<\omega}$), като множествата с втори индекс 0, трябва да бъдат кодирани в F_0, тези с втори индекс 1 – в F_1 и т.н.

Тъй като за всяко i и j, $\mathbf{a}_i \approx \mathbf{a}_j$, то, неформално, бихме могли да заменим първите n координати на кой да е представител на $\mathbf{a}_i$ с първите n координати на кой да е представител на $\mathbf{a}_j$ и отново бихме получили представител на $\mathbf{a}_i$. По-формално, в сила е следната лема.

Лема 4.3.3. *Нека $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$. Тогава, за всяко $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$, $\mathcal{B} \in \mathbf{b}$ и всяко естествено число n, редицата $\mathcal{C} = \{C_k\}_{k<\omega}$, за която $C_k = B_k$ за $k \leq n$ и $C_k = A_k$ за $k > n$ е също представител на $\mathbf{a}$, т.е. $\mathcal{C} \in \mathbf{a}$.*

Доказателство. Твърдението следва от дефиницията на релацията $\approx$ и от факта, че ако сменим краен брой стойности на рекурскивна функция отново получаваме рекурсивна функция.

□

В този смисъл, не ни е нужно да знаем всичките множества с втори индекс 0 — достатъчно е да знаем само A_0. Нещо повече — първите няколко координати на $\mathcal{F}$ биха могли да кодират само координатите на $\mathcal{A}_0$; следващите няколко координати на $\mathcal{F}$ - тези на $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ и т.н. С други думи, бихме могли да имаме произволна редица $0 = a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, такава че за $a_i \leq n < a_{i+1}$ множеството F_n да кодира n-тите координати на редиците $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_i$. По този начин, ако кодирането което използваме е подходящо за осигуряването на условието за равномерност, в крайна сметка ще получим $\mathcal{A}_j \leq_\omega \mathcal{F}$ за всяко j.

За да осигурим условията $\mathcal{B}_j \not\leq_\omega \mathcal{F}$ ще използваме метода на форсинг. Нека отбележим, че поради причини, на които няма да спираме в момента, ако фиксираме предварително редицата a_0,a_1, $a_2, \ldots$, това няма да бъде възможно. Ето защо ще строим горе споменатата редица заедно с крайните апроксимации на $\mathcal{F}$.

Преди да пристъпим към същинското доказателство на теоремата, ще въведем понятията α-кодираща крайна част, релация на форсинг и ще докажем някои основни твърдения за тях.

Нека най-напред фиксираме редици $\mathcal{A}_i \in \mathbf{a}_i$. Нека с En означим множеството от всички крайни редици от естествени числа $\langle a_0, a_1, \ldots, a_k\rangle$, за които $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k$. Ако $\alpha \in En$ и $\alpha = \langle a_0, a_1, \ldots, a_k\rangle$, полагаме $|\alpha| = k$, а за $s \leq k$, полагаме $\alpha(s) = a_s$. С $M(\alpha, n)$ ще означаваме числото $\max\{j \leq |\alpha| \mid \alpha(j) \leq n\}$. За две редици α и β от En ще означаваме $\alpha \preceq \beta$, ако α е начален отрез на β, т.е. $|\alpha| \leq |\beta|$ и за всяко $s \leq |\alpha|$, $\alpha(s) = \beta(s)$.

За произволни числа n и m с $D(n, m)$ ще означаваме множеството

$$D(n, m) = \{2\langle n, k\rangle + 1 \mid 2\langle n, k\rangle + 1 \geq m\}.$$

Ще казваме, че редицата $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots)$ е крайна част, ако за всяко n, $\tau_n : [0, 2q_n) \to \mathbb{N}$ и множеството $\{n \mid \tau_n \neq \emptyset\}$ е крайно. Крайните части ще означаваме със символите $\overrightarrow{\tau}$, $\overrightarrow{\rho}$ и $\overrightarrow{s}$, евентуално с индекси. Ако крайната част е означена с $\overrightarrow{\tau}$ (или $\overrightarrow{\tau}_k$), с τ_n

(съответно τ_{kn}) ще означаваме n-тата ѝ координата. Ще записваме $\overrightarrow{\tau} \sqsubseteq \overrightarrow{s}$, ако за всяко n, $\tau_n \subseteq \sigma_n$. С $\overrightarrow{\tau} \upharpoonright n$ ще означаваме крайната част $(\tau_0, \ldots, \tau_n, \emptyset, \emptyset, \ldots)$.

Нека забележим, че всъщност крайните части са крайни редици от крайни редици. Това ни дава право да фиксираме ефективно кодиране на крайните части и в по-нататъчните ни разглеждания да отъждествяваме крайната част с нейния код. По-конкретно: ако $\overrightarrow{\tau}$ е крайна част и n е най-голямото число, за което $\tau_n \neq \emptyset$, код на $\overrightarrow{\tau}$ ще наричаме числото

$$\langle\langle\tau_0(0), \tau_0(1), \ldots, \tau_0(\mathrm{lh}\,(\tau_0) - 1)\rangle, \ldots, \langle\tau_n(0), \tau_n(1), \ldots, \tau_n(\mathrm{lh}\,(\tau_n) - 1)\rangle\rangle$$

Дефиниция 4.3.4. *Нека $\alpha \in En$ и нека $\overrightarrow{\tau}$ е крайна част. Ще казваме, че $\overrightarrow{\tau}$ е α-кодираща, ако за всяко n*

$$\forall s \leq M(\alpha, n)[\tau_n[D(n, \alpha(s))] \subseteq A_{sn}] \qquad \text{(En)}$$

С $\mathcal{R}_\alpha$ ще означаваме множеството от всички α-кодиращи крайни части. Полагаме

$$\mathcal{R}_{\alpha,n} = \{\overrightarrow{\tau} \in \mathcal{R}_\alpha \mid \overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\tau} \upharpoonright n\}.$$

В сила е следната лема.

Лема 4.3.5. *$\mathcal{R}_{\alpha,n} \leq_e P_n(\mathcal{A}_{|\alpha|})$ равномерно по n.*

Доказателство. Нека фиксираме n. Да забележим, че ако знаем множествата A_{sn} за $s \leq M(\alpha, n)$, то можем равномерно да номерираме всички функции τ_n, удовлетворяващи (En).

Тъй като $\mathcal{A}_0 \leq_\omega \mathcal{A}_1 \leq_\omega \cdots \leq_\omega \mathcal{A}_{|\alpha|}$, имаме рекурсивна функция g, такава че за всяко n и $s \leq |\alpha|$, $A_{sn} = W_{g(s,n)}(P_n(\mathcal{A}_{|\alpha|}))$. Сега лемата следва от факта $M(\alpha, n) \leq |\alpha|$.

□

Лема 4.3.6. *Нека $\alpha, \beta \in En$ и нека $\alpha \prec \beta$. Тогава*

$$\forall n < \beta(|\alpha| + 1)[\mathcal{R}_{\alpha,n} = \mathcal{R}_{\beta,n}].$$

Доказателство. Ще използваме индукция по $n < \beta(|\alpha| + 1)$. Преди всичко, нека забележим, че тъй като $\alpha \prec \beta$, то $M(\alpha, n) = M(\beta, n)$ за всяко $n < \beta(|\alpha| + 1)$.

Нека $n = 0$ и нека фиксираме крайна част $\overrightarrow{\tau}$, за която $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\tau} \upharpoonright 0$, т.е. $\overrightarrow{\tau} = (\tau_0, \emptyset, \emptyset, \ldots)$. Тъй като никъде недефинираната функция $\emptyset$ по тривиални причини удовлетворява (En), получаваме

$$\begin{gathered}\overrightarrow{\tau} \in \mathcal{R}_{\alpha,0} \iff \\ \forall s \leq M(\alpha, 0)[\tau_0[D(0, \alpha(s))] \subseteq A_{s0}] \\ \iff \\ \forall s \leq M(\beta, 0)[\tau_0[D(0, \beta(s))] \subseteq A_{s0}] \\ \iff \overrightarrow{\tau} \in \mathcal{R}_{\beta,0}\end{gathered}$$

Нека сега предположим, че $\mathcal{R}_{\alpha,n} = \mathcal{R}_{\beta,n}$ за някое n, такова че $n+1 < \beta(|\alpha|+1)$. Нека $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\tau} \upharpoonright (n+1)$, т.е. $\overrightarrow{\tau} = (\tau_0, \ldots, \tau_{n+1}, \emptyset, \ldots)$. Отново, тъй като $\emptyset$ тривиално удовлетворява (En), получаваме

$$\overrightarrow{\tau} \in \mathcal{R}_{\alpha,n+1} \iff$$
$$\overrightarrow{\tau} \upharpoonright n \in \mathcal{R}_{\alpha,n} \;\&\; \forall s \leq M(\alpha, n+1)[\tau_{n+1}[D(n+1, \alpha(s))] \subseteq A_{sn+1}]$$
$$\iff$$
$$\overrightarrow{\tau} \upharpoonright n \in \mathcal{R}_{\beta,n} \;\&\; \forall s \leq M(\beta, n+1)[\tau_{n+1}[D(n+1, \beta(s))] \subseteq A_{sn+1}]$$
$$\iff \overrightarrow{\tau} \in \mathcal{R}_{\beta,n+1}$$

□

Следващата стъпка е да дефинираме форсинг релациите.

Дефиниция 4.3.7. *Нека $\alpha \in En$ и нека $\overrightarrow{\tau}$ е крайна част. Дефинираме релациите $\overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha (\neg)F_e^n(x)$ (за $e, x, n \in \mathbb{N}$) с индукция по n.*

(Fo1) $\overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha F_e^0(x) \iff x \in W_e(\mathrm{Graph}\,(\tau_0))$;

(Fo2) $\overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha \neg F_e^0(x) \iff \forall \overrightarrow{s} \in \mathcal{R}_{\alpha,0}[\overrightarrow{\tau} \upharpoonright 0 \sqsubseteq \overrightarrow{s} \Rightarrow \overrightarrow{s} \nVdash_\alpha F_e^0(x)]$;

(Fo3) $\overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha F_e^{n+1}(x) \iff \exists u \exists u_1 \exists u_2 [\langle x, u\rangle \in W_e \;\&\; D_u = D_{u_1} \oplus \mathcal{D}_{u_2} \;\&$

$$\forall v \in D_{u_1} \begin{bmatrix} (v = 2\langle x_v, e_v\rangle & \& \; \overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha F_{e_v}^n(x_v)) \\ & \vee \\ (v = 2\langle x_v, e_v\rangle + 1 & \& \; \overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha \neg F_{e_v}^n(x_v)) \end{bmatrix} \;\&$$

$D_{u_2} \subseteq \mathrm{Graph}\,(\tau_{n+1})$;

(Fo4) $\overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha \neg F_e^{n+1}(x) \iff \forall \overrightarrow{s} \in \mathcal{R}_{\alpha,n+1}[\overrightarrow{\tau} \upharpoonright (n+1) \sqsubseteq \overrightarrow{s} \Rightarrow \overrightarrow{s} \nVdash_\alpha F_e^{n+1}(x)]$;

Да забележим, че съгласно дефиницията форсинг релацията $\overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha F_e^n(x)$ зависи само от първите $n+1$ елемента на $\overrightarrow{\tau}$. По-точно:

$$\overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha (\neg)F_e^n(x) \iff \overrightarrow{\tau} \upharpoonright n \Vdash_\alpha (\neg)F_e^n(x). \tag{4.3.1}$$

В следващите две леми ще докажем, че форсинг релациите са монотонни относно наредбите $\sqsubseteq$ и $\preceq$.

Лема 4.3.8. *Нека $\alpha, \beta \in En$ и нека $\alpha \prec \beta$. Тогава за произволна крайна част $\overrightarrow{\tau}$ и всяко $n < \beta(|\alpha|+1)$*

$$\overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha (\neg)F_e^n(x) \iff \overrightarrow{\tau} \Vdash_\beta (\neg)F_e^n(x).$$

Доказателство. Ще използваме индукция по $n < \beta(|\alpha|+1)$. Нека първо $n = 0$. Нека първо докажем положителната еквивалентност. В сила е:

$$\overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha F_e^0(x) \iff x \in W_e(\mathrm{Graph}\,(\tau_0)) \iff \overrightarrow{\tau} \Vdash_\beta F_e^0(x).$$

Сега за отрицателната еквивалентност (използвайки Лема 4.3.6) получаваме

$$\overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha \neg F_e^0(x)$$
$$\iff \forall \overrightarrow{s} \in \mathcal{R}_{\alpha,0}[\overrightarrow{\tau} \upharpoonright 0 \sqsubseteq \overrightarrow{s} \Rightarrow \overrightarrow{s} \nVdash_\alpha F_e^0(x)]$$

$$\iff \forall \overrightarrow{s} \in \mathcal{R}_{\beta,0}[\overrightarrow{\tau} \upharpoonright 0 \sqsubseteq \overrightarrow{s} \Rightarrow \overrightarrow{s} \nVdash_\beta F_e^0(x)]$$
$$\iff \overrightarrow{\tau} \Vdash_\beta \neg F_e^0(x).$$

Нека сега предположим, че твърдението е вярно за n и $n+1 < \beta(|\alpha|+1)$. Положителната еквивалентност за $n+1$ следва директно от (Fo3) и индукционното предположение. За отрицателната еквивалентност нека отново забележим, че тъй като $n+1 < \beta(|\alpha|+1)$, то $\mathcal{R}_{\alpha,n+1} = \mathcal{R}_{\beta,n+1}$ (Лема 4.3.6). По този начин

$$\overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha \neg F_e^{n+1}(x)$$
$$\iff \forall \overrightarrow{s} \in \mathcal{R}_{\alpha,n+1}[\overrightarrow{\tau} \upharpoonright (n+1) \sqsubseteq \overrightarrow{s} \Rightarrow \overrightarrow{s} \nVdash_\alpha F_e^{n+1}(x)]$$
$$\iff \forall \overrightarrow{s} \in \mathcal{R}_{\beta,n+1}[\overrightarrow{\tau} \upharpoonright (n+1) \sqsubseteq \overrightarrow{s} \Rightarrow \overrightarrow{s} \nVdash_\beta F_e^{n+1}(x)]$$
$$\iff \overrightarrow{\tau} \Vdash_\beta \neg F_e^{n+1}(x).$$

□

Лема 4.3.9. *Нека $\alpha \prec \beta$ и $\overrightarrow{\tau} \sqsubseteq \overrightarrow{\rho}$. Тогава за всяко $n < \beta(|\alpha|+1)$*

$$\overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha (\neg)F_e^n(x) \Longrightarrow \overrightarrow{\rho} \Vdash_\beta (\neg)F_e^n(x).$$

Доказателство. Отново, както и в предните леми ще използваме индукция по $n < \beta(|\alpha|+1)$. Положителната импликация е очевидна за $n = 0$. За отрицателната — нека да допуснем противното, т.е. че за някое x и e,

$$\overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha \neg F_e^0(x) \ \& \ \overrightarrow{\rho} \nVdash_\beta \neg F_e^0(x).$$

Нека фиксираме $\overrightarrow{s} \in \mathcal{R}_{\beta,0}$, такова че $\overrightarrow{\rho} \upharpoonright 0 \sqsubseteq \overrightarrow{s}$ и $\overrightarrow{s} \Vdash_\beta F_e^0(x)$. Съгласно Лема 4.3.6, $\overrightarrow{s} \in \mathcal{R}_{\alpha,0}$. Освен това, съгласно предната лема, $\overrightarrow{s} \Vdash_\alpha F_e^0(x)$, което заедно с $\overrightarrow{\tau} \upharpoonright 0 \sqsubseteq \overrightarrow{s}$ противоречи на $\overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha \neg F_e^0(x)$. Следователно $\overrightarrow{\rho} \Vdash_\beta \neg F_e^0(x)$.

Нека сега предположим, че твърдението е вярно за n и $n+1 < \beta(|\alpha|+1)$. Положителната импликация за $n+1$ следва директно от индукционното предположение и (Fo3). Отрицателната импликация е аналогична на случая $n = 0$.

□

Ще имаме нужда и от следната лема.

Лема 4.3.10. *Нека $\alpha \in En$. За произволно $n \in \mathbb{N}$ нека*

$$\begin{aligned}
X_n &= \{\langle \overrightarrow{\tau}, e, x\rangle | \overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\tau} \upharpoonright n \ \& \ \overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha F_e^n(x)\} \\
Y_n &= \{\langle \overrightarrow{\tau}, e, x\rangle | \overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\tau} \upharpoonright n \ \& \ \exists \overrightarrow{s} \in \mathcal{R}_{\alpha,n}[\overrightarrow{\tau} \sqsubseteq \overrightarrow{s} \ \& \ \langle \overrightarrow{s}, e, x\rangle \in X_n]\} \\
Z_n &= \{\langle \overrightarrow{\tau}, e, x\rangle | \overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\tau} \upharpoonright n \ \& \ \overrightarrow{\tau} \Vdash_\alpha \neg F_e^n(x)\}
\end{aligned}$$

Тогава

(1) $X_n \leq_e P_n(\mathcal{A}_{|\alpha|})$, *равномерно по n;*
(2) $Y_n \leq_e P_n(\mathcal{A}_{|\alpha|})$, *равномерно по n;*
(3) $Z_n^+ \leq_e P_n(\mathcal{A}_{|\alpha|})'$, *равномерно по n.*

Доказателство. Ще докажем (1), (2) и (3) едновременно чрез индукция по n. Нека първо $n = 0$. За (1) нека забележим, че

$$X_0 = \{\langle \overrightarrow{\tau}, e, x\rangle \mid \overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\tau} \restriction 0 \ \&\ x \in W_e(\mathrm{Graph}\,(\tau_0))\}.$$

Следователно X_0 е рекурсивно номеруемо множество и значи $X_0 \leq_e (P_0(\mathcal{A}_{|\alpha|}))$.

За (2), нека да разгледаме множеството

$$\tilde{Y}_0 = \{\langle \overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{s}, e, x\rangle \mid \overrightarrow{\tau} \sqsubseteq \overrightarrow{s} \ \&\ \overrightarrow{s} \in \mathcal{R}_{\alpha,0} \ \&\ \langle \overrightarrow{s}, e, x\rangle \in X_0\}.$$

Тъй като релацията $\sqsubseteq$ е рекурсивна, в сила е $\tilde{Y}_0 \leq_e X_0 \oplus \mathcal{R}_{\alpha,0}$. От друга страна, тъй като Y_0 е проекция на $\tilde{Y}_0$, $X_0 \leq_e (P_0(\mathcal{A}_{|\alpha|}))$ и $\mathcal{R}_{\alpha,0} \leq_e (P_0(\mathcal{A}_{|\alpha|}))$ (Лема 4.3.5), то получаваме $Y_0 \leq_e (P_0(\mathcal{A}_{|\alpha|}))$.

За (3) достатъчно е да забележим, че $Z_n = \mathbb{N}\backslash Y_n$.

Нека сега за някои n, i и j имаме $X_n = W_i(P_n(\mathcal{A}_{|\alpha|}))$ и $Z_n^+ = W_j(P_n(\mathcal{A}_{|\alpha|})')$. От индекса i можем равномерно да получим индекс $\tilde{i}$, за който $X_n^+ = W_{\tilde{i}}(P_n(\mathcal{A}_{|\alpha|}))$. Съгласно (Fo3) получаваме, че $\langle \overrightarrow{\tau}, e, x\rangle \in X_{n+1}$ точно тогава, когато $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\tau} \restriction n$ и съществуват u, u_1 и u_2, такива че

(1) $\langle x, u\rangle \in W_e$
(2) $D_u = D_{u_1} \oplus D_{u_2}$
(3) $\forall v \in D_{u_1}[(v = 2\langle x_v, e_v\rangle \ \&\ \langle \overrightarrow{\tau}, e_v, x_v\rangle \in X_n) \vee (v = 2\langle x_v, e_v\rangle + 1 \ \&\ \langle \overrightarrow{\tau}, e_v, x_v\rangle \in Z_n)]$
(4) $D_{u_2} \subseteq \mathrm{Graph}\,(\tau_{n+1}))$

По този начин $X_{n+1} \leq_e P_{n+1}(\mathcal{A}_{|\alpha|})$ и индексът на номерационния оператор свеждащ X_{n+1} към $P_{n+1}(\mathcal{A}_{|\alpha|})$ може да бъде получен равномерно от $\tilde{i}$ и j.

Доказателството на (2) и (3) е същото като в случая $n = 0$.

□

Следствие 4.3.11. *Нека $\overrightarrow{\tau}$ е крайна част и $\alpha \in En$. Нека за произволни n и i с $C_{n,i}$ означим множеството*

$$\{y \mid \exists \overrightarrow{s} \in R_{\alpha,n}[\overrightarrow{\tau} \restriction n \sqsubseteq \overrightarrow{s} \ \&\ \sigma_0(\mathrm{lh}\,(\tau_0)) \simeq y \ \&\ \overrightarrow{s} \Vdash_\alpha F_i^n(\mathrm{lh}\,(\tau_0))]\}.$$

Тогава $C_{n,i} \leq_e P_n(\mathcal{A}_{|\alpha|})$ равномерно по n и i.

Вече сме готови да докажем теоремата.

Доказателство. (Теорема 4.3.2) Нека първо фиксираме горна граница $\mathbf{g}$ за $I = \mathcal{I}(\{\mathbf{a}_n \mid n, \omega\}$. Нека $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n, \ldots$ са всички ω-номерационни степени под $\mathbf{g}$, които не са в I. Нека за всяко n фиксираме редица $\mathcal{B}_n \in \mathbf{b}_n$. Ще построим редица $\mathcal{F} = (F_0, F_1, \ldots)$, такава че

- $\mathcal{A}_n \leq_\omega \mathcal{F}$;
- $\mathcal{B}_n \not\leq_\omega \mathcal{F}$.

Така $\mathbf{g}$ и $\mathbf{d}_\omega(\mathcal{F})$ ще образуват точна двойка за I.

Ще построим всяко едно от множествата F_n като графиката на тотална функция f_n. Ще извършим конструкцията на стъпки. На всяка стъпка, да речем s, ще строим крайни части $\overrightarrow{\tau}_s$, $\overrightarrow{\rho}_s$ и $\overrightarrow{s}_s$ и редица $\alpha_s \in En$. Ще осигуряваме $\overrightarrow{\tau}_{s-1} \sqsubseteq \overrightarrow{\tau}_s$, $\alpha_{s-1} \preceq \alpha_s$, $\overrightarrow{\tau}_s \in \mathcal{R}_{\alpha_s}$ and $|\alpha_s| = s$. Накрая ще положим $f_n = \bigcup_n \tau_{sn}$.

Нека най-напред фиксираме номерация $g_0, g_1, \ldots$ на рекурсивните функции. Полагаме $\overrightarrow{\tau}_0 = \emptyset_\omega$ и $\alpha_0 = \langle 0 \rangle$. Нека сега предположим, че $\overrightarrow{\tau}_s$ и α_s са дефинирани и че $\overrightarrow{\tau}_s \in \mathcal{R}_{\alpha_s}$ и $\min\{n \mid \overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\tau}_s \restriction n\} \leq \alpha_s(|\alpha_s|)$.

Полагаче $\overrightarrow{\rho}_s$ да бъде най-малката α_s-кодираща крайна част разширяваща $\overrightarrow{\tau}_s$, такава че за всяко $n \leq \alpha_s(|\alpha_s|)$ и всяко $k \leq M(\alpha_s, n)$

$$\min\{A_{kn} - \tau_{sn}[D(n, \alpha_s(k))]\} < \min\{A_{kn} - \rho_{sn}[D(n, \alpha_s(k))]\}.$$

Нека сега $s = \langle k, \langle e, x \rangle \rangle$. Полагаме $\overrightarrow{s}_s$ да бъде най-малката α_s-кодираща крайна част, разширяваща $\overrightarrow{\rho}_s$, такава че $\overrightarrow{s}_s \Vdash_{\alpha_s} F^k_e(x)$. Ако такава крайна част не съществува, полагаме $\overrightarrow{s}_s = \overrightarrow{\rho}_s$.

Накрая, нека $s = \langle k, j \rangle$ и да разгледаме редицата $\mathcal{C}_s = \{C_{sn}\}_{n<\omega}$, където C_{sn} е множеството от онези y, за които

$$\exists \overrightarrow{s} \in R_{\alpha_s, n}[\overrightarrow{s}_s \restriction n \sqsubseteq \overrightarrow{s} \ \&\ \sigma_0(\mathrm{lh}\,(\sigma_{s0})) \simeq y \ \&\ \overrightarrow{s} \Vdash_\alpha F^n_{g_k(n)}(\mathrm{lh}\,(\sigma_{s0}))].$$

Съгласно Следствие 4.3.11, $\mathcal{C}_s \leq_\omega \mathcal{A}_{|\alpha_s|}$ и значи $C_s \neq \mathcal{B}_j$. Нека n_s е най-малкото за което $C_{sn_s} \neq B_{jn_s}$ и нека фиксираме число y_s, свидетелстващо, че двете множества са различни.

Ако $y_s \in C_{sn_s}$ & $x_s \notin \mathcal{B}_{jn_s}$, полагаме $\overrightarrow{\tau}_{s+1}$ да бъде най-малката α-кодираща крайна част, разширяваща $\overrightarrow{s}_s$ и такава, че

$$\tau_{s+1,0}(\mathrm{lh}\,(\sigma_{s0})) \simeq y_s$$

и $\overrightarrow{\tau}_{s+1} \Vdash_{\alpha_s} F^{n_s}_{g_k(n_s)}(\mathrm{lh}\,(\sigma_{s0}))$.

Ако, пък, $y_s \notin C_{sn_s}$ & $x_s \in \mathcal{B}_{jn_s}$ полагаме $\overrightarrow{\tau}_{s+1}$ да бъде най-малката α_s-кодираща крайна част разширяваща $\overrightarrow{s}_s$, такава че

$$\tau_{s+1,0}(\mathrm{lh}\,(\sigma_{s0})) \simeq y_s.$$

Да забележим, че в този случай $\overrightarrow{\tau}_{s+1} \Vdash_{\alpha_s} \neg F^{n_s}_{g_k(n_s)}(\mathrm{lh}\,(\sigma_{s0}))$.

С това конструкцията завършва. Полагаме

$$F_n = \{\langle x, y \rangle \mid \exists s[\tau_{sn}(x) \simeq y]\},$$

т.е. $F_n = \bigcup_s \mathrm{Graph}\,(\tau_{sn})$.

Свойство 4.3.12. *За всяко k, $\mathcal{A}_k \leq_\omega \mathcal{F}$*

Доказателство. Нека фиксираме k. Тъй като за всяко $s \leq s'$ е в сила $\alpha_s \preceq \alpha_{s'}$, то

$$\forall s \geq k[\alpha_s(k) = \alpha_k(k)]$$

Нека сега $n \geq \alpha_k(k)$. Съгласно (En), за всяко $s \geq k$,

$$\tau_{sn}[D(n, \alpha_k(k))] \subseteq A_{kn}.$$

По този начин

$$\{y \mid \exists x \in D(n, \alpha_k(k))[\langle x, y \rangle \in F_n]\} \subseteq A_{kn}.$$

От друга страна конструкцията на крайните части $\overrightarrow{\rho}_s$ гарантира

$$A_{kn} \subseteq \{y \mid \exists x \in D(n, \alpha_k(k))[\langle x, y\rangle \in F_n]\}.$$

Така за всяко $n \geq \alpha_k(k)$

$$A_{kn} = \{y \mid \exists x \in D(n, \alpha_k(k))[\langle x, y\rangle \in F_n]\}. \tag{4.3.2}$$

От тук веднага получаваме $\mathcal{A}_0 \leq_\omega \mathcal{F}$. От друга страна за произволно k, (4.3.2) ни дава

$$\forall n \geq \alpha_k(k)[A_{kn} \leq_e P_n(\mathcal{F}) \text{ uniformly in } n].$$

Сега твърдението $\mathcal{A}_k \leq_\omega \mathcal{F}$ следва от факта $\forall n[A_{kn} \leq_e P_n(\mathcal{A}_0)]$. $\square$

Свойство 4.3.13. *За всяко* n, e *и* x, *и* $s = \langle n, \langle e, x\rangle\rangle$

$$(\neg) x \in W_e(P_n(\mathcal{F})) \iff \overrightarrow{\tau}_s \Vdash_{\alpha_s} (\neg) F_e^n(x).$$

Доказателство. Нека преди всичко забележим, че ако e, x и n са естествени числа и $s = \langle n, \langle e, x\rangle\rangle$, то

$$\overrightarrow{\tau}_{s+1} \Vdash_{\alpha_{s+1}} F_e^n(x) \vee \overrightarrow{\tau}_{s+1} \Vdash_{\alpha_{s+1}} \neg F_e^n(x). \tag{4.3.3}$$

Наистина, нека разгледаме крайната част $\overrightarrow{s}_s$. Тя е построена така, че

$$\overrightarrow{s}_s \Vdash_{\alpha_s} F_e^n(x) \vee \overrightarrow{s}_s \Vdash_{\alpha_s} \neg F_e^n(x).$$

Съгласно конструкцията $\overrightarrow{s}_s \sqsubseteq \overrightarrow{\tau}_{s+1}$. Освен това $n \leq s \leq \alpha_s(s)$ и тогава съгласно Лема 4.3.6

$$\overrightarrow{s}_s \Vdash_{\alpha_s} (\neg) F_e^n(x) \Longrightarrow \overrightarrow{\tau}_{s+1} \Vdash_{\alpha_{s+1}} (\neg) F_e^n(x),$$

което доказва (4.3.3).

Нека сега пристъпим към доказателството на твърдението. Ще използваме индукция по n. Нека първо $n = 0$.

$$x \in W_e(P_n(\mathcal{F})) \iff x \in W_e(F_0)$$

Тъй като $F_0 = \{\langle x, y\rangle \mid \exists s[\tau_{s0}(x) \simeq y]\}$ и за всяко $s' \leq s''$, $\tau_{0s'} \subseteq \tau_{0s''}$, то

$$\begin{gathered} x \in W_e(P_n(\mathcal{F})) \\ \iff \exists s'[x \in W_e(\operatorname{Graph}(\tau_{0s'}))] \\ \iff \exists s'[\overrightarrow{\tau}_{s'} \Vdash_{\alpha_{s'}} F_e^0(x)]. \end{gathered}$$

Нека сега да допуснем, че $\overrightarrow{\tau}_{s+1} \Vdash_{\alpha_{s+1}} \neg F_e^n(x)$ и да фиксираме s', за което $\overrightarrow{\tau}_{s'} \Vdash_{\alpha_{s'}} F_e^0(x)$ Тогава, тъй като $0 \leq \min\{\alpha_s(s), \alpha_{s'}(s')\}$ стигаме до противоречие с Лема 4.3.6.

Отрицателната еквивалентност следва директно от положителната и дизюнкцията (4.3.3).

Нека сега положителната и отрицателната еквивалентност са верни за n и произволни e и x. Ще докажем първо посоката отляво-надясно на положителната еквивалентност. Нека фиксираме e и x, такива че $x \in W_e(P_{n+1}(\mathcal{F}))$. Тогава съществуват u, u_1 и u_2 такива че

$$\langle x, u\rangle \in W_e \ \&\ D_u = D_{u_1} \oplus D_{u_2} \ \&$$

$$\forall v \in D_{u_1} \begin{bmatrix} (v = 2\langle x_v, e_v\rangle & \&\ x_v \in W_{e_v}(P_n(\mathcal{F}))) \\ & \vee \\ (v = 2\langle x_v, e_v\rangle + 1 & \&\ x_v \notin W_{e_v}(P_n(\mathcal{F}))) \end{bmatrix} \ \&\ D_{u_2} \subseteq F_{n+1}.$$

Нека фиксираме такива u, u_1 и u_2. Нека за всяко $v \in D_{u_1}$ с s_v означим числото $s_v = \langle n, [\frac{v}{2}]\rangle$, където с $[\frac{v}{2}]$ сме означили цялата част на рационалното число $\frac{v}{2}$. Нека още за всяко $v \in D_v$ имаме $[\frac{v}{2}] = \langle x_v, e_v\rangle$. Тогава съгласно индукционното предположение за всяко $v \in D_v$

$$(\neg)x_v \in W_{e_v}(P_n(\mathcal{F})) \iff \overrightarrow{\tau}_{s_v} \Vdash_{\alpha_{s_v}} (\neg)F^n_{e_v}(x_v). \tag{4.3.4}$$

Нека сега положим $s_m = \max\{\{s_v \mid v \in D_v\} \cup \{s_{u_2}\}$, където s_{u_2} е такова, че $D_{u_2} \subseteq \mathrm{Graph}\,(\tau_{s_{u_2}n+1})$. Тъй като за всяко $v \in D_u$, $n \leq s_v$, то $n \leq \alpha_{s_v}(s_v)$ Тогава съгласно Лема 4.3.6 и (4.3.4) получаваме

$$(\neg)x_v \in W_{e_v}(P_n(\mathcal{F})) \Longrightarrow \overrightarrow{\tau}_{s_m} \Vdash_{\alpha_{s_m}} (\neg)F^n_{e_v}(x_v)$$

и следователно $\overrightarrow{\tau}_{s_m} \Vdash_{\alpha_{s_m}} F^{n+1}_e(x)$. Сега ако допуснем, че $\overrightarrow{\tau}_{s+1} \Vdash_{\alpha_{s+1}} \neg F^{n+1}_e(x)$ ще стигнем до противоречие с Лема 4.3.6.

Обратната посока на положителната еквивалентност следва от аналогични разсъждения. Отрицателната еквивалентност, от своя страна, следва от положителната и (4.3.3).

□

Свойство 4.3.14. *За всяко j, $\mathcal{B}_j \not\leq_\omega \mathcal{F}$.*

Доказателство. Да допуснем, че за някое j, $\mathcal{B}_j \leq_\omega \mathcal{F}$. Тогава за редицата $\mathcal{B}^* = \{B^*_n\}_{n<\omega}$

$$B^*_n = \{x \mid \exists y[\langle x, y\rangle \in F_0 \ \&\ y \in B_{jn}]\}$$

е изпълнено $\mathcal{B}^* \leq_\omega \mathcal{F}$. Нека g_k е рекурсивна функция, за която за всяко n

$$B^*_n = W_{g_k(n)}(P_n(\mathcal{F})),$$

и нека $s = \langle k, j\rangle$. Нека означим с x_s числото $\mathrm{lh}\,(\sigma_{s0})$. Тогава за числото y_s и крайната част $\overrightarrow{\tau}_{s+1}$ имаме

$$\tau_{s+1,0}(x_s) \simeq y_s.$$

Следователно $y_s \in B_{jn_s} \iff x_s \in B^*_{n_s}$. От друга страна

$$\overrightarrow{\tau}_{s+1} \Vdash_{\alpha_s} (\neg)F^{n_s}_{g_k(n_s)}(x_s) \iff (\neg)y_s \notin B_{jn_s}.$$

и значи

$$\overrightarrow{\tau}_{s+1} \Vdash_{\alpha_s} (\neg)F^{n_s}_{g_k(n_s)}(x_s) \iff (\neg)x_s \notin B^*_{n_s}.$$

Нека $s' = \langle n_s\, langleg_k(n_s), x_s\rangle\rangle$. Тъй като $n_s \le \alpha_{s+1}(s+1)$ и $n_s \le \alpha_{s'}(s')$, то съгласно Лема 4.3.6 и (4.3.3) получаваме

$$\overrightarrow{\tau}_{s'+1} \Vdash_{\alpha_{s'+1}} (\neg)F^{n_s}_{g_k(n_s)}(x_s) \iff (\neg)x_s \notin B^*_{n_s},$$

което противоречи на предното твърдение, съгласно което

$$\overrightarrow{\tau}_{s'+1} \Vdash_{\alpha_{s'+1}} (\neg)F^{n_s}_{g_k(n_s)}(x_s) \iff (\neg)x_s \in B^*_{n_s}.$$

Следователно $B_j \not\le_\omega \mathcal{F}$.

□

С това доказателството на теоремата е завършено.

□

4.4. Квази-минимални ω-номерационни степени

В теорията на номерационните степени казваме, че степента $\mathbf{a}$ е квази-минимална над степента $\mathbf{b}$, ако $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ и за всяка тотална степен $\mathbf{c}$ е изпълнено, че ако $\mathbf{c} \le \mathbf{a}$, то $\mathbf{c} \le \mathbf{b}$, с други думи $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ мажорират едни и същи тотални степени[1]. Освен това казваме че степента $\mathbf{a}$ е квази-минимална над редицата $\mathbf{b}_0 \le \mathbf{b}_1 \le \ldots \le \mathbf{b}_n \le \ldots$, ако за всяко n, $\mathbf{b}_n < \mathbf{a}$ и за всяко тотална степен $\mathbf{c}$, ако $\mathbf{c} \le \mathbf{a}$, то $\mathbf{c} \le \mathbf{b}_n$ за някое n[2]. При предположението $\mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{D}_e$ (чрез роджърсовото влагане) двете понятия могат да бъдат имат единна дефиниция, а именно, че степента $\mathbf{a}$ е квази-минимална над идеалът I в $\mathcal{D}_e$, ако $\mathbf{a} \notin I$, $I \subsetneq \mathcal{I}_e(\mathbf{a})$ и $I \cap \mathcal{D}_T = \mathcal{I}_e(\mathbf{a}) \cap \mathcal{D}_T$. Ясно е, че всяка степен от $\mathcal{D}_e \backslash \mathcal{D}_T$ е квази-минимална над някой идеал в $\mathcal{D}_e$, а именно $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_e \backslash \mathcal{D}_T$ е квази-минимална над идеала $\mathcal{I}_e\left(\mathcal{I}_e(\mathbf{a}) \cap \mathcal{D}_T\right)$, т.е. идеалът в $\mathcal{D}_e$ породен от множеството $\mathcal{I}(\mathbf{a}) \cap \mathcal{D}_T$. Основното нетривиално свойство на квази-минималните степени е, че за всеки изброим идеал I в $\mathcal{D}_e$, съществува квази-минимална степен над I.

Нека сега разгледаме разширението $\mathcal{D}_\omega$ на $\mathcal{D}_e$. За да запазим аналогията с тюринговите и номерационните степени дефинираме понятието квази-минимална степен в $\mathcal{D}_\omega$ по следния начин.

Дефиниция 4.4.1. *Нека I е идеал в $\mathcal{D}_\omega$. Казваме, че степента $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_\omega \backslash \mathcal{D}_\mathbf{e}$ е квази-минимална над I, ако*

(i) $I \subsetneq \mathcal{I}(\mathbf{a})$;
(ii) $I \cap \mathcal{D}_e = \mathcal{I}(\mathbf{a}) \cap \mathcal{D}_e$.

Отново е ясно, че всяка степен от $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_\omega \backslash \mathcal{D}_e$ е квази-минимална над идеала в $\mathcal{D}_\omega$ породен от множеството $\mathcal{I}(\mathbf{a}) \cap \mathcal{D}_e$. По този начин квази-минималните степени съвпадат със степените от $\mathcal{D}_\omega \backslash \mathcal{D}_e$. Така изучаването на квази-минималните степени е еквивалентно на изучаването на на "новите" степени от $\mathcal{D}_\omega$.

---

[1] За първи път квази-минимални степени са разгледани от Медведев [**1**]

[2] За първи това понятие е въведено от Слеман и Сорби [**42**]

На това място можем да видим една голяма разлика между разширението $\mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{D}_e$ и разширението $\mathcal{D}_e \subseteq \mathcal{D}_\omega$. Както отбелязахме по-горе всеки изброим идеал от номерационни степени има квази-минимална номерационна степен. Това твърдение обаче не е вярно за ω-номерационните степени. За да се убедим в това, нека да разгледаме произволен скок-идеал, т.е. идеал I, такъв че $I' = I$. Да допуснем, че $\mathbf{a}$ е квази-минална над I. Нека $\mathbf{c}$ е най-голямата степен от $\mathcal{D}_e$, такава че $\mathbf{c} \leq_\omega \mathbf{a}$. Тогава от дефиницията на квази-минимални ω-номерационни степени получаваме $\mathbf{c} \in I$. Тъй като $I = I'$, то $\mathbf{c}' \in I$. От друга страна $\mathbf{c}' \in \mathcal{D}_e$ и $\mathbf{c} < \mathbf{c}'$. Следователно $\mathbf{c}' \not\leq_\omega \mathbf{a}$ и значи $\mathbf{c} \notin I$, което е противоречие.

Това, което можем да докажем е следната теорема.

Теорема 4.4.2. *Нека $\mathbf{c} \in \mathcal{D}_\omega$ и нека $A \subseteq \mathcal{D}_e$. Тогава:*

(1) *Съществува квази-минимална ω-номерационна степен над $\mathcal{I}(\mathbf{c})$.*
(2) *За $\mathcal{I}(A)$ съществува квази-минална степен тогава и сама тогава, когато $\mathcal{I}(A)$ е главен.*

Доказателство. Нека първо докажем (1). Нека D е множеството на всички ω-номерационни степени, които са породени от редици съдържащи само $\mathbb{N}$ и $\emptyset$. Тъй като тези редици са континуум много и тъй като всяка степен съдържа изброимо много редици, то множеството D съдържа континуум много степени. Следователно съществува степен $\mathbf{b} \in D$, такава че $\mathbf{b} \not\leq_\omega \mathbf{c}$. Нека фиксираме една такава степен $\mathbf{b}$ и да разгледаме степента $\mathbf{c} \vee \mathbf{b}$. Твърдим, че $\mathbf{c} \vee \mathbf{b}$ е квази-минимална над $\mathcal{I}(\mathbf{c})$. Наистина $\mathbf{c} <_\omega \mathbf{c} \vee \mathbf{b}$ и следователно $\mathcal{I}(\mathbf{c}) \subsetneq \mathcal{I}(\mathbf{c} \vee \mathbf{b})$. Така първото условие от дефиницията за квази-минималност е изпълнена. Нека сега докажем второто. Нека $\mathbf{c} = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{C})$, където първият член на редицата $\mathcal{C}$ е множеството C_0. Без ограничение можем да считаме, че $\mathbf{b}$ се поражда от редица с първи член $\emptyset$. Тогава $\mathbf{d}_\omega(C_0 \uparrow \omega)$ е най-голямата степен от $\mathcal{D}_e$, която е под $\mathbf{c}$, и $\mathbf{d}_\omega(C_0 \oplus \emptyset \uparrow \omega)$ е най-голямата степен от $\mathcal{D}_e$ под $\mathbf{c} \vee \mathbf{b}$. Но $C_0 \equiv_e C_0 \oplus \emptyset$ и следователно $\mathcal{I}(\mathbf{c}) \cap \mathcal{D}_e = \mathcal{I}(\mathbf{c} \vee \mathbf{b}) \cap \mathcal{D}_e$, което е точно това, което трябваше да докажем.

Нека сега докажем (2). Достатъчно е само да видим, че, ако $\mathcal{I}(A)$ има квази-минимална степен, то $\mathcal{I}(A)$ е главен. Нека $\mathbf{a}$ е квази-минимална над $\mathcal{I}(A)$ и нека $\mathbf{b}$ е най-голямата степен от $\mathcal{D}_e$, за която $\mathbf{b} \leq_\omega \mathbf{a}$. Твърдим, че $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(\mathbf{b})$. Наистина, тъй като $\mathbf{b} \in \mathcal{D}_e$ и $\mathbf{b} \leq_\omega \mathbf{a}$, в сила е $\mathbf{b} \in \mathcal{I}(A)$ и следователно $\mathcal{I}(\mathbf{b}) \subseteq \mathcal{I}(A)$. От друга страна за всяко $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a}$. Тъй като $A \subseteq \mathcal{D}_e$ и $\mathbf{b}$ е най-голямата степен от $\mathcal{D}_e$ под $\mathbf{a}$, получаваме, че $\mathbf{b}$ е горна граница за множеството A. Следователно $\mathcal{I}(A) \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{b})$, което завършва доказателството. □

Глава 5

Определимост в ${\mathcal{D}_\omega}'$ и автоморфизми

В тази глава ще видим някои интересни и може би неочаквани резултати за ω-номерационните степени. Първо в 5.1 доказваме една "силна" теорема за обръщане на скока, а именно, че ако $\mathbf{a}' \leq_\omega \mathbf{b}$, то множеството $\{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_\omega \mid \mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{x} \ \&\ \mathbf{x}' = \mathbf{b}\}$ има най-малък елемент. Като следствие ще получим, че за произволно $\mathbf{a}$ интервалът $[\mathbf{a}, \mathbf{a}']$ съдържа изоморфни копия на всички интервали от вида $[\mathbf{a}^{(n)}, \mathbf{a}^{(n+1)}]$. По-нататък, в 5.1 ще видим, че множеството $\mathcal{D}_1$ е определимо с помощта на формула от първи ред и като следствие ще получим, че всяка изброима релация в $\mathcal{D}_\omega$ е определима с помощта на формула от първи ред с параметри. Накрая в 5.3 ще покажем, че групата на автоморфизмите на $\mathcal{D}_e$ е изоморфна на тази на автоморфизмите на ${\mathcal{D}_\omega}'$.

Резултати в тази глава са съвместни със И. Сосков. Докладвани са в [**13**] и са публикувани в [**38**].

5.1. Теорема за обръщане на скока

Както видяхме в Глава 3, за тюринговите и номерационните степени на неразрешимост могат да бъдат доказани интересни теореми за обръщане на скока. По-точно в тюринговите степени е в сила, че за произволно $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{D}_T$, ако $\mathbf{a}' \leq \mathbf{b}$, то съществува $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_T$, такава че $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{x}'$. При това, ако $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{a}$, то $\mathbf{x}$ може да бъде подбрана така, че $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{x}$ (в такъв случай казваме, че $\mathbf{x}$ изпуска $\mathbf{c}$).

В случая на номерационни степени, теоремата за обръщане на скока трябва да бъде отслабена, тъй като само тоталните степени мога да бъдат скокове на номерационни степени. По-точно изпълнено е, че за произволни $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{D}_e$, ако $\mathbf{a}' \leq \mathbf{b}$ и $\mathbf{b}$ е тотална, то съществува $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_e$, такава че $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{x}'$. При това, ако $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{a}$, то $\mathbf{x}$ може да бъде подбрана така, че $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{x}$ (в такъв случай казваме, че $\mathbf{x}$ изпуска $\mathbf{c}$).

И в двата случая, като следствие от това, че можем да обръщаме скока, изпускайки подходящи степени, получаваме, че за всеки две степени $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ако $\mathbf{a}' \lneq \mathbf{b}$ (и $\mathbf{b}$ е тотална в случай на номерационни степени) множеството

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \ \&\ \mathbf{b} = \mathbf{x}'\} \tag{5.1.1}$$

няма най-малък елемент. Наистина — нека разгледаме тюринговият случай и нека $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbf{D}_T$, са такива че $\mathbf{a}' \lneq \mathbf{b}$ и (да допуснем че) $\mathbf{x}$ е най-малката степен над $\mathbf{a}$, за която $\mathbf{x}' = \mathbf{b}$. Тъй като $\mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}$, то съгласно Теорема 2.1.4 (виж още [?]), съществува степен $\mathbf{c} \in \mathbf{D}_T$, такава че $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}$, $\mathbf{c}' = \mathbf{b}$ и $\mathbf{x} \not\leq \mathbf{c}$. Това обаче противоречи на това, че $\mathbf{x}$ е най-малкото обръщане на скока на $\mathbf{b}$ над $\mathbf{a}$ и значи такова $\mathbf{x}$ не може да съществува.

В този раздел ще видим, че за ω-номерационните степени е валидна една "силна" теорема за обръщане на скока. По-точно, ще покажем, че когато става въпрос за ω-номерационни степени множеството (5.1.1) има най-малък елемент.

За начало ще въведем една операция върху редици, която има интересни свойства. Нека фиксираме редица $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ от $\mathcal{S}_\omega$.

Дефиниция 5.1.1. *Нека $\mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$ и нека $n \geq 1$. Полагаме $I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ да бъде редицата $\{C_k\}_{k<\omega}$, където $(\forall k < n)(C_k = A_k)$ и $(\forall k \geq n)(C_k = P_{k-n}(\mathcal{B}))$.*

Неформално редицата $I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ е скок редицата на $\mathcal{B}$, към която отляво сме залепили първите n члена на $\mathcal{A}$. Следващото твърдение ни дава основните свойства на операцията $I^n_{\mathcal{A}}$.

Твърдение 5.1.2. *Нека $\mathcal{A}^{(n)} \leq_\omega \mathcal{B}$. В сила са следните твърдения:*

(1) $\mathcal{A} \leq_\omega I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$.
(2) $I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})^{(n)} \equiv_\omega \mathcal{B}$.
(3) *Ако* $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{C}$ *и* $\mathcal{B} \leq_\omega \mathcal{C}^{(n)}$ *то* $I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \leq_\omega \mathcal{C}$.

Доказателство. Твърденията (1) и (2) следват директно от дефинициите. За да докажем (3) нека $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \leq_\omega \mathcal{C}^{(n)}$. Тогава за всяко k, $P_k(\mathcal{B}) \leq_e P_{n+k}(\mathcal{C})$ равномерно по k. Тъй като $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{C}$, имаме за всяко $k < n$, $A_k \leq_e P_k(\mathcal{C})$. Така $I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \leq_e P(\mathcal{C})$ и следователно $I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \leq_\omega \mathcal{C}$.

□

Ето още няколко лесни, но полезни свойства на обръщащата операция $I^n_{\mathcal{A}}$:

(I0) $I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{(n)}) \equiv_\omega \mathcal{A}$.
(I1) Нека $\mathcal{A}, \mathcal{A}^* \in \mathcal{S}_\omega$. Ако за някое $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{S}_\omega$, $I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \equiv_\omega I^n_{\mathcal{A}^*}(\mathcal{C})$, то

$$(\forall k < n)(P_k(\mathcal{A}) \equiv_e P_k(\mathcal{A}^*)).$$

(I2) Ако $\mathcal{B} \equiv_\omega \mathcal{C}$, то $I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \equiv_\omega I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$.
(I3) Ако $(\forall k < n)(P_k(\mathcal{A}) \equiv_e P_k(\mathcal{A}^*))$, то за всяко $\mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$, $I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \equiv_\omega I^n_{\mathcal{A}^*}(\mathcal{B})$.

Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{D}_\omega$ и нека $n \geq 1$. Нека още $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ и $\mathcal{B} \in \mathbf{b}$. Дефинираме $I^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \mathbf{d}(I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}))$. От (I2) и (I3) имаме, че $I^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ е коректно дефинирана бинарна операция в $\mathcal{D}_\omega$.

Твърдение 5.1.2 има няколко следствия, които са неочаквани и показват, че операцията скок в ω-номерационните степени притежава свойства, които не са верни нито за тюринговите, нито за номерационните степени.

Теорема 5.1.3. *Нека* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{D}_\omega$ *и* $\mathbf{a}^{(n)} \leq_\omega \mathbf{b}$. *Тогава* $I^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ *е най-малкият елемент на множеството* $\{\mathbf{x} : \mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{x} \ \& \ \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{b}\}$.

Теорема 5.1.4. *За всяко* $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_\omega$ *и* $n \geq 1$,

$$\{\mathbf{x}^{(n)} : \mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a}'\} = \{\mathbf{y} : \mathbf{a}^{(n)} \leq_\omega \mathbf{y} \leq_\omega \mathbf{a}^{(n+1)}\}.$$

Доказателство. Ясно е, че за всяко $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{a}']$ е изпълнено $\mathbf{x}^{(n)} \in [\mathbf{a}^{(n)}, \mathbf{a}^{(n+1)}]$.

Нека сега $\mathbf{a}^{(n)} \leq_\omega \mathbf{y} \leq_\omega \mathbf{a}^{(n+1)}$ и нека положим $\mathbf{x} = I^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})$. Тогава $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{y}$. Остава да докажем, че $\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a}'$. Наистина, в сила е $\mathbf{a}^{(n)} \leq_\omega \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \leq_\omega \mathbf{a}^{(n+1)} = (\mathbf{a}')^{(n)}$. Следователно от Твърдение 5.1.2 получаваме $\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a}'$.

□

Нека за две ω-номерационни степени $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{b}$, да означим с $\mathcal{D}_\omega[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ интервала $(\{\mathbf{x} : \mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{b}\}, \leq_\omega\restriction [\mathbf{a}, \mathbf{b}])$.

Свойство 5.1.5. *Нека* $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_\omega$ *и* $n \geq 1$. *Тогава*

$$\mathcal{D}_\omega[\mathbf{a}^{(n)}, \mathbf{a}^{(n+1)}] \simeq \mathcal{D}_\omega[\mathbf{a}, I^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}^{(n+1)})].$$

Доказателство. От Твърдение 5.1.2 следва, че ако $\mathbf{a}^{(n)} \leq_\omega \mathbf{x}, \mathbf{y}$, то

$$\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{y} \iff I^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \leq_\omega I^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}).$$

В този смисъл достатъчно е да докажем, че

$$\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{x} \leq_\omega I^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}^{(n+1)}) \Longrightarrow \mathbf{x} = I^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}^{(n)}).$$

Наистина, нека $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ и $\mathcal{X} \in \mathbf{x}$. Тогава $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{X}$ и $\mathcal{X} \leq_\omega I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{(n+1)})$. От тук получаваме, че за всяко $k < n$, $P_k(\mathcal{A}) \leq_e P_k(\mathcal{X}) \leq_e P_k(\mathcal{A})$. Следователно $(\forall k < n)(P_k(\mathcal{X}) \equiv_e P_k(\mathcal{A}))$. Така

$$\mathcal{X} \equiv_\omega \mathcal{I}^n_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}^{(n)}) \equiv_\omega I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}^{(n)})$$

и значи $\mathbf{x} = I^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}^{(n)})$.

□

Последното твърдение показва, че интервалът $\mathcal{D}_\omega[\mathbf{a}, \mathbf{a}']$ съдържа подструктура изоморфна на $\mathcal{D}_\omega[\mathbf{a}^{(n)}, \mathbf{a}^{(n+1)}]$.

5.2. Определимост на $\mathcal{D}_e$ в $\mathcal{D}_\omega{}'$

Нека с $\mathcal{D}_\omega{}'$ означим структурата $(\mathcal{D}_\omega, \mathbf{0}_\omega, \leq_\omega, ')$ на ω-номерационните степени с прибавена операцията скок.

В този раздел ще покажем, че множеството $\mathbf{D}_1$ е определимо с формула от първи ред в $\mathcal{D}_\omega{}'$.

Дефиниция 5.2.1. *За* $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathcal{D}_\omega$*, полагаме* $I_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = I^1_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$*. Нека още*

$$\mathcal{I}_{\mathbf{a}} = \{I_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) : \mathbf{a}' \leq_\omega \mathbf{x}\}.$$

Ясно е, че

$$\mathbf{z} \in \mathcal{I}_{\mathbf{a}} \iff \mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{z} \ \&\ (\forall \mathbf{y})(\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{y} \ \&\ \mathbf{y}' = \mathbf{z}' \Rightarrow \mathbf{z} \leq_\omega \mathbf{y}).$$

Следователно съществува формула от първи ред Φ с точно две свободни променливи, такава че

$$\mathcal{D}_\omega{}' \models \Phi(\mathbf{z}, \mathbf{a}) \iff \mathbf{z} \in \mathcal{I}_{\mathbf{a}}.$$

Свойство 5.2.2. *Нека* $\mathbf{a} = d_\omega(\mathcal{A})$ *и нека* $\mathbf{b} = d_\omega(\mathcal{B})$*. Тогава*

$$\mathcal{I}_{\mathbf{a}} \subseteq \mathcal{I}_{\mathbf{b}} \iff \mathbf{b} \leq_\omega \mathbf{a} \ \&\ A_0 \equiv_e B_0.$$

Доказателство. Нека $\mathcal{I}_{\mathbf{a}} \subseteq \mathcal{I}_{\mathbf{b}}$. От (I0) получаваме $\mathbf{a} \in \mathcal{I}_{\mathbf{a}}$ и следователно $\mathbf{a} \in \mathcal{I}_{\mathbf{b}}$. Тогава $\mathbf{a} = I_{\mathbf{b}}(\mathbf{x})$ за някое $\mathbf{x}$, такова че $\mathbf{b}' \leq_\omega \mathbf{x}$. Следователно $\mathbf{b} \leq_\omega \mathbf{a}$. От друга страна $\mathbf{a} = I_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}') = I_{\mathbf{b}}(\mathbf{x})$. Тогава от (I1) получаваме $A_0 = P_0(\mathcal{A}) \equiv_e P_0(\mathcal{B}) = B_0$.

Нека сега $\mathbf{b} \leq_\omega \mathbf{a}$ и $A_0 \equiv_e B_0$. Трябва да покажем, че за всяко $\mathbf{x}$, такова че $\mathbf{a}' \leq_\omega \mathbf{x}$, е в сила $I_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{I}_{\mathbf{b}}$. Наистина, да забележим, че $\mathbf{b}' \leq_\omega \mathbf{a}' \leq_\omega \mathbf{x}$ и следователно $I_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{I}_{\mathbf{b}}$. От $A_0 \equiv_e B_0$ съгласно (I3) получаваме $I_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = I_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$.

□

Следствие 5.2.3. *Ако* $\mathcal{I}_{\mathbf{a}} = \mathcal{I}_{\mathbf{b}}$*, то* $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Свойство 5.2.4. *За всяко* $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_\omega$*,*

$$\mathbf{a} \in \mathcal{D}_1 \iff (\forall \mathbf{b})(\mathcal{I}_{\mathbf{a}} \subseteq \mathcal{I}_{\mathbf{b}} \Rightarrow \mathcal{I}_{\mathbf{a}} = \mathcal{I}_{\mathbf{b}}).$$

Доказателство. Нека $\mathbf{a} = d_\omega(A \uparrow \omega) \in \mathcal{D}_1$. Нека $\mathbf{b} = d_\omega(\mathcal{B})$ и $\mathcal{I}_{\mathbf{a}} \subseteq \mathcal{I}_{\mathbf{b}}$. Тогава $A \equiv_e B_0$ и следователно $A \uparrow \omega \leq_\omega \mathcal{B}$. So $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{b}$. От горното твърдение следва, че $\mathcal{I}_{\mathbf{b}} \subseteq \mathcal{I}_{\mathbf{a}}$.

Нека сега $(\forall \mathbf{b})(\mathcal{I}_{\mathbf{a}} \subseteq \mathcal{I}_{\mathbf{b}} \Rightarrow \mathcal{I}_{\mathbf{a}} = \mathcal{I}_{\mathbf{b}})$. Да разгледаме редицата $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$. Нека положим $\mathcal{B} = A_0 \uparrow \omega$ и нека $\mathbf{b} = d_\omega(\mathcal{B})$. Да забележим, че $\mathbf{b} \in \mathcal{D}_1$. Ясно е, че $\mathbf{b} \leq_\omega \mathbf{a}$. Следователно $\mathcal{I}_{\mathbf{a}} \subseteq \mathcal{I}_{\mathbf{b}}$. Тогава $\mathcal{I}_{\mathbf{a}} = \mathcal{I}_{\mathbf{b}}$. От тук получаваме $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, а следователно $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_1$

□

Така доказахме следната Теорема

Теорема 5.2.5. *Множеството* $\mathcal{D}_1$ *е определимо с формула от първи ред в* $\mathcal{D}_\omega{}'$*.*

Като следствие на Теорема 5.2.5 можем да покажем, че всяка изброима n-арна релация в $\mathcal{D}_\omega$ е определима с формула от първи ред с параметри. За целта ще използваме един резултат на Слеман и Удин [**34**].

Теорема 5.2.6. *Всяка изброима* n*-арна релация в* $\mathcal{D}_e$ *е определима с формула от първи ред с параметри.*

Нека фиксираме едно изброимо $R \subseteq \mathcal{D}_\omega^n$ и нека с $\mathrm{dom}(R)$ означим онези степени, които участват в някоя наредена n-орка от R. Тъй като R е изброимо, то съществува степен $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_1$, такава че $(\forall \mathbf{x} \in \mathrm{dom}(R))(\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a})$. Нека $\mathrm{dom}(R) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots\}$ и нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \ldots$ са степени от $\mathcal{D}_1$, такива че за всяко i, $\mathbf{x}_i = \mathbf{a} \cap \mathbf{a}_i$, т.е. $\mathbf{x}_i$ е точната долна граница на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_i$ (такива степени съществуват съгласно Теорема 4.2.6). Така в известен смисъл $\mathbf{a}_i$ е представител на $\mathbf{x}_i$ в $\mathcal{D}_1$ и значи можем да представим R, като n-арна релация в $\mathcal{D}_1$. Наистина, нека с R_1 означим множеството $R_1 \subseteq (\{\mathbf{a}_i \mid i < \omega\})^n$, дефинирано чрез

$$(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2} \ldots, \mathbf{a}_{i_n}) \in R_1 \iff (\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2} \ldots, \mathbf{x}_{i_n}) \in R.$$

Тогава е изпълнено, че $(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n) \in R$, тогава и само тогава когато (5.2.1)

$$\exists(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n \in \mathcal{D}_1)((\forall 0 \leq i \leq n)(\mathbf{y}_i = \mathbf{a} \cap \mathbf{z}_i) \;\&\; (\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n) \in R_1)$$

Но R_1 е изброима релация в $\mathcal{D}_1$ и тъй като $\mathcal{D}_1 \cong \mathcal{D}_e$, то съществува формула φ, на $k+n$ променливи и параметри $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k \in \mathcal{D}_1$, такива че за всяко $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n \in \mathcal{D}_1$

$$(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n) \in R_1 \iff \mathcal{D}_1 \models \varphi(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n).$$

Нека с $\varphi_{\mathcal{D}_1}$ означим формулата, която се получава от φ, ограничавайки всички квантори в $\mathcal{D}_1$. Тогава за всяко $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n \in \mathcal{D}_1$

$$(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n) \in R_1 \iff \mathcal{D}_\omega \models \varphi_{\mathcal{D}_1}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n). \tag{5.2.2}$$

Сега от (5.2.1), (5.2.2) и от това, че $\mathcal{D}_1$ е определимо с формула от първи получаваме следната теорема.

Теорема 5.2.7. *Всяка изброима n-арна релация в $\mathcal{D}_\omega$ е определима с формула от първи ред с параметри.*

Въпросът дали операцията скок е определима в структурата $\mathcal{D}_\omega$ е все още открит. Нека все пак да отбележим, че този въпрос е еквивалентен на въпроса, дали $\mathbf{D}_1$ е определимо в $\mathcal{D}_\omega$. Наистина, ако скокът е определим, то и $\mathbf{D}_1$ ще бъде определимо съгласно Теорема 5.2.5. От друга страна, ако $\mathbf{D}_1$ е определимо в $\mathcal{D}_\omega$, то операцията скок ще бъде определима, тъй като първо тя е определима в $\mathcal{D}_e$ **[16]** (и значи в $(\mathbf{D}_1, \leq_\omega, \vee)$) и второ съгласно Твърдение 4.2.2 скокът на степента $\mathbf{a}$ е точната долна граница на скокове на коя да е минимална двойка на $\mathbf{a}$. От своя страна, всяка степен има минимална двойка в $\mathbf{D}_1$ (Теорема 4.2.6).

5.3. Автоморфизмите на $\mathcal{D}_\omega{}'$

Определимостта на $\mathcal{D}_1$ показва, че всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_\omega{}'$ поражда автоморфизъм на $\mathcal{D}_1$, т.е. на $\mathcal{D}_e$. От друга страна, тъй като $\mathcal{D}_1$ е базис на автоморфизмите на $\mathcal{D}_\omega$, то ако два автоморфизма съвпадат върху $\mathcal{D}_1$, то те съвпадат и върху $\mathcal{D}_\omega$. В частност всеки нетривиален автоморфизъм на $\mathcal{D}_\omega$ поражда нетривиален автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$.

Сега ще покажем, че всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e$ може да бъде продължен до автоморфизъм на $\mathcal{D}_\omega$. Нека първо припомним няколко факта за автоморфизмите на $\mathcal{D}_T$.

Да означим с $\mathcal{D}_T{}'$ структурата на тюринговите степени с добавена операцията скок, а с $\mathcal{D}_e{}'$ — структурата на номерационните степени с добавена операцията скок.

Следната теорема е доказана от Ричтер[**28**], виж още [**20**]:

Теорема 5.3.1. *Нека* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{D}_T$. *Нека* $\mathcal{D}_T{}'[\mathbf{a}, \infty) \simeq \mathcal{D}_T{}'[\mathbf{b}, \infty)$. *Тогава* $\mathbf{a}^{(2)} \leq_T \mathbf{b}^{(3)}$.

Като следствие Ричтер получава следния факт за автоморфизмите на $\mathcal{D}_T{}'$:

Теорема 5.3.2. *Нека* φ *е автоморфизъм на* $\mathcal{D}_T{}'$. *Тогава* $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ *за всяко* $\mathbf{a}$ *над* $\mathbf{0}^{(3)}$.

Използвайки Теорема 5.3.1, можем да получим подобни резултати и за $\mathcal{D}_e{}'$.

Теорема 5.3.3. *Нека* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{D}_e$ *са такива, че*

$$\mathcal{D}_e{}'[\mathbf{a}, \infty) \simeq \mathcal{D}_e{}'[\mathbf{b}, \infty).$$

Тогава $\mathbf{a}^{(3)} \leq_e \mathbf{b}^{(4)}$.

Доказателство. Нека φ е изоморфизъм на $\mathcal{D}_e{}'[\mathbf{a}, \infty)$ върху $\mathcal{D}_e{}'[\mathbf{b}, \infty)$

Ще покажем, че φ изобразява тоталните номерационни степени над $\mathbf{a}'$ върху тоталните номерационни степени над $\mathbf{b}'$. Наистина, да разгледаме една тотална степен $\mathbf{x}$ над $\mathbf{a}'$. Съгласно Теорема 2.1.4, съществува $\mathbf{y}$, такова че $\mathbf{a} \leq_e \mathbf{y}$ и $\mathbf{y}' = \mathbf{x}$. Тогава

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y}') = \varphi(\mathbf{y})'.$$

Тъй като всеки скок е тотална степен, то $\varphi(\mathbf{x})$ е тотална. Ясно е, че $\mathbf{b}' = \varphi(\mathbf{a}') \leq_e \varphi(\mathbf{y}') = \varphi(\mathbf{x})$.

Нека сега $\mathbf{b}' \leq_e \mathbf{y}$ и нека $\mathbf{y}$ е тотална. Тъй като φ^{-1} е изоморфизъм от $\mathcal{D}_e{}'[\mathbf{b}, \infty]$ в $\mathcal{D}_e{}'[\mathbf{a}, \infty]$, то $\varphi^{-1}(\mathbf{y})$ е тотална и $\mathbf{a}' \leq_e \varphi^{-1}(\mathbf{y})$.

Нека дефинираме изображението γ в $\mathcal{D}_T[\iota^{-1}(\mathbf{a}'), \infty]$ чрез

$$\gamma(\mathbf{x}) = \iota^{-1}(\varphi(\iota(\mathbf{x}))),$$

където ι е роджърсовото влагане на тюринговите в номерационните степени. Ясно е, че γ е изоморфизъм на $\mathcal{D}_T{}'[\iota^{-1}(\mathbf{a}'), \infty]$ върху $\mathcal{D}_T{}'[\iota^{-1}(\mathbf{b}'), \infty]$. Съгласно Теорема 5.3.1 $\iota^{-1}(\mathbf{a}')^{(2)} \leq_T \iota^{-1}(\mathbf{b}')^{(3)}$. Следователно $\mathbf{a}^{(3)} \leq_e \mathbf{b}^{(4)}$.

$\square$

Като следствие получаваме свойство на автоморфизмите на $\mathcal{D}_e{}'$, чието доказателство е аналогично на това на Теорема 5.3.2 представено в [**20**].

Теорема 5.3.4. *Нека φ е автоморфизъм на $\mathcal{D}_e{}'$. Тогава $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ за всяко $\mathbf{x}$ над ${\mathbf{0}_e}^{(4)}$.*

Доказателство.

Нека първо разгледаме тотална степен $\mathbf{c}$ над ${\mathbf{0}_e}^{(4)}$. Съгласно Теорема 2.1.4 съществува номерационна степен $\mathbf{a}$, такава че $\mathbf{c} = \mathbf{a} \vee {\mathbf{0}_e}^{(4)} = \mathbf{a}^{(4)}$.

Нека $\mathbf{d} = \varphi(\mathbf{c})$ и $\mathbf{b} = \varphi(\mathbf{a})$. От предната теорема получаваме $\mathbf{b} \leq_e \mathbf{b}^{(3)} \leq_e \mathbf{a}^{(4)}$.

Ясно е, че $\mathbf{b}^{(4)} = \varphi(\mathbf{a}^{(4)}) = \varphi(\mathbf{c}) = \mathbf{d}$.

От друга страна,

$$\mathbf{b}^{(4)} = \varphi(\mathbf{a}^{(4)}) = \varphi(\mathbf{a} \vee {\mathbf{0}_e}^{(4)}) = \varphi(\mathbf{a}) \vee {\mathbf{0}_e}^{(4)} = \mathbf{b} \vee {\mathbf{0}_e}^{(4)}.$$

Следователно $\mathbf{d} = \mathbf{b} \vee {\mathbf{0}_e}^{(4)} \leq_e \mathbf{a}^{(4)} = \mathbf{c}$.

Използвайки това, че φ^{-1} също е автоморфизъм на $\mathcal{D}_e{}'$ и използвайки същите разсъждения, получаваме, че $\mathbf{c} \leq_e \mathbf{d}$. Така $\mathbf{c} = \mathbf{d}$.

Нека сега $\mathbf{x}$ е произволна номерационна степен над ${\mathbf{0}_e}^{(4)}$. Съгласно Rozinas[**30**] съществуват тотални номерационни степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, такива че $\mathbf{x} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Тогава

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) \wedge \varphi(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{x}.$$

□

Вече сме готови да докажем, че всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}_e{}'$ може да бъде продължен до автоморфизъм на $\mathcal{D}_\omega{}'$. Нека фиксираме един автоморфизъм φ на $\mathcal{D}_e{}'$.

Нека за произволна редица $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$ с $J^e_{\mathcal{A}}$ означим множеството

$$J^e_{\mathcal{A}} = \{\kappa^{-1}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{D}_1 \;\&\; \mathbf{d}_\omega(\mathcal{A}) \leq_\omega \mathbf{x}\}.$$

Съгласно Теорема 3.3.2,

$$\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B} \iff J^e_{\mathcal{B}} \subseteq J^e_{\mathcal{A}}.$$

Нека сега $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ е редица от множествата от естествени числа. Ще покажем, че можем да построим редица $\mathcal{B}$, такава че $J^e_{\mathcal{B}} = \{\varphi(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in J^e_{\mathcal{A}}\}$. Наистина, нека $\mathbf{p}_k = d_e(P_k(\mathcal{A}))$. Да забележим, че ако $k \geq 4$, то $\mathbf{p_k} \geq \mathbf{0}^{(4)}$ и следователно $\varphi(\mathbf{p_k}) = \mathbf{p_k}$.

Нека фиксираме множества B_0, B_1, B_2, B_3 съответно от от $\varphi(\mathbf{p_0})$, $\varphi(\mathbf{p_1})$, $\varphi(\mathbf{p_2})$ и $\varphi(\mathbf{p_3})$ и нека за $k \geq 4$, $B_k = P_k(\mathcal{A})$.

Лема 5.3.5. $J^e_{\mathcal{B}} = \{\varphi(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in J^e_{\mathcal{A}}\}$.

Доказателство. Нека $\mathbf{x} \in J^e_{\mathcal{A}}$ и нека $X \in \mathbf{x}$. Тогава $\mathcal{A} \leq_\omega X \uparrow \omega$ и значи $P_k(\mathcal{A}) \leq_e \{X^{(k)}\}_{k<\omega}$ равномерно по k. Нека $Y \in \varphi(\mathbf{x})$. Съгласно Теорема 5.3.4, в сила е $X^{(4)} \equiv_e Y^{(4)}$. Следователно за всяко $k \geq 4$, $X^{(k)} \equiv_e Y^{(k)}$ равномерно по k. Ясно е, че $B_k \leq_e Y^{(k)}$ за $k \leq 3$. Така, $\mathcal{B} \leq_\omega \{Y^{(k)}\}_{k<\omega}$. Следователно $\varphi(\mathbf{x}) \in J^e_{\mathcal{B}}$.

Нека сега $\mathbf{y} \in J^e_{\mathcal{B}}$ и нека $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$. Нека $X \in \mathbf{x}$ и $Y \in \mathbf{y}$. Тогава, отново, $X^{(4)} \equiv_e Y^{(4)}$. От тук, както в предния случай, получаваме, че $P(\mathcal{A})_k \leq_e \{X^{(k)}\}_{k<\omega}$ равномерно по k и следователно $\mathbf{x} \in J^e_{\mathcal{A}}$. □

Нека дефинираме изображението Φ в $\mathcal{D}_\omega$ по следния начин. По дадено $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_\omega$, разглеждаме редицата $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ и конструираме редицата $\mathcal{B}$ както по-горе. Полагаме $\Phi(\mathbf{b}) = d_\omega(\mathcal{B})$. От лемата, изображението Φ е коректно дефинирано, инективно и запазва частичната наредба " $\leq_\omega$ ". За да докажем, че Φ е автоморфизъм на $\mathcal{D}_\omega$, остава да покажем, че Φ е върху. Наистина, нека $\mathbf{b} = d_\omega(\mathcal{B})$. Тъй като φ^{-1} е автоморфизъм на $\mathcal{D}_e{}'$, то съществува редица $\mathcal{A}$, такава че $J^e_{\mathcal{A}} = \{\varphi^{-1}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in J^e_{\mathcal{B}}\}$. Нека $\mathbf{a} = d_\omega(\mathcal{A})$ и $\Phi(\mathbf{a}) = d_\omega(\mathcal{B}^*)$, където $J^e_{\mathcal{B}^*} = \{\varphi(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in J^e_{\mathcal{A}}\}$. Тогава $J^e_{\mathcal{B}} = J^e_{\mathcal{A}}$ и следователно $\Phi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$.

Следната лема следва директно от дефиницията на Φ:

Лема 5.3.6. *Нека* $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_\omega$. *Тогава*

$$\{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathcal{D}_e \ \&\ \Phi(\mathbf{a}) \leq_\omega \kappa(\mathbf{y})\} = \{\varphi(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{D}_e \ \&\ \mathbf{a} \leq_\omega \kappa(\mathbf{x})\}.$$

Следствие 5.3.7. *За всяко* $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_e$, $\Phi(\kappa(\mathbf{a})) = \kappa(\varphi(\mathbf{a}))$.

Доказателство. Нека $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_e$. Ясно е, че за всяко $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_e$,

$$\Phi(\kappa(\mathbf{a})) \leq_\omega \kappa(\mathbf{y}) \iff \kappa(\mathbf{a}) \leq_\omega \kappa(\varphi^{-1}(\mathbf{y})) \iff$$
$$\mathbf{a} \leq_e \varphi^{-1}(\mathbf{y}) \iff \varphi(\mathbf{a}) \leq_e \mathbf{y} \iff \kappa(\varphi(\mathbf{a})) \leq_\omega \kappa(\mathbf{y}).$$

Следователно $\Phi(\kappa(\mathbf{a})) = \kappa(\varphi(\mathbf{a}))$.

□

Следствие 5.3.8. *За всяко* $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_e$, $\Phi^{-1}(\kappa(\mathbf{a})) = \kappa(\varphi^{-1}(\mathbf{a}))$.

Доказателство. Нека $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_e$. Тогава $\kappa(\mathbf{a}) \in \mathcal{D}_1$ и следователно от определимостта на $\mathcal{D}_1$, $\Phi^{-1}(\kappa(\mathbf{a})) \in \mathcal{D}_1$. Тогава

$$\varphi(\kappa^{-1}(\Phi^{-1}(\kappa(\mathbf{a}))) = \kappa^{-1}(\Phi(\Phi^{-1}(\kappa(\mathbf{a})))) = \mathbf{a}.$$

Следователно $\kappa^{-1}(\Phi^{-1}(\kappa(\mathbf{a}))) = \varphi^{-1}(\mathbf{a})$. От последното равенство получаваме $\Phi^{-1}(\kappa(\mathbf{a})) = \kappa(\varphi^{-1}(\mathbf{a}))$.

□

Остава да докажем, че Φ запазва операцията скок.

Лема 5.3.9. *За всяко* $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_\omega$, $\Phi(\mathbf{a}') = \Phi(\mathbf{a})'$.

Доказателство. Нека $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_\omega$ и нека $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_1$ са такива, че $\mathbf{a} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$. Тогава, тъй като Φ е автоморфизъм на $\mathcal{D}_\omega$, от предното следствие и Твърдение 4.2.2 получаваме

$$\Phi(\mathbf{a}') = \Phi(\mathbf{x}' \wedge \mathbf{y}') = \Phi(\mathbf{x}') \wedge \Phi(\mathbf{y}') = \kappa(\varphi(\kappa^{-1}(\mathbf{x}'))) \wedge \kappa(\varphi(\kappa^{-1}(\mathbf{y}'))) =$$
$$\kappa(\varphi(\kappa^{-1}(\mathbf{x})))' \wedge \kappa(\varphi(\kappa^{-1}(\mathbf{y})))' = \Phi(\mathbf{x})' \wedge \Phi(\mathbf{y})' = (\Phi(\mathbf{x}) \wedge \Phi(\mathbf{y}))' = \Phi(\mathbf{a})'.$$

□

Като съчетаем доказаните свойства на Φ получаваме следната теорема:

Теорема 5.3.10. *За всеки изоморфизъм* φ *на* $\mathcal{D}_e{}'$ *съществува единствен изоморфизъм* Φ *на* $\mathcal{D}_\omega$, *такъв че:*

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}_e)(\Phi(\kappa(\mathbf{x})) = \kappa(\varphi(\mathbf{x}))). \tag{5.3.1}$$

Доказателство. Трябва само да покажем, че Φ е единствен. Наистина, нека Φ_1 и Φ_2 са автоморфизми на $\mathcal{D}_\omega{}'$ удовлетворяващи (5.3.1). Тогава за всяко $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_1$, $\Phi_1(\mathbf{y}) = \Phi_2(\mathbf{y})$. Тъй като $\mathcal{D}_1$ е базис за автоморфизмите на $\mathcal{D}_\omega$, $\Phi_1 = \Phi_2$.

$\square$

Следствие 5.3.11. *Групата на автоморфизмите на $\mathcal{D}_e{}'$ и тази на автоморфизмите на $\mathcal{D}_\omega{}'$ са изоморфни.*

Доказателство. За даден автоморфизъм φ на $\mathcal{D}_e{}'$, нека $\Lambda(\varphi)$ е автоморфизмът Φ на $\mathcal{D}_\omega{}'$ удовлетворяващ (5.3.1). Ясно е, че Λ е добре дефинирано и инективно.

Нека Φ е автоморфизъм на $\mathcal{D}_\omega{}'$. Съгласно определимостта на $\mathcal{D}_1$, $\Phi(\mathbf{y}) \in \mathcal{D}_1$ за всяко $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_1$. Нека дефинираме φ в $\mathcal{D}_e$ чрез

$$\varphi(\mathbf{x}) = \kappa^{-1}(\Phi(\kappa(\mathbf{x}))).$$

Лесно се вижда, че φ е автоморфизъм на $\mathcal{D}_e{}'$ и че φ и Φ удовлетворяват (5.3.1). Така Λ е биекция.

Остава да покажем, че за всеки два автоморфизма φ_1 и φ_2 of $\mathcal{D}_e{}'$,

$$\Lambda(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \Lambda(\varphi_1) \circ \Lambda(\varphi_2).$$

Нека $\Phi = \Lambda(\varphi_1 \circ \varphi_2)$, $\Phi_1 = \Lambda(\varphi_1)$ и $\Phi_2 = \Lambda(\varphi_2)$. Достатъчно е да видим, че за всяко $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_e$, $\Phi(\kappa(\mathbf{x})) = \Phi_2(\Phi_1(\kappa(\mathbf{x}))$. Наистина, нека $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_e$. Тогава

$$\Phi(\kappa(\mathbf{x})) = \kappa(\varphi_2(\varphi_1(\mathbf{x}))) = \Phi_2(\kappa(\varphi_1(\mathbf{x}))) = \Phi_2(\Phi_1(\kappa(\mathbf{x}))).$$

$\square$

В [**16**] Калимулин доказва, че номерационният скок е определим с формула от първи ред в $\mathcal{D}_e$. Следователно групите на автоморфизмите на $\mathcal{D}_e$ и $\mathcal{D}_e{}'$ съвпадат. Следователно можем да изкажем последното следствие по следния начин:

Теорема 5.3.12. *Групата на автоморфизмите на $\mathcal{D}_e$ и тази на автоморфизмите на $\mathcal{D}_\omega{}'$ са изоморфни.*

Това съответствие между автоморфизмите на $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_e{}'$ има следното следствие, показващо, че всеки автоморфизъм на $\mathcal{D}$ оставя на място всички степени над $\mathbf{0}_\omega{}^{(4)}$.

Теорема 5.3.13. *Нека Φ е автоморфизъм на $\mathcal{D}$. Тогава $\Phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ за всяко $\mathbf{a}$ над $\mathbf{0}_\omega{}^{(4)}$.*

Доказателство. Нека φ е автоморфизъм на $\mathcal{D}_e{}'$, такъв че за всяко $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_e$, $\Phi(\kappa(\mathbf{x})) = \kappa(\varphi(\mathbf{x}))$. Нека $\mathbf{0}_\omega{}^{(4)} \leq_\omega \mathbf{a}$. Ясно е, че $\mathbf{0}_\omega{}^{(4)} \leq_\omega \Phi(\mathbf{a})$. Тогава за всяко $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_e$,

$$\mathbf{a} \leq_\omega \kappa(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{a}) \leq_\omega \Phi(\kappa(\mathbf{x})) \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{a}) \leq_\omega \kappa(\varphi(\mathbf{x})) \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{a}) \leq_\omega \kappa(\mathbf{x}).$$

$\square$

Глава 6

ω-номерационни степени под $\mathbf{0}_\omega{}'$

Досегашните резултати показват, че структурите $\mathcal{D}_e{}'$ и $\mathcal{D}_\omega{}'$ са тясно свързани, но не са елементарно еквивалентни. В тази глава ще видим, че структурата $\mathcal{D}_\omega{}'$ съдържа нови, явно дефинирани елементи (виж 6.1), които могат да се използват за характеризация на ниските и високи степени (класовете $L = \{\mathbf{a} \leq \mathbf{0}' \mid \exists n[\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}^{(n)}]\}$ и $H = \{\mathbf{a} \leq \mathbf{0}' \mid \exists n[\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}^{(n+1)}]\}$) не само в $\mathcal{D}_\omega$, но и в $\mathcal{D}_e$ и $\mathcal{D}_T$. По-точно, ще покажем, че съществува идеал $\mathcal{I}$, такъв че

$$\mathbf{a} \in L \iff (\forall \mathbf{x} \in \mathcal{I})(\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{0}_\omega)$$
$$\mathbf{a} \in H \iff (\forall \mathbf{x} \in \mathcal{I})(\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a}).$$

Резултати в тази глава са съвместни със Сосков и са публикувани в [**38**].

6.1. Класовете L, H и I

Дефиниция 6.1.1. *Нека $n \geq 1$. Казваме, че една ω-номерационна степен $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}_\omega{}'$ е n-висока, ако $\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}_\omega{}^{(n+1)}$. Казваме, че степента $\mathbf{a}$ е n-ниска, ако $\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}_\omega{}^{(n)}$.*

Нека с H_n означим множеството на всички n-високи степени, а с L_n — множеството на всички n-ниски степени. Ясно е, че тюринговата степен $\mathbf{x}$ е n-висока (ниска) тогава и само тогава, когато $\lambda(\mathbf{x}) \in H_n(L_n)$, а номерационната степен $\mathbf{y}$ е n-висока (ниска) тогава и само тогава, когато $\kappa(\mathbf{x}) \in H_n(L_n)$.

Нека положим

$$H = \bigcup_{n \geq 1} H_n;\ L = \bigcup_{n \geq 1} L_n \text{ and } I = \{\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{0}_\omega{}' : \mathbf{a} \notin (H \cup L)\}.$$

За $\mathcal{D}_T$ е в сила следната теорема произтичаща от резултатите на Сакс [**31**], Лахлан [**18**] и Мартин [**21**].

Теорема 6.1.2. *За всяко n, класовете $L_{n+1} - L_n$ и $H_{n+1} - H_n$ са непразни. Освен това, класът I също е непразен.*

Тъй като $\mathcal{D}_T{}'$ се влага в $\mathcal{D}_e{}'$ и $\mathcal{D}_\omega{}'$ то горната теорема е в сила и за тези две структури. Въпреки това, ние ще видим, че тя има естествено и просто доказателство в $\mathcal{D}_\omega{}'$

В сила е следната теорема.

Теорема 6.1.3. *За ω-номерационните степени следните са изпълнени:*

(1) *Съществува* $\mathbf{a} \in I$, *такова че за всяко* n, *можем да намерим степени* $\mathbf{x} \in L_{n+1} - L_n$ *и* $\mathbf{y} \in H_{n+1} - H_n$, *такива че* $\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{y}$.
(2) *За всяко* $\mathbf{x} \in L$ *и* $\mathbf{y} \in H$, *такива че* $\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{y}$, *съществува* $\mathbf{b} \in I$, *такова че* $\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{y}$.
(3) *Съществуват* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in I$, *такива че* $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{0}_\omega{}'$.

Доказателство. Идеята на доказателството се крие в това, че равномерно по A' можем да намираме A-генерична (в смисъла на Дефиниция 2.2.2) номерация под A'. Този факт е добре известен, но до колкото е известно на автора, до момента равномерността никога не е била формулирана явно. За това първо ще докажем следната лема.

Лема 6.1.4. *Съществува естествено число p, такова че за всяко множество A, рекурсивната в A' с индекс p функция $\varphi_p^{A'}$ е A-генерична номерация. В частност, съществува индекс q, такъв че* $\mathrm{Graph}\,(\varphi_p^{A'}) = W_q(A')$.

Доказателство. Нека фиксираме едно множество A и нека както в **3.2** с $\mathcal{R}_A$ означим множеството от всички A-регулярни крайни части. Ясно е, че съществува индекс i, независещ от A, такъв че $\mathcal{R}_A = W_i(A)$. Нека още

$$X_j = \{\tau \in \mathcal{R}_A \mid (\exists \rho \in \mathcal{R}_A)(\tau \subseteq \rho \,\&\, \rho \in W_j(A))\}$$

Ясно, е че съществува рекурсивна функция g, независеща от A, такава че $X_j = W_{g(j)}(A)$.

Вече сме готови да опишем алгоритъма, който използвайки оракул A' ни дава A-генерична номерация. Полагаме $\tau_0 = \emptyset$. Нека сега τ_n е дефинирана. Използвайки A', намираме най-малкият елемент x_n на A, за който $x_n \notin \tau_n[2\mathbb{N}+1]$. Полагаме $\sigma_n = \tau_n {*} 0 {*} x_n$. След това, използвайки оракул A' проверяваме дали $\sigma_n \in X_n$. Ако отговорът е "да", отново използвайки A' полагаме

$$\tau_{n+1} = \mu\rho \in \mathcal{R}_A[\sigma_n \subseteq \rho \,\&\, \rho \in W_n(A)]$$

Ако отговорът е "не", полагаме $\tau_{n+1} = \sigma_n$.

Ясно е, че $\bigcup_n \tau_n$ е A-генерична номерация. При това, гореописаният алгоритъм не зависи от A, а само от индексът i и функцията g. Тъй като те не зависят от A то алгоритъмът е един същ за всяко A.

□

Нека сега да разгледаме редицата $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n<\omega}$, за която $G_n = W_q(\emptyset^{(n+1)})$. От свойствата на A-генеричните номерации, получаваме

$$\forall n(P_n(\mathcal{G})' \equiv_e \emptyset^{(n+1)}), \quad \forall n(P_n(\mathcal{G}) \not\leq_e \emptyset^{(n)})$$

Освен това $\mathcal{G} \leq_\omega \emptyset_\omega{}'$ и значи $\mathbf{d}_\omega(\mathcal{G}) \in I$.

(1) Нека $\mathbf{a} = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{G})$ и нека фиксираме едно естествено $n \geq 1$. Да разгледаме редиците

$$\mathcal{X} = (G_0, G_1, \ldots, G_n, \emptyset, \emptyset, \ldots),$$

$$\mathcal{Y} = (G_0, G_1, \ldots, G_n, \emptyset^{(n+2)}, \emptyset^{(n+3)}, \ldots).$$

Ясно е, че $\mathcal{X}_n \leq_\omega \mathcal{G} \leq_\omega Y_n$, като при това

$$\mathcal{X}^{(n+1)} \equiv_\omega {\emptyset_\omega}^{(n+1)}, \quad \mathcal{X}^{(n)} \not\equiv_\omega {\emptyset_\omega}^{(n)},$$

$$\mathcal{Y}^{(n+1)} \equiv_\omega {\emptyset_\omega}^{(n+2)}, \quad \mathcal{Y}^{(n)} \not\equiv_\omega {\emptyset_\omega}^{(n+1)}.$$

Нека положим $\mathbf{x} = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{X})$, $\mathbf{y} = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{Y})$. Тогава $\mathbf{a}$, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ удовлетворяват (1).

(2) Нека сега фиксираме $\mathbf{x} \in L$, $\mathbf{y} \in H$, такива че $\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{y}$. Нека още n е такова, че $\mathbf{x}^{(n)} = {\mathbf{0}_\omega}^{(n)}$ и $\mathbf{y}^{(n)} = {\mathbf{0}_\omega}^{(n+1)}$. Нека отново $\mathbf{a} = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{G})$ и да разгледаме степента $\mathbf{b} = \mathcal{I}^n_{\mathbf{x}}(\mathbf{a})$. Тъй като $\mathbf{b}^{(n)} = \mathbf{a}^{(n)} \lneq_\omega {\mathbf{0}_\omega}^{(n+1)}$, а $\mathbf{y}^{(n)} = {\mathbf{0}_\omega}^{(n+1)}$, то $\mathbf{b} \lneq I^n_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}^{(n)})$. Но $\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{y}$ и значи $I^n_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}^{(n)}) \leq_\omega I^n_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^{(n)}) = \mathbf{y}$. Следователно $\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{b} \leq_\omega \mathbf{y}$. При това $\mathbf{b} \in I$, тъй като $\mathbf{b}^{(n)} = \mathbf{a}^{(n)}$.

(3) Нека A и B са две множества, такива че $A' \equiv_e B' \equiv_e \emptyset'$ и $A \oplus B \equiv_e \emptyset'$ (Следствие 2.3.3). Нека $\mathbf{a} = \mathbf{d}_\omega(A, G_1, G_2, \ldots)$ и $\mathbf{b} = \mathbf{d}_\omega(B, G_1, G_2, \ldots)$. Очевидно $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in I$ и $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = {\mathbf{0}_\omega}'$.

□

6.2. Степените *a.z.*

Нека при дадено $n \geq 1$ да означим $o_n = I^n_{\mathbf{0}_\omega}({\mathbf{0}_\omega}^{(n+1)})$. С други думи o_n е най-малката сред всички степени $\mathbf{a}$, такива че $\mathbf{a}^{(n)} = {\mathbf{0}_\omega}^{(n+1)}$. Ясно е, че ако $\mathbf{a} \leq_\omega {\mathbf{0}_\omega}'$, то $\mathbf{a} \in H_n \iff o_n \leq_\omega \mathbf{a}$.

Съгласно дефиницията на операцията обръщане на скока, за всяко $n \geq 1$, $o_n = d_\omega(\{O^n_k\}_{k<\omega})$, където $O^n_k = \emptyset$, ако $k < n$, и $O^n_k = \emptyset^{(k+1)}$, ако $n \leq k$.

Нека означим $o_0 = {\mathbf{0}_\omega}'$. Следните факти са директно следствие от явния вид на степените o_n:

(O1) $(\forall n)(o_{n+1} \leq_\omega o_n \;\&\; o_{n+1} \neq o_n)$.
(O2) $(\forall n)(\mathcal{D}_\omega[o_{n+1}, o_n] \simeq \mathcal{D}_e[{\mathbf{0}_e}^{(n)}, {\mathbf{0}_e}^{(n+1)}])$.
(O3) Ако $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_e$ и $\kappa(\mathbf{x}) \leq_\omega o_1$, то $\mathbf{x} = \mathbf{0}_e$.
(O4) За всяко n, $H_n = \{\mathbf{x} \leq_\omega {\mathbf{0}_\omega}' \mid o_n \leq_\omega \mathbf{x}\}$.

Дефиниция 6.2.1. *Казваме, че ω-номерационната степен* $\mathbf{a}$ *е* почти нула *(a.z.), ако* $(\forall n)(\mathbf{a} \leq_\omega o_n)$.

Ясно е, че $\mathbf{0}_\omega$ е *a.z.* Нещо повече — съществуват безброй много *a.z.* степени. За да се убедим в това, ще ни е необходимо следната явна характеризация на *a.z.* степените:

Свойство 6.2.2. *Една степен* $\mathbf{x}$ *е* a.z. *тогава и само тогава, когато* $\mathbf{x} \leq_\omega {\mathbf{0}_\omega}'$ *и съществува редица* $\{X_k\}_{k<\omega} \in \mathbf{x}$*, такава че*

$(\forall k)(X_k \leq_e \emptyset^{(k)})$. *В частност* $\mathbf{x}$ *е* a.z. *тогава и само тогава, когато* $\mathbf{a} \approx \mathbf{0}_\omega$ *(в смисъла на релацията* $\approx$ *дефинирана в 4.3).*

Доказателство. Нека $\mathbf{x}$ е *a.z.* Ясно е, че $\mathbf{x} \leq_\omega \mathbf{0}_\omega{}'$. Нека $\{X_k\}_{k<\omega} \in \mathbf{x}$ и нека фиксираме едно k. Тъй като $\mathbf{x} \leq_\omega o_{k+1}$, то $X_k \leq_e P_k(\{O_n^{k+1}\}_{n<\omega})$ и следователно $X_k \leq_e \emptyset^{(k)}$.

Нека сега $\{X_k\}_{k<\omega}$ е редица от множества от естествени числа, равномерно сводима към $\emptyset_\omega{}'$, и такава че $(\forall n)(X_k \leq_e \emptyset^{(k)})$. Ще покажем, че за всяко $n \geq 1$, $\{X_k\} \leq_\omega \{O_k^n\}_{k<\omega}$. Наистина, нека $n \geq 1$ и нека $\mathcal{O}^n = \{O_k^n\}_{k<\omega}$. Ясно е, че за $k \geq n$, $X_k \leq_e P_k(\emptyset_\omega{}') \equiv_e P_k(\mathcal{O}^n)$ равномерно по k. От друга страна, ако $k < n$, то $P_k(\mathcal{O}^n) \equiv_e \emptyset^{(k)}$ и следователно $X_k \leq_e P_k(\mathcal{O}^n)$. Така $\{X_k\} \leq_\omega \mathcal{O}^n$.

□

Използвайки Твърдение 6.2.2 и дефиницията на операцията обръщане на скока получаваме следното свойство на *a.z.* степените:

Свойство 6.2.3. *Нека* $\mathbf{d}$ *е* a.z. *Тогава* $(\forall n)(I^n_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{d}^{(n)}) = \mathbf{d})$.

Следствие 6.2.4. *Нека* $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}_\omega$ *е* a.z. *Тогава* $\mathbf{d} \in I$.

Доказателство. Тъй като $(\forall n)(\mathbf{d} \leq_\omega o_n)$, то $\mathbf{d} \notin H$. Да допуснем, че $\mathbf{d} \in L$ и нека $\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{0}_\omega{}^{(n)}$. Тогава $\mathbf{d} = I^n_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{0}_\omega{}^{(n)}) = \mathbf{0}_\omega$. Противоречие.

□

Свойство 6.2.5. *Съществува ненулева* a.z. *степен.*

Доказателство. Ще конструираме редица $\mathcal{D} = \{D_k\}_{k<\omega}$ от крайни множества, такава че $\mathcal{D} \not\leq_\omega \emptyset_\omega$ и $\mathcal{D} \leq_\omega \emptyset_\omega{}'$.

Нека $g_0, \ldots, g_k, \ldots$ е ефективна номерация на всички примитивно рекурсивни функции и нека $W_0, \ldots, W_k \ldots$ е гьоделевата номерация на рекурсивно номеруемите множества.

Нека
$$D_k = \begin{cases} \emptyset, & \text{if } 0 \in W_{g_k(k)}(\emptyset^{(k)}); \\ \{0\}, & \text{if } 0 \notin W_{g_k(k)}(\emptyset^{(k)}); \end{cases}$$
Нека положим $\mathcal{D} = \{D_k\}_{k<\omega}$. От дефиницията на множествата D_k следва, че не съществува рекурсивна функция g, такава че
$$(\forall k)(D_k = W_{g(k)}(\emptyset^{(k)})).$$
Следователно $\mathcal{D} \not\leq_\omega \emptyset_\omega$. От друга страна, използвайки оракула $\emptyset^{(k+1)}$ можем да разрешим равномерно по k, дали $0 \in W_{g_k(k)}(\emptyset^{(k)})$. Следователно $\mathcal{D} \leq_\omega \emptyset_\omega{}'$.

□

Следствие 6.2.6. *Съществуват безброй много* a.z. *степени.*

Доказателство. Нека $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}_\omega$ е *a.z.* От гъстотата на ω-номерационните степени под $\mathbf{0}_\omega{}'$, виж **[36]**, следва, че съществува степен $\mathbf{x}$, такава че $\mathbf{0}_\omega <_\omega \mathbf{x} <_\omega \mathbf{d}$. Ясно е, че $\mathbf{x}$ също е *a.z.*

□

6.3. Характеризация на класовете L, H, I чрез степените *a.z.*

В този раздел ще докажем две теореми, с които ще характеризираме класовете H и L чрез степените *a.z.*:

ТЕОРЕМА 6.3.1. *Нека* $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{0}_\omega{}'$. *Тогава*

$$\mathbf{a} \in H \iff (\forall\ a.z.\ \mathbf{d})(\mathbf{d} \leq_\omega \mathbf{a}).$$

ТЕОРЕМА 6.3.2. *Нека* $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{0}_\omega{}'$. *Тогава*

$$\mathbf{a} \in L \iff (\forall\ a.z.\ \mathbf{d})(\mathbf{d} \leq_\omega \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{d} = \mathbf{0}_\omega).$$

Преди да пристъпим към доказателствата нека споменем следното следствие на Теорема 6.3.1:

СЛЕДСТВИЕ 6.3.3. *Идеалът на* a.z. *степените няма минимална горна граница под* $\mathbf{0}_\omega{}'$.

ДОКАЗАТЕЛСТВО. Нека $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{0}_\omega{}'$ е горна граница на идеала от *a.z.* степените. От Теорема 6.3.1 $\mathbf{a} \in H$ и следователно $\mathbf{a} \in H_n$ за някое $n \geq 1$. Тогава $o_n \leq \mathbf{a}$ и значи $o_{n+1} <_\omega \mathbf{a}$. Ясно е, че o_{n+1} е горна граница за идеала от *a.z.* степените.

□

Доказателството на Теорема 6.3.1 и Теорема 6.3.2 използва понятието *добра апроксимация* на редица от множества от естествени числа. Това понятие е въведено в [**36**] по аналогия с понятието за добра апроксимация на множество от естествени числа от [**19**].

ДЕФИНИЦИЯ 6.3.4. *Нека* $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ *е редица от множества от естествени числа. Казваме, че редицата от крайни множества* $\{B_k^s\}$ *рекурсивна по* k *и* s *е* добра апроксимация *на* $\mathcal{B}$*, ако са изпълнени следните три условия:*

(i) $(\forall s)(\forall k)(B_k^s \subseteq B_k \Rightarrow (\forall r \leq k)(B_r^s \subseteq B_r))$.
(ii) $(\forall n)(\forall k)(\exists s)(\forall r \leq k)(B_r \upharpoonright n \subseteq B_r^s \subseteq B_r)$.
(iii) $(\forall n)(\forall k)(\exists s)(\forall t \geq s)(B_k^t \subseteq B_k \Rightarrow (\forall r \leq k)(B_r \upharpoonright n \subseteq B_r^t))$.

Ако $\{B_k^s\}$ е добра апроксимация на редицата $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$, то с G_k ще означаваме множеството от всички k-*добри етапи*, т.е. множеството от всички s, такива че $B_k^s \subseteq B_k$. Ясно е, че $G_r \supseteq G_k$ за всички $r \leq k$.

ДЕФИНИЦИЯ 6.3.5. *Нека* $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ *и* $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ *са две редици от множества от естествени числа и нека* $\{B_k^s\}$ *е добра апроксимация на* $\mathcal{B}$*. Казваме, че редицата от крайни множества* $\{A_k^s\}$*, рекурсивна по* s *и* k*, е* коректна (по отношение на $\{B_k^s\}$) апроксимация *на* $\mathcal{A}$*, ако са в сила следните две свойства:*

(C1) $(\forall k, s)(B_k^s \subseteq B_k \Rightarrow (\forall r \leq k)(A_r^s \subseteq A_r))$.
(C2) *За всяко* k *и* n *съществува* v*, такова че, ако* $s \geq v$ *и* $B_k^s \subseteq B_k$*, то* $(\forall r \leq k)(A_r \upharpoonright n \subseteq A_r^s)$.

За целите на доказателството ще са ни нужни още и следните означения:

- За a и s естествени, полагаме

$$W_{a,s} = \{x \mid x \leq s \ \&\ \{a\}(x) \text{ спира за по-малко от } s \text{ стъпки}\},$$

  където с $\{a\}(x)$ сме означили действието на машината на Тюринг с код a (изчисляваща частично рекурсивната функция φ_a) над входа x.
- За $V \subseteq \mathbb{N}$ и k естествено означаваме

$$V[k] = \{x \mid \langle k, x \rangle \in V\}.$$

- За две редици $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$ и $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n<\omega}$, ще казваме, че $\mathcal{A} \leq_e \mathcal{B}$, ако и само ако съществува рекурсивна функция g, такава че $\forall n(A_n = W_{g(n)}(B_n))$. Съответно

$$\mathcal{A} \equiv_e \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \leq_e \mathcal{B} \ \&\ \mathcal{B} \leq_e \mathcal{A}.$$

Следното твърдение е аналог на Лема 2.2 от [**19**] и може да се докаже по сходен начин.

Лема 6.3.6. *Нека $\{B_k^s\}$ е добра апроксимация на редицата $\mathcal{B}$ и нека W_a е рекурсивно номеруемо множество. Тогава $\{W_{a,s}[k](B_k^s)\}$ е коректна апроксимация на $W_a(\mathcal{A})$.*

Доказателство на следното твърдение може да бъде видяно в [**36**].

Свойство 6.3.7. *Нека $\mathcal{A} \leq_\omega {\emptyset_\omega}'$. Тогава съществува редица от множества от естествени числа P, такава че $P(\mathcal{A}) \equiv_e P$ и P има добра апроксимация.*

Теорема 6.3.8. *Нека $\mathbf{a} \in I$. Тогава съществува* a.z. *степен $\mathbf{d}$, такава че $\mathbf{d} \not\leq_\omega \mathbf{a}$.*

Доказателство. Нека $\mathbf{a} \in I$ и $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$. Ясно е, че $P(\mathcal{A}) \leq_e P({\emptyset_\omega}')$. Нека фиксираме редица $P = \{P_k\}_{k<\omega}$, такава че $P \equiv_e P({\emptyset_\omega}')$ и съществува добра апроксимация $\{P_k^s\}$ на P. Ясно е, че $P(\mathcal{A}) \leq_e P$ и следователно съществува коректна (по отношение на $\{P_k^s\}$) апроксимация $\{P_k^s(\mathcal{A})\}$ на $P(\mathcal{A})$.

Имаме, че за всяко k, $P_k \not\leq_e P_k(\mathcal{A})$. Наистина, да допуснем, че за някое k, $P_k \equiv_e P_k(\mathcal{A})$. Тъй като $P \equiv_e P({\emptyset_\omega}')$ и $P({\emptyset_\omega}') \equiv_e \{\emptyset^{(k+1)}\}_{k<\omega}$, то $\emptyset^{(k+1)} \equiv_e P_k(\mathcal{A})$. Тогава за всяко $r \geq k$, $\emptyset^{(k+1+r)} \leq_e P_{k+r}(\mathcal{A})$ равномерно по r, което показва, че $\mathcal{A}^{(k)} \equiv_e {\emptyset_\omega}^{(k+1)}$. Така $\mathbf{a} \in H$. Противоречие.

□

За целите на твърденията до края на раздела въвеждаме следното означение: ако V е множество от естествени числа, а $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$, то с $V(\mathcal{A})$ ще означаваме редицата

$$V(\mathcal{A}) = \{V[n]P_n(\mathcal{A})\}_{n<\omega}.$$

Нека отбележим, че тогава за сводимостта $\leq_\omega$ между редици е изпълнено

$$\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B} \iff \exists e[\mathcal{A} = W_e(\mathcal{B})].$$

ЛЕМА 6.3.9. *Нека V е рекурсивно номеруемо множество удовлетворяващо следните изисквания за всяко $k < \omega$:*

(F_k) $V[k](P_k)$ *е крайно множество.*

(N_k) $W_k(P_k(\mathcal{A})) \neq V[k](P_k)$.

Тогава $\mathbf{d} = d_\omega(V(P))$ *е* a.z. *и* $\mathbf{d} \not\leq_\omega \mathbf{a}$.

ДОКАЗАТЕЛСТВО. Ясно е, че редицата $V(P) = \{V[k](P_k)\}$ е равномерно сводима към $\emptyset_\omega{}'$ и $(\forall k)(V[k](P_k) \leq_e \emptyset^{(k)})$. Така, съгласно Твърдение 6.2.2, $\mathbf{d}$ е *a.z.*. Да допусне, че $\mathbf{d} \leq_\omega \mathbf{a}$. Тогава $V(P) \leq_e P(\mathcal{A})$ и следователно съществува примитивно рекурсивна функция g, такава че за всяко k, $V[k](P_k) = W_{g(k)}(P_k(\mathcal{A}))$. От втората теорема за рекурсията съществува k, такова че $W_k = W_{g(k)}$ и значи $V[k](P_k) = W_k(P_k(\mathcal{A}))$. Противоречие. $\square$

Така, за да довършим доказателството на теоремата остава да построим рекурсивно номеруемо множество V удовлетворяващо изискванията (F_k) и (N_k) за всяко k.

Ще извършим конструкцията на V на стъпки. На стъпка s ще конструираме ефективно крайно множество V_s, така че $V_s \subseteq V_{s+1}$. Ще положим $V = \bigcup V_s$.

Нека $V_0 = \emptyset$ и да предположим, че V_s е конструирано.

ДЕФИНИЦИЯ 6.3.10. *При дадени две множества X и Y от естествени числа нека*

$$l^s(X,Y) = \max\{n \leq s : (\forall x \leq n)(x \in X \iff x \in Y)\}.$$

За всяко $k \leq s$ изпълняваме условието (N_k) по следния начин. Нека

$$l^s_k = l^s(W_{k,s}(P^s_k(\mathcal{A})), V_s(P^s_k)).$$

За всяко $x \leq l^s_k$, ако $x \in P^s_k$, номерираме $\langle\langle k,x\rangle, P^s_k\rangle$ в $V[k]$, т.е. слагаме $\langle k, \langle\langle k,x\rangle, P^s_k\rangle\rangle$ в V_{s+1}.

Край на конструкцията

ЛЕМА 6.3.11. *Всички изисквания (N_k) са изпълнени.*

ДОКАЗАТЕЛСТВО. Нека фиксираме k. Да допуснем, че

$$W_k(P_k(\mathcal{A})) = V[k](P_k).$$

Да напомним, че етапът s е k-добър, ако $P^s_k \subseteq P_k$.

Ще покажем, че $(\forall x)(\langle k,x\rangle \in V[k](P_k) \iff x \in P_k)$. Наистина, нека $\langle k,x\rangle \in V[k](P_k)$. Тогава съществува $\langle\langle k,x\rangle, D\rangle \in V[k]$, такова че $D \subseteq P_k$. От конструкцията на V следва, че аксиомата е номерирана от изискването (N_k) и значи за някое s, $D = P^s_k$ и $x \in P^s_k$. Тъй като $P^s_k = D \subseteq P_k$, то $x \in P_k$.

Нека сега $x \in P_k$. Тъй като $W_k(P_k(\mathcal{A})) = V[k](P_k)$, съществува k-добър етап s, такъв че $x \leq l_k^s$ и $x \in P_k^s$. Тогава, от конструкцията на V, $\langle k, x\rangle \in V_{s+1}[k](P_k^s)$ и значи $\langle k, x\rangle \in V[k](P_k)$.

Така $(\forall x)(x \in P_k \iff \langle k, x\rangle \in V[k](P_k) \iff \langle k, x\rangle \in W_k(P_k(\mathcal{A})))$. Следователно $P_k \leq_e P_k(\mathcal{A})$. Противоречие.

□

Лема 6.3.12. *Всички изисквания* (F_k) *са изпълнени.*

Доказателство. Нека фиксираме едно k. От конструкцията на V, за всяко y,

$$y \in V[k](P_k) \iff (\exists x, s)(y = \langle k, x\rangle \ \&\ \langle y, P_k^s\rangle \in V[k] \ \&\ P_k^s \subseteq P_k).$$

Да отбележим, че число от вида $\langle\langle k, x\rangle, P_k^s\rangle$ може да бъде номерирано в $V[k]$ само от изискването (N_k).

От предходната лема $W_k(P_k(\mathcal{A})) \neq V[k](P_k)$. Нека фиксираме едно n, такова че

$$W_k(P_k(\mathcal{A}))(n) \neq V[k](P_k)(n).$$

От дефиницията на добра апроксимация, следва че съществува етап v, такъв че за всички k-добри етапи $s \geq v$, $l_k^s < n$. Така, ако в даден k-добър етап s, $\langle\langle k, x\rangle, P_k^s\rangle$ е номерирано в $V[k]$, то $x \leq s < v$ или $x < n$. Следователно $V[k](P_k)$ е крайно.

□

Доказателството на теоремата е завършено.

□

Доказателство. (Доказателство на Теорема 6.3.1) Нека $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{0}_\omega{}'$. Нека $\mathbf{a} \in H$. Тогава $\mathbf{a} \in H_n$ за някое $n \geq 1$ и значи $o_n \leq_\omega \mathbf{a}$. Следователно за всяка *a.z.* степен $\mathbf{d}$, $\mathbf{d} \leq_\omega o_n \leq_\omega \mathbf{a}$.

Нека сега $\mathbf{a}$ е над всички *a.z.* степени. Нека $\mathbf{d}$ е ненулева *a.z.* степен. Тогава за всяко n, $\mathbf{0}_\omega{}^{(n)} <_\omega \mathbf{d}^{(n)} \leq_\omega \mathbf{a}^{(n)}$ и следователно $\mathbf{a} \notin L$. От предната теорема получаваме $\mathbf{a} \notin I$. Следователно $\mathbf{a} \in H$.

□

Теорема 6.3.13. *Нека* $\mathbf{a} \in I$. *Тогава съществува ненулева* a.z. *степен* $\mathbf{d} \leq_\omega \mathbf{a}$.

Доказателство. Нека фиксираме редица $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ и нека $\{P_k^s\}$ е добра апроксимация на редица P, такава че $P \equiv_e P(\mathcal{A})$. Ясно е, че $P(\emptyset_\omega) \leq_e P$ и следователно съществува коректна (по отношение на $\{P_k^s\}$) апроксимация $\{Z_k^s\}$ на $P(\emptyset_\omega)$.

Нека по дадена редица $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ да означим $\mathcal{B}^* = \{B_{k+1}\}_{k<\omega}$. Да забележим, че $\mathcal{B}' = P(\mathcal{B})^*$. Да положим $\mathcal{B}^{(0*)} = \mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^{((n+1)*)} = \mathcal{B}^{(n*)^*}$.

Ясно е, че ако $\mathcal{B} \leq_e \mathcal{C}$ то за всяко n, $\mathcal{B}^{(n*)} \leq_e \mathcal{C}^{(n*)}$ и съществува рекурсивна функция g, такава че $(\forall n)(\mathcal{B}^{(n*)} = W_{g(n)}(\mathcal{C}^{(n*)}))$. В частност, за всяко n, $\mathcal{B}^{(n*)} \leq_e \mathcal{B}^{(n)} = P(\mathcal{B})^{(n*)}$.

Ясно е, че $(\forall n)(\mathcal{A}^{(n)} = P(\mathcal{A})^{(n*)} \equiv_e P^{(n*)})$.

Да отбележим, че ако $\{B_k^s\}$ е добра апроксимация на $\mathcal{B}$, то $\{B_{n+k}^s\}$ е добра апроксимация на $\mathcal{B}^{(n*)}$. Следователно $\{P_{n+k}^s\}$ е добра апроксимация на $P^{(n*)}$ и $\{Z_{n+k}^s\}$ е коректна (по отношение на $\{P_{n+k}^s\}$) апроксимация на ${\emptyset_\omega}^{(n)}$.

Ще конструираме рекурсивно номеруемо множество V, удовлетворяващо следните изисквания за всяко $i \in \mathbb{N}$:

(F_i) $V[i](P_i) \leq_e \emptyset^{(i)}$.
(N_i) $W_i({\emptyset_\omega}^{(i)}) \neq V(P)^{(i*)}$.

Лема 6.3.14. *Нека V е рекурсивно номеруемо множество удовлетворяващо за всяко i изискванията (F_i) и (N_i). Тогава $\mathbf{d} = d_\omega(V(P))$ е ненулева* a.z. *степен под* $\mathbf{a}$.

Доказателство. Ясно е, че $\mathbf{d} \leq_\omega \mathbf{a}$. Тъй като V удовлетворява изискванията (F_i), степента $\mathbf{d}$ е *a.z.*. Остава да покажем, че $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}_\omega$. Да допуснем, че $\mathbf{d} = \mathbf{0}_\omega$. Тогава $V(P) \leq_e P(\emptyset_\omega)$ и следователно съществува рекурсивна функция g, такава че за всяко i,

$$V(P)^{(i*)} = W_{g(i)}({\emptyset_\omega}^{(i)}).$$

Съгласно втората теорема за рекурсията, съществува i, такова че $W_i = W_{g(i)}$. Тогава

$$V(P)^{(i*)} = W_i({\emptyset_\omega}^{(i)}).$$

Противоречие.

□

Ще построим V на стъпки. На стъпка s ще дефинираме ефективно крайно множество V_s, така че $V_s \subseteq V_{s+1}$. Накрая ще положим $V = \bigcup V_s$.

Полагаме $V_0 = \emptyset$ и нека V_s е определено.

Дефиниция 6.3.15. *За дадени редици $\mathcal{X} = \{X_k\}$ и $\mathcal{Y} = \{Y_k\}$, нека*

$$l^s(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \max\{u : u \leq s \ \& \ (\forall \langle k, x\rangle \leq u)(X_k(x) = Y_k(x))\}.$$

За всяко $i \leq s$ осигуряваме условието (N_i) по следния начин. Нека

$$l_i^s = l_s(W_{i,s}(\{Z_{i+k}^s\}_{k<\omega}), \{V_s[i+k](P_{i+k}^s)\}_{k<\omega}).$$

За всяка двойка $\langle k, x\rangle \leq l_i^s$, такава че $x \in P_{i+k}^s$ номерираме числото $\langle\langle i, x\rangle, P_{i+k}^s\rangle$ в $V[i+k]$.

Край на конструкцията.

Нека отбележим, че за всяко j множеството $V[j]$ се състои от двойки $\langle\langle i, x\rangle, P_j^s\rangle$, където $i \leq j$.

Лема 6.3.16. *Всички изисквания (N_i) са изпълнени.*

Доказателство. Нека фиксираме едно i и да предположим, че $W_i({\emptyset_\omega}^{(i)}) = V(P)^{(i*)}$. Ще покажем, че за всяко k,

$$\langle i,x\rangle \in V[i+k](P_{i+k}) \iff x \in P_{i+k}. \tag{6.3.1}$$

Нека $\langle i,x\rangle \in V[i+k](P_{i+k})$. Тогава съществува $\langle\langle i,x\rangle, D\rangle \in V[i+k]$, такова че $D \subseteq P_{i+k}$. Съгласно конструкцията на V, $D = P^s_{i+k}$ за някое s, таков че $x \in P^s_{i+k}$. Следователно $x \in P_{i+k}$.

Нека сега $x \in P_{i+k}$. Съществува $(i+k)$-добър етап s, такъв че $i \le s$, $\langle k,x\rangle \le l^s_i$ и $x \in P^s_{i+k}$. Тогава $\langle\langle i,x\rangle, P^s_{i+k}\rangle \in V_{s+1}[i+k]$ и значи $\langle i,x\rangle \in V[i+k](P_{i+k})$.

От (2) следва, че

$$(\forall k,x)(\langle i,x\rangle \in W_i[k](P_{i+k}(\emptyset_\omega)) \iff x \in P_{i+k}).$$

и значи $\mathcal{A}^{(i)} \equiv_e P^{(i*)} \le_e {\emptyset_\omega}^{(i)}$. Последното показва, че $\mathbf{a} \in L$. Противоречие.

□

Лема 6.3.17. *Всички изисквания (F_j) са изпълнени.*

Доказателство. Нека фиксираме едно $j \in \mathbb{N}$. Трябва да покажем, че $V[j](P_j) \le_e \emptyset^{(j)}$. Ясно е, че

$$V[j](P_j) = \bigcup_{i \le j}\{\langle i,x\rangle : \langle i,x\rangle \in V[j](P_j)\}.$$

Следователно достатъчно е да покажем, че за всяко $i \le j$,

$$X_i = \{x : \langle i,x\rangle \in V[j](P_j)\} \le_e P_j(\emptyset_\omega).$$

Нека фиксираме едно $i \le j$ и нека $k = j - i$. Ще разгледаме два случая:

a) Съществува $u \in \mathbb{N}$, такова че за всички j-добри етапи $s \ge i$, $l^s_i \le u$. Нека $\langle i,x\rangle \in V[j](P_j)$. Тогава съществува j-добър етап $s \ge i$, такъв че $\langle k,x\rangle \le l^s_i \le u$. Следователно X_i е крайно.

b) За всяко u съществува j-добър етап $s \ge i$, такъв че $u < l^s_i$.

Ще покажем, че $V[j](P_j) = W_i[k](P_j(\emptyset_\omega))$.

Нека $x \in W_i[k](P_j(\emptyset_\omega))$. От свойствата на коректните апроксимации съществува v, такова че за всички j-добри етапи $s \ge v$, $x \in W_{i,s}[k](Z^s_j)$. Нека s е j-добър етап, такъв че $\max(v, \langle k,x\rangle) \le l^s_i$. Тогава $v \le l^s_i \le s$. Ясно е, че $x \in W_{i,s}[k](Z^s_j)$. Така $x \in V_s[j](P^s_j)$ и следователно $x \in V[j](P_j)$.

Нека $x \in V[j](P_j)$. Да фиксираме едно v, такова че за всички j-добри етапи $s \ge v$, $x \in V_s[j](P^s_j)$. Да разгледаме j-добър етап $s \ge v$, такъв че $\langle k,x\rangle \le l^s_i$. Тогава $x \in W_{i,s}[k](Z^s_j)$ и следователно $x \in W_i[k](P_j(\emptyset_\omega))$.

Така получаваме

$$x \in X_i \iff \langle i,x\rangle \in W_i[k](P_j(\emptyset_\omega))$$

Следователно $X_i \le_e P_j(\emptyset_\omega)$.

$\square$

Доказателството на теоремата е завършено.

$\square$

Доказателство. (Доказателство на Теорема 6.3.2) Нека $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{0}_\omega{}'$.

Да допуснем, че единствената *a.z.* степен под $\mathbf{a}$ е $\mathbf{0}_\omega$. Тъй като съществува ненулева *a.z.* степен, то $\mathbf{a} \notin H$. Съгласно предната теорема $\mathbf{a} \notin I$. Следователно $\mathbf{a} \in L$.

Нека сега $\mathbf{a} \in L$. Нека $\mathbf{d}$ е *a.z.* степен под $\mathbf{a}$. Тогава за някое n, $\mathbf{d}^{(n)} \leq_\omega \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}_\omega{}^{(n)}$. Следователно $\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{0}_\omega{}^{(n)}$. Така $\mathbf{d} = \mathbf{0}_\omega$.

$\square$

Глава 7

Влагания на $\mathcal{D}_e$ в $\mathcal{D}_\omega$

Както видяхме в Глава 4, съществува естествено влагане κ на структурата $(\mathbf{D}_e, \leq)$ в $(\mathbf{D}_\omega, \leq_\omega)$, като при това $\mathrm{Range}(\kappa) = \mathcal{D}_1$. Освен това се оказа, че κ запазва операциите $\vee$ и $'$, така че всъщност κ е влагане на $\mathcal{D}_e{}'$ в $\mathcal{D}_\omega{}'$.

Целта на тази глава е да изследва влаганията на структурата $(\mathbf{D}_e, \leq)$ в $(\mathbf{D}_\omega, \leq_\omega)$, различни от κ. Разбира се, всяко нетривиално влагане на $(\mathbf{D}_e, \leq)$ в $(\mathbf{D}_e, \leq)$, може да бъде продължено до влагане на $(\mathbf{D}_e, \leq)$ в $(\mathbf{D}_\omega, \leq_\omega)$. В този случай образът на $\mathbf{D}_e$ ще бъде подмножество на $\mathbf{D}_1$. Твърде малко е известно за влаганията на $(\mathbf{D}_e, \leq)$ в $(\mathbf{D}_e, \leq)$ (дори не е ясно дали съществува такова нетривиално влагане). Поради тази причина ще се ограничим до изследване на влагания на $(\mathbf{D}_e, \leq)$ в $(\mathbf{D}_\omega, \leq_\omega)$, чийто образ не е подмножество на $\mathbf{D}_1$. Не е трудно да се съобрази, че съществуват поне континуум много различни влагания от този тип. Както обаче ще видим в 7.2, ако поискаме влагането да запазва някоя от операциите $\vee$ или $'$, то това започва силно да ограничава броят на влаганията. Накрая, в 7.3 ще видим, че едно влагане на $(\mathcal{D}_e, \leq_e)$ в $(\mathcal{D}_\omega, \leq_\omega)$ запазва и двете операции, тогава и само тогава, когато то е породено от специфично влагане на $(\mathcal{D}_e, \leq)$ в $(\mathcal{D}_e, \leq)$.

Резултатите в тази глава все още са само във вид на ръкопис.

7.1. Подструктурите $\mathcal{D}_i$

Дефиниция 7.1.1. *Нека $i \in \mathbb{N}$ и $i \geq 1$. Полагаме:*

$$\mathbf{D}_i = \{\mathbf{d}_\omega(\mathcal{A}) \mid (\forall n \geq i)(A_n = 0)\}$$

Ясно е, че множествата $\mathbf{D}_i$ са затворени относно операциите точна горна граница и скок в $\mathcal{D}_\omega$. Така, $(\mathbf{D}_i, \mathbf{0}_\omega, \leq_\omega, \vee, ')$ е подструктура на $\mathcal{D}_\omega{}'$. При това са в сила следните включвания

$$\mathbf{D}_1 \subsetneq \mathbf{D}_2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbf{D}_i \ldots \subsetneq \mathbf{D}_\omega$$

Бихме могли да характеризираме подструктурите $\mathcal{D}_i$ и чрез следните алгебрични свойства:

Твърдение 7.1.2. *Нека $i \geq 1$ е естествено число. Тогава:*

(1) $\mathbf{D}_{i+1} = \{\mathbf{a} \in \mathcal{D}_\omega \mid \mathbf{a}^{(i)} \in \mathbf{D}_1\}$.
(2) *$\mathcal{D}_{i+1}$ е най-малката подструктура на $\mathcal{D}_\omega$, която съдържа $\mathbf{D}_i$ и множеството $\{I^1_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \mathbf{D}_i\}$.*

(3) *$\mathcal{D}_{i+1}$ е най-малката подструктура на $\mathcal{D}_\omega$, която съдържа $\mathbf{D}_1$ и множеството $\{I^j_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \mathbf{D}_1,\ 1 \leq j \leq i\}$.*

Доказателство. (1) Нека $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$. Тогава

$$\mathcal{A}^{(i)} \equiv_\omega (P_i(\mathcal{A}), A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots).$$

Следователно $\mathcal{A}^{(i)} \equiv_\omega B \uparrow \omega$ за някое $B \subseteq \mathbb{N}$, точно тогава когато $\mathcal{A} \equiv_\omega \mathcal{C}$ за някоя $\mathcal{C} \in \mathcal{S}_\omega$, такава че $(\forall n \geq i+1)(C_n = \emptyset)$. Значи

$$\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{i+1} \iff \mathbf{a}^{(i)} \in \mathbf{D}_1$$

(2) Нека първо да видим, че $\{I^1_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \mathbf{D}_i\} \subseteq \mathbf{D}_{i+1}$. Наистина, нека $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_i$. Тогава $\mathbf{a} = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{A})$, за някое $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$, такова че за всяко $n \geq i$, $A_n = \emptyset$. Тогава $\mathcal{I}^1_{\emptyset_\omega}(\mathcal{A}) \equiv_\omega \mathcal{B}$, където $\mathcal{B}$ е такава, че $B_{n+1} = A_n$ за всяко $n \geq 1$. Следователно $B_n = \emptyset$ за $n \geq i+1$ и значи $I^1_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{a}) \in \mathbf{D}_{i+1}$.

Нека сега $\mathcal{D}$ е подструктура на $\mathcal{D}_\omega{}'$ съдържаща $\mathbf{D}_i$ и множеството $\{I^1_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \mathcal{D}_i\}$. Ще докажем, че $\mathbf{D}_{i+1} \subseteq \mathcal{D}$. За целта, нека $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{i+1}$. Но $\mathbf{a} = \mathbf{x} \vee I^1_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{a})$ за някое $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_1$. От друга страна $I^1_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{a}) \in \mathbf{D}_i$ и значи $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$.

(3) Следва от (2) с индукция по i.

□

Следствие 7.1.3. *Структурата $\bigcup_{i<\omega} \mathcal{D}_{i+1}$ е най-малката подструктура на $\mathcal{D}_\omega{}'$, съдържаща $\mathcal{D}_1$ и затворена относно операцията $I^1_{\mathbf{0}_\omega}$.*

В останалата част от главата ще изследваме доколко $\mathcal{D}_\omega$ е богата на подструктури изоморфни на $\mathcal{D}_e$. Както ще видим отговорът на този въпрос зависи силно от това, кои от операциите $\vee$ и $'$ взимаме под внимание.

7.2. Влагания на $(\mathbf{D}_e, \leq, \vee)$ и $(\mathbf{D}_e, \leq, ')$ в $\mathcal{D}_\omega$.

Твърде малко се знае за това, дали $\mathcal{D}_e$ съдържа подструктури изоморфни на $\mathcal{D}_e$. За това ние ще се съсредоточим в търсене на подструктури на $(\mathbf{D}_\omega, \leq_\omega, \vee)$ и $(\mathbf{D}_\omega, \leq_\omega, ')$ изоморфни на $\mathcal{D}_e$, които не са подструктури на $\mathcal{D}_1$.

Теорема 7.2.1. *За всяко $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_\omega$, съществува влагане $\kappa_\mathbf{a}$ на $(\mathbf{D}_e, \leq, vee)$ в $(\mathbf{D}_\omega, \leq_\omega, \vee)$, такова че $\phi_\mathbf{a}(\mathbf{0}_e) = I^1(\mathbf{a}')$.*

Доказателство. Нека разгледаме изображението $\kappa_\mathbf{a} : \mathbf{D}_e \to \mathbf{D}_\omega$, действащо по правилото

$$\kappa_\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x}) \vee I^1(\mathbf{a}').$$

Първо ще покажем, че за $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}_e$

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \iff \kappa_\mathbf{a}(\mathbf{x}) \leq_\omega \kappa_\mathbf{a}(\mathbf{y})$$

Нека първо $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$. Тогава, тъй като κ е влагане, $\kappa(\mathbf{x}) \leq_\omega \kappa(\mathbf{y})$ и значи $\kappa_\mathbf{a}(\mathbf{x}) \leq_\omega \kappa_\mathbf{a}(\mathbf{y})$.

Нека сега, $\kappa_\mathbf{a}(\mathbf{x}) \leq_\omega \kappa_\mathbf{a}(\mathbf{y})$. Нека $\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{d}_\omega(X \uparrow \omega)$ и $\kappa(\mathbf{y}) = \mathbf{d}_\omega(Y \uparrow \omega)$. Тогава

$$\kappa_\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x}) \vee \mathbf{a} = \mathbf{d}_\omega((X \uparrow \omega) \oplus \mathcal{A}) = \mathbf{d}_\omega((X \oplus \emptyset, \emptyset \oplus A_1, \emptyset \oplus A_2, \ldots)).$$

Аналогично $\kappa_\mathbf{a}(\mathbf{y}) = \mathbf{d}_\omega((Y \oplus \emptyset, \emptyset \oplus A_1, \emptyset \oplus A_2, \ldots))$. Тогава от $\kappa_\mathbf{a}(\mathbf{x}) \leq_\omega \kappa_\mathbf{a}(\mathbf{y})$ получаваме $X \leq_e Y$ и следователно $\kappa(\mathbf{x}) \leq_\omega \kappa(\mathbf{y})$. Тъй като κ е влагане, $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$.

Остава да видим, че $\kappa_\mathbf{a}$ запазва операцията $\vee$. Наистина, за произволни $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_e$

$$\kappa_\mathbf{a}(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = \kappa(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) \vee I^1(\mathbf{a}') = \kappa(\mathbf{x}) \vee \kappa(\mathbf{y}) \vee I^1(\mathbf{a}') =$$
$$(\kappa(\mathbf{x}) \vee I^1(\mathbf{a}')) \vee (\kappa(\mathbf{y}) \vee I^1(\mathbf{a}')) = \kappa_\mathbf{a}(\mathbf{x}) \vee \kappa_\mathbf{a}(\mathbf{y})$$

□

Тъй като съществуват континуум много ω-номерационни степени чийто първи скок не съвпада, то съществуват континуум много влагания от вида $\kappa_\mathbf{a}$ и значи съществуват поне континуум много влагания на $(\mathcal{D}_e, \leq, \vee)$ в $(\mathcal{D}_\omega, \leq_\omega, \vee)$.

Нека, обаче, отбележим, че изображението $\kappa_\mathbf{a}$ не запазва скока. По-точно $\kappa_\mathbf{a}(\mathbf{x}') = (\kappa_\mathbf{a}(\mathbf{x}))'$, тогава и само тогава когато $\mathbf{a} \leq_\omega \kappa(\mathbf{x})$. Наистина, ако $\mathbf{a} \leq_\omega \kappa(\mathbf{x})$, то тогава $\kappa_\mathbf{a}(x) = \kappa(x)$ и следователно $\kappa_\mathbf{a}(\mathbf{x}') = \kappa(\mathbf{x})' \vee \mathbf{a} = \kappa(\mathbf{x}') = \kappa_\mathbf{a}(\mathbf{x})'$. Обратната посока следва от следната лема:

Лема 7.2.2. *Нека $X \subseteq \mathbb{N}$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$ са такива, че*

$$(X \oplus B_0, B_1, \ldots) \leq_\omega (X, B_0, B_1, \ldots,).$$

Тогава $\mathcal{B} \leq_\omega X \uparrow \omega$

Доказателство. Нека означим $\mathcal{X} = (X, B_0, B_1, \ldots,)$ и нека $(X \oplus B_0, B_1, \ldots) \leq_\omega (X, B_0, B_1, \ldots,)$. Тогава съществува рекурсивна функция g, такава че $B_i = W_{g(i)}(P_i(\mathcal{X}))$. Нека фиксираме още три рекурсивни функции f_1, f_2 и f_3, за които е изпълнено $W_{f_1(i,j)}(A) = W_i(W_j(A))$, $W_{f_2(i)}(A') = (W_i(A))'$ и $W_{f_3(i,j)}(A') = W_i(A') \oplus W_j(A)$.

Да предположим, че $P_i(\mathcal{X}) = W_j(X^{(i)})$. Тогава

$$B_i = W_{g(i)}(P_i(\mathcal{X})) = W_{f_1(g(i),j)}(X^{(i)}).$$

Освен това $(P_i(\mathcal{X}))' = W_{f_2(j)}(X^{(i+1)})$ и значи

$$P_{i+1}(\mathcal{X}) = (P_i(\mathcal{X}))' \oplus B_i = W_{f_2(j)}(X^{(i+1)}) \oplus W_{f_1(g(i),j)}(X^{(i)}) =$$
$$W_{f_3(f_2(j), f_1(g(i),j))}(X^{(i+1)}).$$

Ясно е, че $P_0(\mathcal{X}) = W_{i_0}(X)$ за някое $i_0 \in \mathbb{N}$. Да разгледаме рекурсивната функция h, дефинирана чрез примитивната рекурсия

$$\left|\begin{array}{l} h(0) = i_0 \\ h(i+1) = f_3(f_2(h(i)), f_1(g(i), h(i))) \end{array}\right.$$

Тогава $P_i(\mathcal{X}) = W_{h(i)}(X^{(i)})$, т.е. $\mathcal{X} \leq_\omega X \uparrow \omega$ и значи $\mathcal{A} \leq_\omega X \uparrow \omega$. $\square$

Да се върнем на $\kappa_{\mathbf{a}}$. Нека $\kappa_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}') = (\kappa_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}))'$ и нека $\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{d}_\omega(X \uparrow \omega)$, а $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, \ldots)$, където $\mathbf{a} = \mathbf{d}_\omega(\mathcal{A})$. Тъй като

$$\kappa_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}') = \mathbf{d}_\omega((X', A_1, A_2, \ldots)), \text{ а } (\kappa_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}))' = \mathbf{d}_\omega((X' \oplus A_1, A_2, \ldots)),$$

от Лема 7.2.2 получаваме, че $\mathcal{B} \leq_\omega X' \uparrow \omega$. Сега от $A_0 = \emptyset$ получаваме $\mathcal{A} \leq_\omega X \uparrow \omega$.

Така за да бъде изпълнено, че влагането $\kappa_{\mathbf{a}}$ запазва скока, необходимо е $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{0}_\omega$. Но тогава $\kappa_{\mathbf{a}}$ съвпада с κ и значи κ е единственото влагане, от вида $\kappa_{\mathbf{a}}$, на $\mathcal{D}_e$ в $\mathcal{D}_\omega$, запазващо скока.

Нека сега се насочим към влагания на $(\mathcal{D}, \leq,')$ в $(\mathcal{D}_\omega, \leq_\omega,')$. В сила е следната теорема.

Теорема 7.2.3. *За всяка* a.z. *степен* $\mathbf{x}$ *съществува влагане* $\phi_{\mathbf{x}}$ *на* $(\mathcal{D}_e, \leq,')$ *в* $(\mathcal{D}_\omega, \leq_\omega,')$*, такова че* $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}_e) = \mathbf{x}$.

Доказателство. Нека фиксираме една *a.z.* степен $\mathbf{x}$. Като за начало ще въведем две означения. Първо с S_n ще означаваме множеството

$$S_n = \{\mathbf{a} \in \mathcal{D}_\omega \mid \forall s({\mathbf{0}_\omega}^{(n+s)} \leq_\omega \mathbf{a}^{(s)} \ \& \ {\mathbf{0}_\omega}^{(n+s+1)} \not\leq_\omega \mathbf{a}^{(s)})\}.$$

Второ с $V(\mathbf{a})$ ще означаваме

$$V(\mathbf{a}) = \begin{cases} I^k_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{x}^{(n)}), & (\forall s < k)(\forall m < n)(\mathbf{a}^{(s)} \notin S_m) \ \& \ a^{(k)} \in S_n; \\ \mathbf{0}_\omega, & \text{ако такива } k \text{ и } n \text{ не съществуват.} \end{cases}$$

Сега дефинираме изображението $\phi_{\mathbf{x}} : \mathcal{D}_e \to \mathcal{D}_\omega$ чрез правилото

$$\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}) = \kappa(\mathbf{a}) \vee V(\kappa(\mathbf{a})),$$

за всяко $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_e$. В следващите две леми ще покажем, че наистина $\phi_{\mathbf{x}}$ е влагане на $(\mathcal{D}_e, \leq_e,')$ в $(\mathcal{D}_\omega, \leq_\omega,')$.

Лема 7.2.4. *За всяко* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{D}_e$

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \iff \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}) \leq_\omega \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{b})$$

Доказателство. Да разгледаме първо посоката отляво-надясно и нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са две номерационни степени, такива че $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$. Ще разгледаме двата възможни случая за $V(\kappa(\mathbf{a}))$.

Нека първо $V(\kappa(\mathbf{a})) = \mathbf{0}_\omega$. Тогава

$$\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}) = \kappa(\mathbf{a}) \oplus \mathbf{0}_\omega = \kappa(\mathbf{a}) \leq_\omega \kappa(\mathbf{b}) \leq_\omega \kappa(\mathbf{b}) \vee V(\kappa(\mathbf{b})) = \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{b}).$$

Нека сега $V(\kappa(\mathbf{a})) = I^k_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{x}^{(n)})$. Ще разгледаме два случая за $\kappa(\mathbf{b})$.

Нека първо $\kappa(\mathbf{b})^k \notin S_n$. Тъй като $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, а $\kappa(\mathbf{a})^{(k)} \in S_n$, то тогава ${\mathbf{0}_\omega}^{(n)} \leq_\omega \kappa(\mathbf{b})^{(k)}$ и можем фиксираме s, такова че ${\mathbf{0}_\omega}^{(n+s+1)} \leq_\omega \kappa(\mathbf{b})^{(k+s)}$. Тъй като $\mathbf{x}$ е *a.z.*, то $\mathbf{x}^{(n+s)} \leq_\omega {\mathbf{0}_\omega}^{(n+s+1)}$ и значи $\mathbf{x}^{(n+s)} \leq_\omega \kappa(\mathbf{b})^{(k+s)}$. Тогава

$$I^k_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{x}^n) = I^{(k+s)}_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{x}^{(n+s)}) \leq_\omega I^{(k+s)}_{\mathbf{0}_\omega}(\kappa(\mathbf{b})^{(k+s)}) \leq_\omega \kappa(\mathbf{b})$$

По този начин

$$\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}) = \kappa(\mathbf{a}) \vee I^k_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{x}^{(n)}) \leq_\omega \kappa(\mathbf{b}) \leq_\omega \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{b}).$$

Нека сега $\kappa(\mathbf{b})^{(k)} \in S_n$. Тогава $V(\kappa(\mathbf{b})) = I^{k_1}_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{x}^{(n_1)})$ за някои $k_1 \leq k$ и $n_1 \leq n$. Но тогава, от дефиницията на S_n можем да заключим, че $n - k = n_1 - k_1$. Тогава

$$I^{k_1}_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{x}^{(n_1)})^{(k)} = \mathbf{x}^{(n_1+k-k_1)} = \mathbf{x}^{(n_1+n-n_1)} = \mathbf{x}^{(n)},$$

и следователно $V(\kappa(\mathbf{a})) \leq_\omega V(\kappa(\mathbf{b}))$. Така окончателно и в този случай получаваме, че $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}) \leq_\omega \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{b})$. Следователно за всяко $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{D}_e$

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \Longrightarrow \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}) \leq_\omega \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{b}).$$

За посоката отдясно-наляво нека $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{D}_e$ и $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}) \leq_\omega \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{b})$. От дефиницията на $\phi_{\mathbf{x}}$ е ясно, че най-голямата степен в $\mathcal{D}_1$ под $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a})$ е $\kappa(\mathbf{a})$, а тази под $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{b})$ е $\kappa(\mathbf{b})$. Сега от $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}) \leq_\omega \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{b})$ получаваме $\kappa(\mathbf{a}) \leq_\omega \kappa(\mathbf{b})$ и значи $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$.

□

Лема 7.2.5. *За всяко* $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_e$

$$\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}') = \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a})'.$$

Доказателство. Ще разгледаме два случая за $V(\kappa(\mathbf{a}))$. Първо нека $V(\kappa(\mathbf{a})) = \mathbf{0}_\omega$. Тогава $V(\kappa(\mathbf{a})') = \mathbf{0}_\omega$ и значи

$$\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}') = \kappa(\mathbf{a}') \vee V(\kappa(\mathbf{a}')) = \kappa(\mathbf{a})' \vee \mathbf{0}_\omega = (\kappa(\mathbf{a}) \vee \mathbf{0}_\omega)' = \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a})'.$$

Нека сега $V(\kappa(\mathbf{a})) = I^k_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{x}^{(n)})$. Отново ще разгледаме два случая. Първо нека $k > 0$. Тогава

$$\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a})' = (\kappa(\mathbf{a}) \vee I^k_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{x}^{(n)}))' = \kappa(\mathbf{a})' \vee I^{k-1}_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{x}^{(n)}) = \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}').$$

Нека сега $k = 0$, т.е. $V(\kappa(\mathbf{a})) = \mathbf{x}^{(n)}$. Тогава тъй като $\mathbf{x}$ е *a.z.*, а $\kappa(\mathbf{a}) \in \mathcal{D}_1$, то

$$\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a})' = (\kappa(\mathbf{a}) \vee \mathbf{x}^{(n)})' = \kappa(\mathbf{a})' \vee \mathbf{x}^{(n+1)} = \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}')$$

□

С това доказателството на теоремата е завършено.

□

7.3. Влагания на $\mathcal{D}_e{}'$ в $\mathcal{D}_\omega{}'$.

В предния раздел видяхме, че ако се интересуваме само от една от операциите $\vee$ или $'$, $\mathcal{D}_\omega$ със съответната операция е богата на подструктури изоморфни на $\mathcal{D}_e$, които не се съдържат в $\mathcal{D}_1$. Тук ще видим, че нещата не стоят така, когато взимаме в предвид двете операции едновременно.

Твърдение 7.3.1. *Нека* ψ *е влагане на* $\mathcal{D}_e{}'$ *в* $\mathcal{D}_\omega{}'$. *Тогава*

$$\mathrm{Range}\,(\psi) \subseteq \mathbf{D}_2.$$

Доказателство. Нека $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_e$. Тогава, съгласно Теорема, съществуват степени $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}_e$, такива че $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}, \mathbf{y}$ и

$$\mathbf{a}' = \mathbf{x}' = \mathbf{y}' = \mathbf{x} \vee \mathbf{y}.$$

Нека $\mathcal{A} \in \psi(\mathbf{a})$, $\mathcal{X} \in \psi(\mathbf{x})$ и $\mathcal{Y} \in \psi(\mathbf{y})$. Тъй като $\psi(\mathbf{a})' = \psi(\mathbf{x})' = \psi(\mathbf{y})'$, можем да считаме, че за $i \geq 1$, $X_i = Y_i = P_i(\mathcal{A})$. Тогава от $\psi(\mathbf{a})' = \psi(\mathbf{x}) \vee \psi(\mathbf{y})$ получаваме, че

$$(X_0 \oplus Y_0, P_1(\mathcal{A}), P_2(\mathcal{A}), \ldots) \equiv_\omega (P_1(\mathcal{A}), P_2(\mathcal{A}), \ldots).$$

От тук, съгласно Лема 7.2.2, получаваме $\mathcal{A}' \leq_\omega (X_0 \oplus Y_0) \uparrow \omega$. Но от друга страна $(X_0 \oplus Y_0) \uparrow \omega \leq_\omega \mathcal{A}'$ и значи $\mathbf{d}_\omega(A') \in \mathcal{D}_1$. Но тогава $\psi(\mathbf{a})' \in \mathcal{D}_1$ и съгласно Теорема 7.2.1 $\psi(\mathbf{a}) \in \mathcal{D}_2$.

$\square$

Теорема 7.3.2. *Следните твърдения са еквивалентни:*

(1) *Съществува влагане ψ на $\mathcal{D}_e{}'$ в $\mathcal{D}_\omega{}'$, такова че* $\mathrm{Range}\,(\psi) \not\subseteq \mathbf{D}_1$.

(2) *Съществува влагане Ψ на $\mathcal{D}_e$ в $\mathcal{D}_e$, такова че:*
- $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}_e\, [(\Psi(\mathbf{x}))' \leq \Psi(\mathbf{x}')]$;
- $\exists \mathbf{x} \in \mathbf{D}_e\, [(\Psi(\mathbf{x}))' \neq \Psi(\mathbf{x}')]$;
- $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}_e\, [(\Psi(\mathbf{x}'))' = \Psi(\mathbf{x}'')]$;
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}_e\, [\Psi((\mathbf{x} \vee \mathbf{y})') = (\Psi(\mathbf{x}) \vee \Psi(\mathbf{y}))' \vee \Psi(\mathbf{x}') \vee \Psi(\mathbf{y}')]$.

Доказателство. Нека е изпълнено (1). Тогава от Твърдение 7.3.1 имаме $\mathrm{Range}\,(\psi) \subseteq \mathbf{D}_2$. Нека с ξ означим изображението $\xi : \mathbf{D}_\omega \to \mathbf{D}_e$ действащо по правилото

$$\xi(\mathbf{d}_\omega(\mathcal{A})) = \mathbf{d}_e(P_0(A)),$$

където A_0 е първият елемент на редицата $\mathcal{A}$. Ясно е, че

$$\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{b} \Longrightarrow \xi(\mathbf{a}) \leq \xi(\mathbf{b}), \quad \xi(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \xi(\mathbf{a}) \vee \xi(\mathbf{b}).$$

Да разгледаме изображението $\Psi : \mathbf{D}_e \to \mathbf{D}_e$, действащо по правилото

$$\Psi(\mathbf{a}) = \xi(\psi(\mathbf{a})).$$

Ще докажем, че Ψ удовлетворява условията от (2). Наистина, тъй като ψ е влагане, Ψ запазва операцията $\vee$, а значи и наредбата $\leq$. Така за да видим, че Ψ е влагане, трябва само да видим, че Ψ е инекция. Нека $\Psi(\mathbf{a}) = \Psi(\mathbf{b})$ и нека $\mathcal{A} \in \psi(\mathbf{a})$, $\mathcal{B} \in \psi(\mathbf{b})$ и $\mathcal{C} \in \psi(\mathbf{a}) \vee \psi(\mathbf{b})$. Без ограничение можем да считаме, че $A_0 = B_0 = C_0$. Тогава, тъй като $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{C}$, то $\mathcal{C} = I^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}')$ и значи $\psi(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})$ е най-малкото обръщане на скока над $\psi(\mathbf{a})$ на $\psi(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})'$. Тъй като ψ е влагане на $\mathcal{D}_e{}'$ в $\mathcal{D}_\omega{}'$, то тогава $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ е най-малкото обръщане не скока над $\mathbf{a}$ на $(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})'$. Но това е възможно само при положение, че $(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})' = \mathbf{a}'$ и $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{a}$. Следователно $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ и значи Ψ е инекция.

Остава да докажем останалите три свойства на Ψ. От дефиницията на Ψ е ясно, че $\Psi(\mathbf{x}') = \xi(\psi(\mathbf{x})')$. Но за произволно $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_\omega$, $\xi(\mathbf{a})' \leq \xi(\mathbf{a}')$ и значи

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}_e)((\Psi(\mathbf{x}))' \leq \Psi(\mathbf{x}'))$$

От друга страна, тъй като $\mathrm{Range}\,(\psi) \not\subseteq \mathbf{D}_1$, то тогава $\psi(\mathbf{x}) \notin \mathbf{D}_1$ за някое $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_e$. Но $\psi(\mathbf{x}) \in \mathbf{D}_2$ и значи $\xi(\psi(\mathbf{x}))' \neq \xi(\psi(\mathbf{x})')$. Тъй като $\psi(\mathbf{x})' = \psi(\mathbf{x}')$ получаваме

$$(\exists \mathbf{x} \in \mathbf{D}_e)((\Psi(\mathbf{x}))' \neq \Psi(\mathbf{x}')).$$

Да забележим, че ако $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_1$, то $\xi(\mathbf{a})\kappa^{-1}(\mathbf{a})$. От друга страна за произволно $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_e$, $\psi(\mathbf{x}') \in \mathbf{D}_1$. Тогава

$$\Psi(\mathbf{x}'') = \xi(\psi(\mathbf{x}'')) = \xi(\psi(\mathbf{x}')') = \kappa^{-1}(\psi(\mathbf{x}')') = (\kappa^{-1}(\psi(\mathbf{x}'))' = \Psi(\mathbf{x}')'.$$

За последното свойство на Ψ, което трябва да докажем, нека фиксираме $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}_e$ и да разгледаме $\Psi((\mathbf{x} \vee \mathbf{y})')$. Съгласно дефиницията на Ψ

$$\Psi((\mathbf{x} \vee \mathbf{y})') = \xi(\psi((\mathbf{x} \vee \mathbf{y})')) = \xi((\psi(\mathbf{x}) \vee \psi(\mathbf{y}))').$$

Нека $\mathcal{X} \in \psi(\mathbf{x})$, а $\mathcal{Y} \in \psi(\mathbf{y})$. Тогава

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathbf{x}) &= \mathbf{d}_e(P_0(\mathcal{X})) \\
\Psi(\mathbf{y}) &= \mathbf{d}_e(P_0(\mathcal{Y})) \\
\Psi(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) &= \mathbf{d}_e(P_0(\mathcal{X}) \oplus P_0(\mathcal{Y})) \\
\Psi(\mathbf{x}') &= \mathbf{d}_e(P_1(\mathcal{X})) \\
\Psi(\mathbf{y}') &= \mathbf{d}_e(P_1(\mathcal{Y})) \\
\Psi((\mathbf{x} \vee \mathbf{y})') &= \mathbf{d}_e((P_0(\mathcal{X}) \oplus P_0(\mathcal{Y})) \oplus P_1(\mathcal{X}) \oplus P_1(\mathcal{Y}))
\end{aligned}$$

Тогава

$$(\Psi((\mathbf{x} \vee \mathbf{y})') = (\Psi(\mathbf{x}) \vee \Psi(\mathbf{y}))' \vee \Psi(\mathbf{x}') \vee \Psi(\mathbf{y}')$$

и значи Ψ изпълнява всички условия на (2).

Нека сега Ψ изпълнява (2). Да разгледаме изображението $\psi : \mathbf{D}_e \to \mathbf{D}_\omega$, действащо по правилото

$$\psi(\mathbf{a}) = \kappa(\Psi(\mathbf{a})) \vee I^1(\kappa(\Psi(\mathbf{a}'))).$$

Първо ще видим, че ψ запазва операцията $\vee$. Наистина, нека да фиксираме $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}_e$ и да разгледаме $\psi(\mathbf{x} \vee \mathbf{y})$. Съгласно дефиницията на ψ и свойствата на Ψ, κ и I^1

$$\psi(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = \kappa(\Psi(\mathbf{x} \vee \mathbf{y})) \vee I^1(\kappa(\Psi((\mathbf{x} \vee \mathbf{y})')) =$$

$$(\kappa(\Psi(\mathbf{x})) \vee \kappa(\Psi(\mathbf{x}))) \vee \big(I^1(\kappa((\Psi(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}))') \vee I^1(\kappa(\Psi(\mathbf{x}')) \vee I^1(\kappa(\Psi(\mathbf{y}'))\big)$$

$$= \psi(\mathbf{x}) \vee \psi(\mathbf{y}) \vee I^1(\kappa((\Psi(\mathbf{x}) \vee \Psi(\mathbf{y}))')$$

$$= \psi(\mathbf{x}) \vee \psi(\mathbf{y}) \vee I^1((\psi(\mathbf{x}) \vee \psi(\mathbf{y}))').$$

Но $I^1((\psi(\mathbf{x}) \vee \psi(\mathbf{y}))') \leq_\omega \psi(\mathbf{x}) \vee \psi(\mathbf{y})$ и значи

$$\psi(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = \psi(\mathbf{x}) \vee \psi(\mathbf{y}).$$

Следователно изображението ψ запазва операцията $\vee$, а значи и наредбата $\leq$. Така ψ е влагане на $(\mathbf{D}_e, \leq, \vee)$ в $(\mathbf{D}_\omega, \leq_\omega, \vee)$. Остава да покажем, че ψ запазва операцията скок. Да разгледаме $\psi(\mathbf{x}')$. Съгласно дефиницията на ψ и свойствата на на Ψ, κ и I^1

$$\psi(\mathbf{x}') = \kappa(\Psi(\mathbf{x}')) \vee I^1(\kappa(\Psi(\mathbf{x}''))) = \kappa(\Psi(\mathbf{x}')) \vee I^1(\kappa((\Psi(\mathbf{x}))')) =$$
$$\kappa(\Psi(\mathbf{x}')) = \kappa((\Psi(\mathbf{x}))') \vee \kappa(\Psi(\mathbf{x}')) = (\kappa(\Psi(\mathbf{x})))' \vee (I^1(\kappa(\Psi(\mathbf{x}')))' =$$
$$(\kappa(\Psi(\mathbf{x})) \vee I^1(\kappa(\Psi(\mathbf{x}')))' = \psi(\mathbf{x})',$$

с което теоремата е доказана.

□

Библиография

[1] Ю. Т. Медведев, *Степени трудности массовых проблем*, ДАН СССР **104** (1955), 501–504.

[2] А. А. Мучник, *Неразрешимость проблемы сводимости теории алгоритмов*, ДАН СССР **108** (1956), 194–197.

[3] J. Case, *Enumeration reducibility and partial degrees*, Ann. Math. Log **2** (1971), 419–439.

[4] ______, *Maximal arithmetical reducibilities*, Z. Math. Logik Grundlag. Math. **20** (1974), 261–270.

[5] S. B. Cooper, *Partial degrees and the density problem. Part 2: The enumeration degrees of the Σ_2 sets are dense*, J. Symbolic Logic **49** (1984), 503–513.

[6] Kate Copestake, *1-Genericity in the enumeration degrees*, J. Symbolic Logic **53** (1988), 878–887.

[7] H. B. Enderton and H. Putnam, *A note on the hyperarithmetical hierarchy*, J. Symbolic Logic **35** (1970), 429–430.

[8] R. M. Friedberg, *A criterion for completeness of degrees of unsolvability*, J. Symbolic Logic **22** (1957), 159–160.

[9] ______, *Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability*, Proc. Nat. Ac. Sci **43** (1957), 236–238.

[10] H. Ganchev, *A jump inversion theorem for the infinite enumeration jump*, to appear in Ann. Univ. Sofia.

[11] ______, *A total degree splitting theorem and a jump inversion splitting theorem*, 5th Panhellenic Logic Symposium, Athens, Greece, 2005, pp. 79–81.

[12] ______, *Exact pair theorem for the ω-enumeration degrees*, Computation and Logic in the Real World, Lecture Notes in Comp. Science (B. Loewe S. B. Cooper and A. Sorbi, eds.), vol. 4497, Springer-Verlag, 2007, pp. 316–324.

[13] H. Ganchev and I. N. Soskov, *The groups $Aut(D_\omega{}')$ and $Aut(D_e)$ are isomorphic*, 6th Panhellenic Logic Symposium, Volos, Greece, 2007, pp. 53–57.

[14] C. G. Jockusch, *Simple proofs of some theorems on high degrees of unsolvability*, Can. J. Math. **24** (1977), 1072–1080.

[15] C. G. Jockusch and D. Posner, *Doulbe jumps of minimal degrees*, J. Symbolic Logic **43** (1978), 715–724.

[16] I. Sh. Kalimullin, *Definability of the jump operator in the enumeration degrees*, Journal of Mathematical Logic **3** (2003), 257–267.

[17] S. C. Kleene, *On notation for ordinal numbers*, J. Symbolic Logic **3** (1938), 150–155.

[18] A. H. Lachlan, *On a problem of G.E. Sacks*, Proc. Am. Math. Soc. **16** (1965), 972–979.

[19] A. H. Lachlan and R. A. Shore, *The n-rea enumeration degrees are dense*, Arch. Math. Logic **31** (1992), 277–285.

[20] M. Lerman, *Degrees of unsolvability*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1983.

[21] D. A. Martin, *On a question of G.E. Sacks*, J. Symbolic Logic **31** (1966), 66–69.

[22] K. McEvoy, *Jumps of quasi-minimal enumeration degrees*, J. Symbolic Logic **50** (1985), 839–848.

[23] J. Myhill, *Note on degrees of partial functions*, Proc. Am. Math. Soc. **12** (1961), 519–521.

[24] P. G. Odifreddi, *Classical recursion theory, Volume I*, Studies in logic and the foundations of mathematics (R. A. Shore A. S. Troelstra S. Abramsky, S. Artemov, ed.), vol. 125, Elsevier, 1989.

[25] ———, *Classical recursion theory, Volume II*, Studies in logic and the foundations of mathematics (R. A. Shore A. S. Troelstra S. Abramsky, S. Artemov, ed.), vol. 143, Elsevier, 1999.

[26] D. Posner, *High degrees*, Ph.D. thesis, University of Califronia, 1977.

[27] E. L. Post, *Recursively enumerable sets of positiv integers and their decision problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 284–316.

[28] L. J. Richter, *On automorphisms of degrees that preserve jumps*, Israel Jour. Math. **32** (1979), 27–31.

[29] H. Rogers Jr., *Theory of recursive functions and effective computability*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

[30] M. Rozinas, *The semi-lattice of e-degrees*, Recursive functions (Ivanovo), Ivano. Gos. Univ., 1978, Russian, pp. 71–84.

[31] G. E. Sacks, *On degrees less than* $\mathbf{0}'$, Ann. Math. **77** (1963), 211–231.

[32] A. L. Selman, *Arithmetical reducibilities I*, Z. Math. Logik Grundlag. Math. **17** (1971), 335–350.

[33] ———, *Applications of forcing to the degree theory of arithmetical hierarchy*, Proc. London Math. Soc. **25** (1972), 586–602.

[34] T. A. Slaman and H. W. Woodin, *Definability in the enumeration degrees*, Arch. Math. Log. **36** (1997), 255–267.

[35] I. N. Soskov, *A jump inversion theorem for the enumeration jump*, Arch. Math. Logic **39** (2000), 417–437.

[36] ———, *The* ω*-enumeration degrees*, Journal of Logic and Computation **17** (2007), 1193–1214.

[37] I. N. Soskov and V. Baleva, *Regular enumerations*, J. Symbolic Logic **67** (2002), 1323–1343.

[38] I. N. Soskov and H. Ganchev, *The jump operator on the* ω*-enumeration degrees*, to appear in Ann. Pure and Appl. Logic.

[39] I. N. Soskov and B. Kovachev, *Uniform regular enumerations*, Mathematical Structures in Comp. Sci. **16** (2006), no. 5, 901–924.

[40] C. Spector, *Recursive well-orderings*, J. Symbolic Logic **20** (1955), 151–163.

[41] ———, *On degrees of recursive unsolvability*, Ann. of Math.(2) **64** (1956), 581–592.

[42] A. Sorbi T. A. Slaman, *Quasi-minimal enumeration degrees and minimal turing degrees*, Ann. Mat. Pura Appl. **174** (1998), 97–120.