Софийски университет

„Св. Климент Охридски“

Факултет по математика и информатика

Иван Димитров Георгиев

СУБРЕКУРСИВНА ИЗЧИСЛИМОСТ В АНАЛИЗА

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на
образователна и научна степен „Доктор“

Научна специалност: „Математическа логика“
Професионално направление: 4.5 „Математика“

Научен ръководител: проф. дмн Димитър Скордев

София, 2015 г.

Съдържание

Глава 1

УВОД

Дисертацията е в областта на изчислимия анализ. Това е математическа област, която свързва класическата теория на изчислимостта с математическия анализ. Съществено място сред обектите, които се изследват в изчислимия анализ, заемат онези реални числа и реални функции, които могат да се изчисляват с помощта на алгоритми.

Алън Тюринг в [32] пръв дефинира понятието изчислимо реално число. Това е реално число, което има десетично представяне, изчислимо с помощта на машина на Тюринг. Оказва се, че различни други представяния на реалните числа водят до еквивалентно понятие. Както е добре известно, ситуацията е подобна при дефиницията на изчислима функция в естествените числа.

При изследване на изчислимостта на реални функции ще се придържаме към т.н. TTE подход (type-two effectivity, ефективност от тип 2), чийто произход намираме в статиите на Гжегорчик [11] и Лакомб [15]. При този подход се избира система от имена за реалните числа и действието на реалната функция се моделира чрез преобразуване на имената на аргументите в име на функционалната стойност. Това преобразуване може да се осъществи, например, чрез машина на Тюринг с оракул, както е описано в книгата на Вайраух [33].

Основният въпрос в дисертацията е следният:

Как се отразява ограничението на общността на изчислимите процеси върху изчислимия анализ?

С други думи, интересуваме се от връзката между изчислимия анализ и теория на сложността. Този въпрос е поставен като отворен проблем номер 1 в монографията [18]. Ограничението до популярните класове *P, NP, EXP* от дискретната теория на сложността е сравнително добре изучено (например, [14]). Но това не е така със субрекурсивните йерархии. Целта на дисертацията е да изучи изчислимия анализ в рамките на най-популярната субрекурсивна йерархия – йерархията на Гжегорчик на примитивно рекурсивните функции.

Структура на дисертацията

В глава 2 дефинираме субрекурсивните класове от функции, с които работим. Доказваме някои общи тяхни свойства, необходими за приложенията в следващите глави.

В глава 3 дефинираме относителна изчислимост на реални числа с помощта на представяне чрез подходящи редици на Коши. Правим обзор на известни факти и методи за доказване на субрекурсивна изчислимост на реални числа. Дискутираме представянето на реалните числа чрез верижни дроби. Основната цел в главата е да сравним сложността на тези две представяния.

В глава 4 се занимаваме с относителна изчислимост на реални функции. Грубо казано, реалните функции се изчисляват с помощта на оператори. Дефинираме специални класове от оператори, които са подходящи за нашите изследвания. Дефинираме два вида относителна изчислимост на реални функции – равномерна и условна. Изследваме връзките между двете изчислимости.

В глава 5 разглеждаме характеризации на изчислимостите на реални функции, в които се заобикаля използването на оператори и системи от имена за реалните числа.

Благодарности

Изказвам благодарности на всички колеги от катедра „Математическа логика и приложенията ѝ“, ФМИ, СУ за оказаната подкрепа и по-специално на гл. ас. Стефан Вътев за ценните бележки по оформянето на дисертацията. Благодаря на моя научен ръководител проф. Скордев за споделените идеи и за интересните предложени проблеми за изследване. За мен е чест и удоволствие да работя с него!

Глава 2

ЕЛЕМЕНТИ ОТ СУБРЕКУРСИВНАТА ИЗЧИСЛИМОСТ

2.1 Основни означения, изходни функции и функционални операции

Навсякъде с $\mathbb{N}$ означаваме множеството на естествените (неотрицателните цели) числа. Променливите $c, d, i, j, k, l, m, n, x, y, z, s, t$, евентуално с индекси, пробягват естествените числа. Функциите, които разглеждаме, са тотални, приемат естествени аргументи и дават естествена стойност, освен ако изрично не е упоменато друго. Ще използваме съкращение $\vec{x}$ за крайни редици от променливи $x_1, x_2, \dots$, като дължината ще е определена еднозначно от контекста.

На отделни места използваме ламбда-нотация. Нека T е израз, който приема естествени стойности, и нека в T участват естествените променливи $x_1, \dots, x_n$. Тогава с $\lambda x_1 \dots x_n.T$ означаваме n-местната функция, която при аргументи естествените числа $a_1, \dots, a_n$ приема стойността на израза T при $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$. В T могат да участват и други променливи (параметри), като техните стойности се считат фиксирани.

Ще използваме и мета-символите $\Longrightarrow$ като съкращение за „следователно“ и $\Longleftrightarrow$ като съкращение за „тогава и само тогава, когато“.

Краищата на доказателствата и на някои примери маркираме със символа $\square$.

Всички субрекурсивни класове, които разглеждаме, имат индуктивна дефиниция. С други думи, всеки такъв клас представлява затварянето на определена начална фамилия от функции по отношение на известен брой функционални операции.

Дефиниция 2.1.1 (изходни функции). *Изходни функции* са O (унарна константа 0), S (наследник) и I_k^n (проекции) за $n, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, дефинирани с

$$O(x) = 0, \quad S(x) = x + 1, \quad I_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k.$$

По този начин проекцията I_1^1 е идентитетът в $\mathbb{N}$, който също означаваме с $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Дефиниция 2.1.2 (суперпозиция). За $k, n \in \mathbb{N}$ и $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ и $g_1 : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, \ldots, g_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ дефинираме *суперпозицията* $h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ на $f, g_1, \ldots, g_k$ чрез равенството

$$h(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}), \ldots, g_k(\vec{x})).$$

Дефиниция 2.1.3. Един клас от функции ще наричаме *нормален*, ако той съдържа изходните функции и е затворен относно суперпозиция.

Всички класове, които разглеждаме в тази глава, ще бъдат нормални.

Например всеки нормален клас $\mathcal{F}$ от функции съдържа всички константи, при това разгледани като функции на произволен брой аргументи. Например, ако h е константата 3 на 4 аргумента, то $h \in \mathcal{F}$, тъй като имаме изразяването

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3 = S(S(S(O(I_1^4(x_1, x_2, x_3, x_4))))).$$

Една функция $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *се мажорира от* функция $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ (или g *мажорира* f), ако за всички $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$

$$f(\vec{x}) \leq g(\vec{x}).$$

Дефиниция 2.1.4 ((ограничена) примитивна рекурсия). За $k \in \mathbb{N}$ и функции $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ и $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ дефинираме *примитивната рекурсия* $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ на g и h индуктивно чрез равенствата

$$f(0, \vec{x}) = g(\vec{x}),$$

$$f(y + 1, \vec{x}) = h(y, \vec{x}, f(y, \vec{x})).$$

Ако функцията f също удовлетворява

$$f(y, \vec{x}) \leq b(y, \vec{x})$$

(f се мажорира от функция $b : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$), тогава казваме, че f е дефинирана с *ограничена примитивна рекурсия* от g, h и b.

Дефиниция 2.1.5 (ограничена сума и произведение). За $n \in \mathbb{N}$ и функция $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ дефинираме *ограничената сума* $sum : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ на h и *ограниченото произведение* $prod : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ на h с равенствата

$$sum(y, \vec{x}) = h(0, \vec{x}) + h(1, \vec{x}) + \ldots + h(y, \vec{x}),$$

$$prod(y, \vec{x}) = h(0, \vec{x}) \; . \; h(1, \vec{x}) \; . \; \ldots \; . \; h(y, \vec{x}).$$

Използваме обичайните означения

$$sum(y, \vec{x}) = \sum_{t \leq y} h(t, \vec{x}), \quad prod(y, \vec{x}) = \prod_{t \leq y} h(t, \vec{x}).$$

Дефиниция 2.1.6 (ограничен минимум и максимум). За $n \in \mathbb{N}$ и функция $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ дефинираме *ограничен максимум* $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ на h и *ограничен минимум* $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ на h по следния начин: за всички $y \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{N}^n$, $f(y, \vec{x})$ е най-голямото от числата $h(0, \vec{x}), h(1, \vec{x}), \ldots, h(y, \vec{x})$ и $g(y, \vec{x})$ е най-малкото от числата $h(0, \vec{x}), h(1, \vec{x}), \ldots, h(y, \vec{x})$.

Използваме обичайните означения

$$f(y, \vec{x}) = \max_{t \leq y} h(t, \vec{x}), \quad g(y, \vec{x}) = \min_{t \leq y} h(t, \vec{x}).$$

Дефиниция 2.1.7 (A-ограничена минимизация). За $n \in \mathbb{N}$, унарна функция $A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и функция $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ дефинираме *A-ограничената минимизация* $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ на f по следния начин:

$$g(y, \vec{x}) = \begin{cases} z & \text{ако } z \leq y, \;\; f(z, \vec{x}) = 0 \;\text{ и }\; \forall t < z[f(t, \vec{x}) \neq 0], \\ A(y) & \text{ако } \forall t \leq y[f(t, \vec{x}) \neq 0]. \end{cases}$$

При $A = S$, т.е. S-ограничената минимизация наричаме просто *ограничена минимизация* и за нея използваме обичайното означение:

$$g(y, \vec{x}) = \mu_{z \leq y}[f(z, \vec{x}) = 0].$$

Всъщност, ако $\mathcal{F}$ е клас от функции, който е затворен относно A-ограничена минимизация, и $\mathcal{F}$ съдържа поне една ненулева унарна константа, то $A \in \mathcal{F}$, тъй като A съвпада с A-ограничената минимизация на тази константа.

С използване на проекциите и суперпозиция не е трудно да се види, че ако един нормален клас $\mathcal{F}$ е затворен относно (ограничена) примитивна рекурсия, то $\mathcal{F}$ също е затворен относно (ограничена) примитивна рекурсия, която се извършва по кой да е от аргументите (не задължително първия). Същото важи и за всички останали операции от горните дефиниции.

Освен изходните функции много често се използват и някои други работни функции, които ще изброим.

Функцията *предшественик* $\lambda x.x \dot{-} 1$ се дефинира като

$$x \dot{-} 1 = \begin{cases} x - 1 & \text{ако } x > 0, \\ 0 & \text{ако } x = 0. \end{cases}$$

По този начин при $x > 0$ имаме, че $x \dot{-} 1$ е непосредственият предшественик на x в обичайната наредба на $\mathbb{N}$.

Функцията *отсечена разлика* $\lambda xy.x \dot{-} y$ се дефинира като

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{ако } x \geq y, \\ 0 & \text{ако } x < y. \end{cases}$$

Ще проверим тъждеството $x \dot{-} (y + z) = (x \dot{-} y) \dot{-} z$ за всички x, y, z.
Случай 1. $x \geq y + z$. Имаме $x - y \geq z \geq 0$. По този начин

$$x \dot{-} y = x - y \ \text{ и } \ (x \dot{-} y) \dot{-} z = (x - y) - z = x - (y + z)$$

и също така

$$x \dot{-} (y + z) = x - (y + z),$$

с което тъждеството е доказано.
Случай 2. $x < y + z$. Тогава $x \dot{-} y \leq z$, което е очевидно при $x \leq y$, а при $x > y$

$$x \dot{-} y = x - y < z.$$

По този начин

$$x \dot{-} (y + z) = 0 = (x \dot{-} y) \dot{-} z.$$

Функцията sg е унарна и се дефинира със

$$\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ако } x = 0, \\ 1 & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

По този начин $x = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{sg}(x) = 0$.

Функцията $\overline{\mathrm{sg}}$ също е унарна и се дефинира със

$$\overline{\mathrm{sg}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ако } x = 0, \\ 0 & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

По този начин $\overline{\mathrm{sg}}(x) = 1 \dot{-} x$ и $x \neq 0 \Longleftrightarrow \overline{\mathrm{sg}}(x) = 0$. Лесно се проверява тъждеството

$$\mathrm{sg}(x) = \overline{\mathrm{sg}}(\overline{\mathrm{sg}}(x)).$$

Функцията σ е бинарна и се дефинира със

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} x & \text{ако } y = 0, \\ 0 & \text{ако } y > 0. \end{cases}$$

Така $\sigma(x, y) = x.(1 \dot{-} y) = x.\overline{\mathrm{sg}}(y)$.

Функцията τ също е бинарна и се дефинира с

$$\tau(x, y) = \begin{cases} x & \text{ако } y = 0, \\ x + 1 & \text{ако } y > 0. \end{cases}$$

По този начин $\tau(x, y) = x + \mathrm{sg}(y)$.

Функцията $\lambda xy.\left\lfloor \dfrac{x}{y} \right\rfloor$ е *частното* при деление на x с y при $y > 0$. При $y = 0$ считаме, че $\left\lfloor \dfrac{x}{y} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{x}{0} \right\rfloor = 0$.

Бинарната функция rm е такава, че $\mathrm{rm}(x, y)$ е *остатъкът* при деление на x с y. При $y = 0$ считаме, че $\mathrm{rm}(x, y) = \mathrm{rm}(x, 0) = x$.

В сила е равенството

$$\mathrm{rm}(x, y) = x \dot{-} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor .y.$$

Функцията $\lambda xy.|x - y|$ е обичайното *разстояние* между x и y,

$$|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) = \max(x, y) \dot{-} \min(x, y).$$

Лема 2.1.8. Нека $\mathcal{F}$ е нормален клас от функции, който съдържа отсечената разлика и функцията σ. Нека $\mathcal{F}$ е затворен относно A-ограничена минимизация за някоя унарна функция A. Тогава $\mathcal{F}$ е затворен относно ограничена минимизация.

Доказателство. Идеята е да осигурим минимизацията да е винаги успешна. Нека $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ е функция от $\mathcal{F}$ и g е ограничената минимизация на f. Нашата цел е да покажем, че $g \in \mathcal{F}$. Дефинираме функция $f^\star : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ с равенството:

$$f^\star(y, t, \vec{x}) = \sigma(f(y, \vec{x}), y \dot{-} t).$$

При това положение

$$f^\star(y, t, \vec{x}) = f(y, \vec{x}) \text{ при } y \leq t \text{ и}$$

$$f^\star(y,t,\vec{x}) = 0, \text{ иначе.}$$

От условията за класа $\mathcal{F}$ получаваме, че $f^\star \in \mathcal{F}$. Нека g' е A-ограничената минимизация на $f^\star$. Тъй като $\mathcal{F}$ е затворен относно A-ограничена минимизация, $g' \in \mathcal{F}$. От друга страна е в сила равенството

$$g(y,\vec{x}) = g'(S(y),y,\vec{x})$$

за всички $y \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{N}^n$. По този начин $g \in \mathcal{F}$. □

Лема 2.1.9. Нека $n \in \mathbb{N}, f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ е функция. Тогава е в сила следното равенство

$$\mu_{z\le y}[f(z,\vec{x}) = 0] = \sum_{z\le y}\big(1 \dot{-} \sum_{u\le z}(1 \dot{-} f(u,\vec{x}))\big).$$

Доказателство. При дадени $y \in \mathbb{N}$ и $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ редицата

$$\mathrm{sg}(f(0,\vec{x})),\ \mathrm{sg}(f(1,\vec{x})),\ \ldots,\ \mathrm{sg}(f(z,\vec{x})),\ \ldots,\ \mathrm{sg}(f(y,\vec{x}))$$

се състои от нули и единици – когато стойността на f е 0, съответната стойност в редицата също е 0, а когато стойността на f е различна от 0, съответната стойност в редицата е 1. По-нататък редицата

$$\mathrm{sg}(f(0,\vec{x})),\ \mathrm{sg}(f(0,\vec{x})).\mathrm{sg}(f(1,\vec{x})),\ \ldots,\ \prod_{u\le z}\mathrm{sg}(f(u,\vec{x})),\ \ldots,\ \prod_{u\le y}\mathrm{sg}(f(u,\vec{x}))$$

се получава от горната редица, като всеки неин елемент се умножи на всички предходни елементи. Лесно се съобразява, че новата редица има вида

$$1,1,\ldots,1,0,0,\ldots,0.$$

В нея има нули точно когато $f(z,\vec{x}) = 0$ за някое $z \le y$, при това първата нула в редицата има позиция, която съвпада с най-малкото $z \le y$, такова че $f(z,\vec{x}) = 0$. Така лесно се съобразява, че

$$\mu_{z\le y}[f(z,\vec{x}) = 0] = \sum_{z\le y}\big(\prod_{u\le z}\mathrm{sg}(f(u,\vec{x}))\big). \tag{2.1.1}$$

Това равенство е в сила и когато $f(z,\vec{x}) \neq 0$ за всяко $z \le y$. Тогава и двете страни имат стойност $S(y) = y+1$. По-нататък

$$\prod_{u\le z}\mathrm{sg}(f(u,\vec{x})) = 1 \dot{-} \sum_{u\le z}\big(1 \dot{-} f(u,\vec{x})\big). \tag{2.1.2}$$

Действително нека $f(u, \vec{x}) \neq 0$ при всяко $u \leq z$. Тогава лявата страна на равенството (2.1.2) е произведение на единици, т.е. има стойност 1. В дясната страна на (2.1.2) имаме сума на нули, която има стойност 0, значи тази дясна страна също има стойност 1. В другия случай $f(u, \vec{x}) = 0$ за някое $u \leq z$. Тогава в произведението имаме множител 0 и значи лявата страна има стойност 0. Също така сумата отдясно има поне едно ненулево събираемо, така че тази сума има стойност поне 1, т.е. дясната страна на (2.1.2) също има стойност 0. От двете равенства (2.1.1) и (2.1.2) лемата следва непосредствено. □

2.2 Релации, логически операции и ограничени квантори

Всички *релации*, които разглеждаме, са в естествените числа. Релациите отъждествяваме с тяхните множества на истинност. Така при $n \in \mathbb{N}$ всяка n-местна релация разглеждаме като подмножество на $\mathbb{N}^n$. Обикновено ще записваме $R(\vec{x})$ вместо по-точното $\vec{x} \in R$ и $\neg R(\vec{x})$ вместо $\vec{x} \notin R$.

За $n \in \mathbb{N}$ и релация $R \subseteq \mathbb{N}^n$ дефинираме *характеристичната функция* $\chi_R : \mathbb{N}^n \to \{0, 1\}$ на R:

$$\chi_R(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{ако } R(\vec{x}), \\ 1 & \text{ако } \neg R(\vec{x}). \end{cases}$$

За $n \in \mathbb{N}$ и релация $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ често ще използваме съкращението

$$\mu_{z \leq y} R(z, \vec{x})$$

вместо

$$\mu_{z \leq y}[\chi_R(z, \vec{x}) = 0].$$

Дефиниция 2.2.1. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции и $n \in \mathbb{N}$. Казваме, че една релация $R \subseteq \mathbb{N}^n$ е *$\mathcal{F}$-релация*, ако съществува функция $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ от класа $\mathcal{F}$, такава че за всички $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ имаме

$$R(\vec{x}) \iff f(\vec{x}) = 0.$$

Лесно се вижда, че условието в дефиницията е еквивалентно с $\chi_R \in \mathcal{F}$, стига $\mathcal{F}$ да е нормален и да съдържа функцията sg. Действително, ако $\chi_R \in \mathcal{F}$, то можем да вземем $f = \chi_R$ в дефиницията. Обратно, ако имаме функцията f от дефиницията, то лесно се проверява равенството

$$\chi_R(\vec{x}) = \mathrm{sg}(f(\vec{x})),$$

от което следва $\chi_R \in \mathcal{F}$ при направеното предположение за $\mathcal{F}$.

Лема 2.2.2 (представяне на булевите операции). Нека $\mathcal{F}$ е нормален клас от функции и $n \in \mathbb{N}$.

Ако $\mathcal{F}$ съдържа функцията τ, то класът на n-местните $\mathcal{F}$-релации е затворен относно сечение (конюнкция).

Ако $\mathcal{F}$ съдържа функцията σ и функцията $\overline{\mathrm{sg}}$, то класът на n-местните $\mathcal{F}$-релации е затворен относно обединение (дизюнкция).

Ако $\mathcal{F}$ съдържа функцията $\overline{\mathrm{sg}}$, то класът на n-местните $\mathcal{F}$-релации е затворен относно допълнение (отрицание).

Доказателство. За всички $x, y \in \mathbb{N}$

$$\tau(x,y) = x + \mathrm{sg}(y) = 0 \iff x = 0 \text{ и } y = 0.$$

По този начин, ако $R_1 \subseteq \mathbb{N}^n, R_2 \subseteq \mathbb{N}^n$ са $\mathcal{F}$-релации и $R = R_1 \cap R_2$, то

$$\begin{aligned} R(\vec{x}) &\iff R_1(\vec{x}) \text{ и } R_2(\vec{x}) \\ &\iff \chi_{R_1}(\vec{x}) = 0 \text{ и } \chi_{R_2}(\vec{x}) = 0 \\ &\iff \tau(\chi_{R_1}(\vec{x}), \chi_{R_2}(\vec{x})) = 0. \end{aligned}$$

Изразът в лявата страна на последното равенство дефинира функция на $\vec{x}$, която принадлежи на $\mathcal{F}$, съгласно направените предположения за $\mathcal{F}$. По този начин R е $\mathcal{F}$-релация. Другите две твърдения в лемата се доказват по аналогичен начин, като се използва, че

$$\sigma(x, \overline{\mathrm{sg}}(y)) = x.\mathrm{sg}(y) = 0 \iff x = 0 \text{ или } y = 0$$

и

$$\overline{\mathrm{sg}}(x) = 0 \iff x \neq 0.$$ □

Лема 2.2.3 (представяне на ограничените квантори). Нека $\mathcal{F}$ е нормален клас от функции и $n \in \mathbb{N}$. Нека $\mathcal{F}$ е затворен относно A-ограничена минимизация за някоя унарна функция A, такава че $A(y) \leq y$ за всяко y. За произволна $\mathcal{F}$-релация $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ релацията $R_\exists \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$, дефинирана със

$$R_\exists(y, \vec{x}) \iff \exists_{z \leq y} R(z, \vec{x}),$$

също е $\mathcal{F}$-релация. Освен това, ако $\overline{\mathrm{sg}} \in \mathcal{F}$, релацията $R_\forall \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$, дефинирана със

$$R_\forall(y, \vec{x}) \iff \forall_{z \leq y} R(z, \vec{x}),$$

също е $\mathcal{F}$-релация.

Доказателство. Доказваме двете части на твърдението поотделно за всяка релация R. Нека R е $\mathcal{F}$-релация, т.е. $\chi_R \in \mathcal{F}$. Нека g е A-ограничената минимизация на χ_R. От условията за $\mathcal{F}$ имаме, че $g \in \mathcal{F}$. Твърдим, че

$$R_\exists(y, \vec{x}) \iff R(g(y, \vec{x}), \vec{x})$$

за всички $y \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{N}^n$. Действително, ако съществува $z \leq y$, такова че $R(z, \vec{x})$, то $g(y, \vec{x})$ по дефиниция дава z (дори най-малкото), такова че $\chi_R(z, \vec{x}) = 0$, т.е. такова че $R(z, \vec{x})$. Следователно $R(g(y, \vec{x}), \vec{x})$. Обратното е вярно, тъй като $g(y, \vec{x}) \leq y$ за всички $y \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{N}^n$. От тази еквивалентност следва, че

$$\chi_{R_\exists}(y, \vec{x}) = \chi_R(g(y, \vec{x}), \vec{x}).$$

От нея и предположенията за $\mathcal{F}$ следва $\chi_{R_\exists} \in \mathcal{F}$, т.е. $R_\exists$ е $\mathcal{F}$-релация.

За втората част на твърдението отново започваме от произволна $\mathcal{F}$-релация R. Имаме

$$R_\forall(y, \vec{x}) \iff \neg\exists_{z \leq y} \neg R(z, \vec{x}).$$

Тъй като R е $\mathcal{F}$-релация и $\overline{\mathrm{sg}} \in \mathcal{F}$, допълнението $\neg R$ също е $\mathcal{F}$-релация от лема 2.2.2. От първата част, приложена към релацията $\neg R$, получаваме че

$$\exists_{z \leq y} \neg R(z, \vec{x})$$

задава $\mathcal{F}$-релация. Оттук отново с лема 2.2.2 окончателно получаваме, че $R_\forall$ е $\mathcal{F}$-релация. □

Най-често използваните релации са релациите за сравнение между естествените числа.

Лема 2.2.4 (представяне на релациите за сравнение)**.** Нека $\mathcal{F}$ е нормален клас от функции, който съдържа отсечената разлика, функцията $\overline{\mathrm{sg}}$ и функцията τ. Тогава релациите $=, \neq, \leq, <, \geq, >$ са $\mathcal{F}$-релации.

Доказателство. При направените предположения и предвид лема 2.2.2 получаваме, че класът на $\mathcal{F}$-релациите (с фиксиран брой на аргументите) е затворен относно конюнкция и отрицание. По-нататък лемата следва от факта, че отсечената разлика е в класа $\mathcal{F}$ и чрез последователното използване на еквивалентностите

$$x \leq y \iff x \dot{-} y = 0,$$

$$x = y \iff x \leq y \text{ и } y \leq x,$$

$$x \neq y \iff \neg x = y,$$

$$x < y \iff x \leq y \text{ и } \neg x = y,$$

$$x \geq y \Longleftrightarrow y \leq x,$$

$$x > y \Longleftrightarrow y < x. \qquad \square$$

Разбира се, *графиката* на една функция $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ представлява $(n+1)$-местната релация

$$\{(\vec{x}, y) | y = f(\vec{x})\} = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) | \vec{x} \in \mathbb{N}^n\}.$$

Лема 2.2.5 (за графиката). Нека $\mathcal{F}$ е нормален клас от функции, който е затворен относно $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$-ограничена минимизация. Също нека равенството $=$ е $\mathcal{F}$-релация. За произволна функция $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ графиката на f е $\mathcal{F}$-релация тогава и само тогава, когато функцията $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, дефинирана с $g(\vec{x}, y) = \min(f(\vec{x}), y)$, принадлежи на класа $\mathcal{F}$.

Доказателство. Да означим графиката на f с R. Нека предположим, че R е $\mathcal{F}$-релация. Дефинираме функция $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ с

$$h(y, \vec{x}) = \chi_R(\vec{x}, y).$$

От условията за $\mathcal{F}$ и от $\chi_R \in \mathcal{F}$ получаваме $h \in \mathcal{F}$. Но $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$-ограничената минимизация на h съвпада с функцията g и тъй като $\mathcal{F}$ е затворен относно $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$-ограничена минимизация, $g \in \mathcal{F}$. Обратно, нека g е в класа $\mathcal{F}$. Изпълнена е следната еквивалентност

$$y = f(\vec{x}) \Longleftrightarrow y = g(\vec{x}, S(y)).$$

При това положение

$$\chi_R(\vec{x}, y) = \chi_=(y, g(\vec{x}, S(y))).$$

От предположенията за $\mathcal{F}$ получаваме, че $\chi_R \in \mathcal{F}$, т.е. графиката R на f е $\mathcal{F}$-релация. $\square$

Лема 2.2.6 (дефиниция чрез разглеждане на случаи). Нека $\mathcal{F}$ е нормален клас от функции, съдържащ функциите σ и $\lambda xyt. \min(x+y, t)$. Нека $m, n \in \mathbb{N}, m \geq 2$ и за всяко $i = 1, \ldots, m$ имаме, че $g_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ е функция от класа $\mathcal{F}$ и P_i е n-местна $\mathcal{F}$-релация, такива че за всяко $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ да съществува единствено i, такова че $P_i(\vec{x})$. Нека съществува функция $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, също от класа $\mathcal{F}$, за която е изпълнено

$$P_i(\vec{x}) \Longrightarrow g_i(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$$

за $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ и $i = 1, \ldots, m$. Тогава функцията $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, дефинирана с

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} g_1(\vec{x}) & \text{ако } P_1(\vec{x}), \\ g_2(\vec{x}) & \text{ако } P_2(\vec{x}), \\ \ldots \\ g_m(\vec{x}) & \text{ако } P_m(\vec{x}), \end{cases}$$

също принадлежи на класа $\mathcal{F}$.

Доказателство. Разбира се, при направените предположения функцията f е добре дефинирана. Имаме равенството

$$\min(x + y + z, t) = \min(\min(x + y, t) + z, t),$$

което е изпълнено за всички $x, y, z, t \in \mathbb{N}$. Оттук с индукция по $m \geq 2$ получаваме, че функцията $h : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$, дефинирана с

$$h(x_1, \ldots, x_m, t) = \min(x_1 + \ldots + x_m, t),$$

също принадлежи на класа $\mathcal{F}$. За функцията f имаме следното представяне

$$f(\vec{x}) = \sigma(g_1(\vec{x}), \chi_{P_1}(\vec{x})) + \ldots + \sigma(g_m(\vec{x}), \chi_{P_m}(\vec{x})).$$

Но по условие съществува $g \in \mathcal{F}$, която мажорира f, така че

$$f(\vec{x}) = h(\sigma(g_1(\vec{x}), \chi_{P_1}(\vec{x})), \ldots, \sigma(g_m(\vec{x}), \chi_{P_m}(\vec{x})), g(\vec{x})).$$

От това равенство и предположенията за класа $\mathcal{F}$ следва, че $f \in \mathcal{F}$. $\square$

Бележка 2.2.7. Всъщност, ако класът $\mathcal{F}$ съдържа функцията събиране, то от лемата може да отпадне условието за съществуване на мажорираща функция за f.

Следствие 2.2.8. Нека $\mathcal{F}$ удовлетворява условията в лема 2.2.6 и също така $\leq$ и $>$ са $\mathcal{F}$-релации. Нека $\mathcal{F}$ е затворен относно ограничена минимизация. Нека $A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е функция от $\mathcal{F}$, която се мажорира от някоя функция $b \in \mathcal{F}$, такава че $b(y) \geq y$ за всяко $y \in \mathbb{N}$. Тогава $\mathcal{F}$ е затворен относно A-ограничена минимизация.

Доказателство. Нека $n \in \mathbb{N}, f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ е функция и h' е (S-)ограничената минимизация на f. Тогава за A-ограничената минимизация h на f е в сила представянето

$$h(y, \vec{x}) = \begin{cases} h'(y, \vec{x}) & \text{ако } h'(y, \vec{x}) \leq y, \\ A(y) & \text{ако } h'(y, \vec{x}) > y. \end{cases}$$

По условие $A, h' \in \mathcal{F}$. Да дефинираме $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ с

$$g(y, \vec{x}) = b(y).$$

Тогава $g \in \mathcal{F}$ изпълнява съответното условие от лема 2.2.6, тъй като $A(y) \leq b(y)$ и $b(y) \geq y$. Всички предпоставки от лемата са изпълнени, така че $h \in \mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{F}$ е затворен относно A-ограничена минимизация. $\square$

Накрая в тази секция ще дефинираме един клас от релации, който играе важна роля по-нататък.

Дефиниция 2.2.9. Една Δ_0-*формула* е формула в езика на Пеановата аритметика, която съдържа само ограничени квантори. Една релация R е Δ_0-*определима*, ако тя е определима в стандартния модел на Пеановата аритметика с Δ_0-формула.

Дефиниция 2.2.10. Класът на *ограничено аритметичните релации* е най-малкият клас от релации, който съдържа графиката на събирането

$$\{(x, y, z) | z = x + y\}$$

и графиката на умножението

$$\{(x, y, z) | z = x.y\}$$

и е затворен относно явни трансформации (въвеждане на фиктивни променливи, разместване и отъждествяване на променливи и заместване на променливи с константи), булевите операции и ограничено квантифициране.

Резултатите от секция 1.1 в книгата [1] на Марченков показват, че класът на Δ_0-определимите релации съвпада с класа на ограничено аритметичните релации.

2.3 Йерархия на Гжегорчик

В тази секция ще дефинираме класовете $\mathcal{E}^n$ на Гжегорчик и ще отбележим тяхните най-важни свойства. Оригиналните дефиниции са в статията [10] на Гжегорчик, но ние ще следваме изложението в книгата [20] на Роуз.

Дефинираме редица $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ от функции индуктивно по следния начин

$$E_0(x, y) = x + y, \quad E_1(x) = x^2 + 2,$$

$$E_{n+1}(0) = 2, \quad E_{n+1}(x + 1) = E_n(E_{n+1}(x)) \text{ за } n > 0.$$

Дефиниция 2.3.1. Класът $\mathcal{E}^0$ е най-малкият клас от функции, който съдържа изходните функции и е затворен относно суперпозиция и ограничена примитивна рекурсия. Дефиницията на $\mathcal{E}^{n+1}$ за естествено число n е почти същата, само трябва да добавим E_0 и E_n към изходните функции.

Очевидно е, че всички класове $\mathcal{E}^n$ за $n \in \mathbb{N}$ са нормални.

Фокусът в дисертацията е най-вече върху класовете $\mathcal{E}^n$ за $n \geq 2$. Работата с $\mathcal{E}^0$ и $\mathcal{E}^1$ е доста по-трудна от гледна точка на изчислимия анализ, тъй като те дори не съдържат функцията умножение, както ще видим след малко. Като цяло с ниските класове в йерархията на Гжегорчик са свързани много отворени проблеми, част от които ще споменем по-нататък.

Класът $\mathcal{E}^3$ е още известен като класа на *елементарните по Калмар* функции и за него има голям брой други еквивалентни дефиниции.

Сега ще изброим някои от най-важните свойства на йерархията на Гжегорчик. Йерархията е строго растяща, т.е.

$$\mathcal{E}^0 \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^2 \subset \ldots \subset \mathcal{E}^n \subset \ldots,$$

и нейното обединение $\bigcup_n \mathcal{E}^n$ съвпада с класа $\mathcal{PR}$ на всички примитивно рекурсивни функции. Да напомним, че $\mathcal{PR}$ е най-малкият клас от функции, който съдържа изходните функции и е затворен относно суперпозиция и примитивна рекурсия.

Следващата лема ще бъде важна по-нататък. Доказателство може да се намери в [20].

Лема 2.3.2. Ако $n \geq 2$, g и h са функции от $\mathcal{E}^n$ и f е примитивната рекурсия g и h, то $f \in \mathcal{E}^{n+1}$.

Всъщност лемата е вярна и при $n = 0$, но не е вярна при $n = 1$. Например $\lambda x.2x \in \mathcal{E}^1$, но $\lambda x.2^x \notin \mathcal{E}^2$.

Обичайният начин да докажем, че една функция не принадлежи на някой от класовете $\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^1$ или $\mathcal{E}^2$ е да изследваме темпа на растене на функцията и да използваме следната теорема, която се доказва лесно с индукция по f:

Теорема 2.3.3. За всяка функция $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ от класа $\mathcal{E}^0$ съществуват естествени числа $i \in \{1, \ldots, n\}$ и k, такива че

$$f(\vec{x}) \leq x_i + k \tag{2.3.1}$$

за всички $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$. За всяка функция $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ от класа $\mathcal{E}^1$ съществуват естествени числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, такива че

$$f(\vec{x}) \leq a_0 + a_1.x_1 + \ldots + a_n.x_n \tag{2.3.2}$$

за всички $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$. За всяка функция $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ от класа $\mathcal{E}^2$ съществува полином p с естествени коефициенти на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такъв че

$$f(\vec{x}) \le p(\vec{x}) \tag{2.3.3}$$

за всички $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$.

Например функцията събиране принадлежи на $\mathcal{E}^1$ по дефиниция, но не принадлежи на $\mathcal{E}^0$, тъй като не изпълнява (2.3.1).

Функцията умножение принадлежи на $\mathcal{E}^2$, тъй като се изразява с ограничена примитивна рекурсия по следния начин:

$$x.0 = 0, \;\; x.(y+1) = x.y+x = E_0(x.y, x), \;\; x.y \le (x+y)^2+2 = E_1(E_0(x, y)).$$

Но тя не принадлежи на $\mathcal{E}^1$, тъй като не изпълнява (2.3.2).

Функциите степенуване $\lambda x.2^x$ и по-общо $\lambda xy.x^y$ принадлежат на $\mathcal{E}^3$, тъй като

$$2^0 = 1, \;\; 2^{x+1} = 2.2^x, \;\; 2^x \le E_2(x)$$

и

$$x^0 = 1, \;\; x^{y+1} = x^y.x, \;\; x^y \le 2^{xy}.$$

Но те не са в $\mathcal{E}^2$, тъй като не изпълняват (2.3.3).

Лема 2.3.4. Следните функции са в класа $\mathcal{E}^0$:

1. функцията предшественик $\lambda x.x \dot{-} 1$;
2. отсечената разлика $\lambda xy.x \dot{-} y$;
3. функцията $\min$ на произволен брой аргументи;
4. функциите sg и $\overline{\mathrm{sg}}$;
5. функциите σ и τ;
6. функцията $\lambda xyt.\min(x+y, t)$;
7. функцията $\lambda xyt.\min(x.y, t)$.

Доказателство. Използваме последователно следните равенства и неравенства и прилагаме факта, че класът $\mathcal{E}^0$ е затворен относно ограничена примитивна рекурсия.

$$0 \dot{-} 1 = 0, \;\; (x+1) \dot{-} 1 = x, \;\; x \dot{-} 1 \le x$$

$$x \dot{-} 0 = x, \;\; x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1, \;\; x \dot{-} y \le x$$

$$\min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$$

$$\min(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) = \min(\min(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1})$$

От последните две равенства с индукция по $m \geq 2$ получаваме, че $\min$ на произволен брой аргументи е в $\mathcal{E}^0$. По-нататък

$$\mathrm{sg}(0) = 0, \ \ \mathrm{sg}(x+1) = 1, \ \ \mathrm{sg}(x) \leq 1$$

$$\overline{\mathrm{sg}}(0) = 1, \ \ \overline{\mathrm{sg}}(x+1) = 0, \ \ \overline{\mathrm{sg}}(x) \leq 1$$

$$\sigma(x, 0) = x, \ \ \sigma(x, y+1) = 0, \ \ \sigma(x, y) \leq x$$

$$\tau(x, 0) = x, \ \ \tau(x, y+1) = S(x), \ \ \tau(x, y) \leq S(x)$$

$$\min(x+0, t) = \min(x, t), \ \ \min(x+S(y), t) = \min(\min(x+y, t)+1, t),$$

$$\min(x+y, t) \leq t$$

Тук използвахме, че бинарният $\min$ и S са в $\mathcal{E}^0$.

$$\min(x.0, t) = 0, \ \ \min(x.S(y), t) = \min(\min(x.y, t)+x, t), \ \ \min(x.y, t) \leq t$$

Използвахме, че константата 0 е в $\mathcal{E}^0$ и доказаното $\lambda xyt.\min(x+y, t) \in \mathcal{E}^0$.□

Подобно на събирането, функциите $\max$ и функцията разстояние принадлежат на $\mathcal{E}^1$, тъй като

$$\max(x, y) = x + (y \dot{-} x), \ \ |x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x),$$

но тези функции не са в $\mathcal{E}^0$, тъй като не удовлетворяват (2.3.1).

Като следствие от лема 2.3.4 получаваме, че предпоставките в лема 2.2.2 и лема 2.2.4 са изпълнени при $\mathcal{F} = \mathcal{E}^n$ за всяко n. По този начин за всяко n класът на $\mathcal{E}^n$-релациите съдържа аритметичните сравнения и е затворен относно булевите логически операции.

Също така от лема 2.2.6 класът $\mathcal{E}^n$ е затворен относно дефиниции чрез разглеждане на случаи. Тъй като функцията събиране е в $\mathcal{E}^n$ при $n \geq 1$ и не е в $\mathcal{E}^0$, от бележка 2.2.7 изискването за мажорираща функция отпада при $n \geq 1$ и трябва да се спазва само при $n = 0$. Например бинарната функция $\max$ може да се дефинира със случаи:

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{ако } x \geq y, \\ y & \text{ако } x < y. \end{cases}$$

В тази дефиниция участват само функции и релации от $\mathcal{E}^0$, но от нея не следва погрешното $\max \in \mathcal{E}^0$, тъй като $\max$ не се мажорира от функция в $\mathcal{E}^0$ (това следва лесно от (2.3.1)).

Лема 2.3.5. Нека k, n са естествени числа и $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ е функция от класа $\mathcal{E}^n$. Тогава функцията $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$, дефинирана с

$$g(y, \vec{x}, t) = \min(\sum_{z \le y} f(z, \vec{x}), t),$$

също принадлежи на класа $\mathcal{E}^n$.

Доказателство. Функцията g се изразява с ограничена примитивна рекурсия по следния начин

$$\begin{aligned}
g(0, \vec{x}, t) &= \min(f(0, \vec{x}), t) = a(\vec{x}, t),\\
g(y+1, \vec{x}, t) &= \min(\sum_{z \le y+1} f(z, \vec{x}), t) = \min(\sum_{z \le y} f(z, \vec{x}) + f(y+1, \vec{x}), t)\\
&= \min(g(y, \vec{x}, t) + f(y+1, \vec{x}), t) = h(y, \vec{x}, t, g(y, \vec{x}, t)),\\
g(y, \vec{x}, t) &\le t.
\end{aligned}$$

Функцията a е от $\mathcal{E}^n$, тъй като е суперпозиция на f и функции от $\mathcal{E}^0$. Функцията h е дефинирана с

$$h(y, \vec{x}, t, u) = \min(u + f(y+1, \vec{x}), t)$$

и следователно $h \in \mathcal{E}^n$, тъй като е суперпозиция на f и функции от $\mathcal{E}^0$. Тук използваме точка 6 от лема 2.3.4. □

Лема 2.3.6. За всички естествени числа n, k, ако $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ е функция от $\mathcal{E}^n$, то функцията $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, дефинирана с

$$g(y, \vec{x}) = \sum_{z \le y} (1 \dot{-} f(z, \vec{x})),$$

също принадлежи на класа $\mathcal{E}^n$.

Доказателство. Нека $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ е функция от $\mathcal{E}^n$. На първо време имаме, че функцията

$$\lambda z\vec{x}.1 \dot{-} f(z, \vec{x}) = \lambda z\vec{x}.\overline{\mathrm{sg}}(f(z, \vec{x}))$$

принадлежи на $\mathcal{E}^n$, тъй като е суперпозиция на f и $\overline{\mathrm{sg}} \in \mathcal{E}^0$. От предходната лема 2.3.5 получаваме, че функцията $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$, дефинирана с

$$h(y, \vec{x}, t) = \min(\sum_{z \le y} (1 \dot{-} f(z, \vec{x})), t),$$

принадлежи на $\mathcal{E}^n$. Но от очевидното неравенство

$$1 \dot{-} f(z, \vec{x}) \leq 1$$

получаваме

$$\sum_{z \leq y} \big(1 \dot{-} f(z, \vec{x})\big) \leq y + 1,$$

така че

$$g(y, \vec{x}) = \sum_{z \leq y} \big(1 \dot{-} f(z, \vec{x})\big) = h(y, \vec{x}, y + 1).$$

От тези равенства и от $h \in \mathcal{E}^n$ получаваме $g \in \mathcal{E}^n$. □

Лема 2.3.7. За всяко n класът $\mathcal{E}^n$ е затворен относно ограничена минимизация.

Доказателство. Използваме представянето от лема 2.1.9 и прилагаме два пъти лема 2.3.6. □

Като следствие получаваме, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{E}^n$ удовлетворява предпоставките в следствие 2.2.8 при произволен избор на унарна функция $A \in \mathcal{E}^n$. Действително при $n = 0$ от (2.3.1) получаваме, че A се мажорира от функция от вида $\lambda y.y + k \in \mathcal{E}^0$ и можем да вземем $b = \lambda y.y + k$. При $n \geq 1$ можем да вземем $b = \lambda y. \max(y, A(y)) \in \mathcal{E}^n$, тъй като $\max \in \mathcal{E}^1$. По този начин за всяко n, ако $A \in \mathcal{E}^n$, то класът $\mathcal{E}^n$ е затворен относно A-ограничена минимизация.

В частност всеки клас $\mathcal{E}^n$ е затворен относно $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$-ограничена минимизация и от лема 2.2.3 получаваме, че за всяко n класът на $\mathcal{E}^n$-релациите е затворен относно ограничено квантифициране.

Също така за всеки клас $\mathcal{E}^n$ е приложима лема 2.2.5 за графиката. Например от точки 6 и 7 в лема 2.3.4 получаваме, че графиките на събирането и на умножението са $\mathcal{E}^0$-релации. По този начин всяка ограничено-аритметична релация е $\mathcal{E}^0$-релация и следователно $\mathcal{E}^n$-релация за всяко n, т.е. всяка Δ_0-определима релация е $\mathcal{E}^n$-релация за всяко n.

Всички класове $\mathcal{E}^n$ са затворени относно ограничен максимум и минимум. Това се вижда от следните представяния:

$$\max_{t \leq y} h(t, \vec{x}) = h(\mu_{t \leq y} \forall u \leq y[h(u, \vec{x}) \leq h(t, \vec{x})], \vec{x}), \tag{2.3.4}$$

$$\min_{t \leq y} h(t, \vec{x}) = h(\mu_{t \leq y} \forall u \leq y[h(t, \vec{x}) \leq h(u, \vec{x})], \vec{x}). \tag{2.3.5}$$

Класовете $\mathcal{E}^n$ при $n \geq 2$ са затворени относно ограничено сумиране. Това се вижда от примитивната рекурсия

$$\sum_{z \leq 0} h(z, \vec{x}) = h(0, \vec{x}),$$

$$\sum_{z\leq y+1} h(z,\vec{x}) = \sum_{z\leq y} h(z,\vec{x}) + h(y+1,\vec{x})$$

и от неравенството

$$\sum_{z\leq y} h(z,\vec{x}) \leq (y+1). \max_{t\leq y} h(t,\vec{x}).$$

Класовете $\mathcal{E}^0$ и $\mathcal{E}^1$ не са затворени относно ограничено сумиране, например ограничената сума на проекцията I_2^2 е функцията $\lambda yx.(y+1).x$, която не принадлежи на $\mathcal{E}^1$.

В края на секцията ще покажем, че функцията частно и функцията остатък са в класа $\mathcal{E}^0$. Имаме

$$q = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \iff (y=0 \ \& \ q=0) \vee (y>0 \ \& \ \exists r \leq y(r<y \ \& \ x=q.y+r)),$$

$$r = \mathrm{rm}(x,y) \iff (y=0 \ \& \ r=x) \vee (y>0 \ \& \ \exists q \leq x(r<y \ \& \ x=q.y+r)).$$

От тези две еквивалентности и факта, че Δ_0-определимите релации са $\mathcal{E}^0$-релации получаваме, че графиките на частното и остатъкът са $\mathcal{E}^0$-релации. С приложение на лемата за графиката и равенствата

$$\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = \min(\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor, x), \quad \mathrm{rm}(x,y) = \min(\mathrm{rm}(x,y), x)$$

получаваме, че въпросните две функции са в $\mathcal{E}^0$.

2.4 Различни форми на рекурсия

Добре известен факт е, че някои по-сложни форми на рекурсия могат да се моделират с обикновена примитивна рекурсия с използване на кодиращи техники. Целта на тази секция е да проучим по-подробно доказателствата и по този начин да определим тяхната сложност по отношението на класовете на Гжегорчик. Изложението съвпада с това от секция 4 на статията [8] на автора, като оценките за сложност на някои от разглежданите функции са подобрени.

Ще се нуждаем от кодиране на крайните списъци от естествени числа. Използваме Канторовото кодиране на наредените двойки, което се дава с

$$\Pi(x,y) = \frac{1}{2}((x+y)^2 + 3x + y).$$

Имаме, че $\Pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ е биекция и от това следва, че съществуват единствени функции $L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $R : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такива че

$$\Pi(L(z), R(z)) = z, \quad L(\Pi(x,y)) = x, \quad R(\Pi(x,y)) = y$$

за всички естествени числа x, y, z. Очевидно е, че Π е строго растяща по отношение и на двата си аргумента. Също са очевидни неравенствата

$$x \leq \Pi(x, y) \text{ и } y \leq \Pi(x, y)$$

за $x, y \in \mathbb{N}$. По този начин

$$L(z) \leq z \text{ и } R(z) \leq z$$

за $z \in \mathbb{N}$. Ясно е, че $\Pi \in \mathcal{E}^2$. Всъщност това е най-добрата оценка, тъй като Π е полином от втора степен. Оказва се, че не съществува кодираща функция на наредените двойки в $\mathcal{E}^1$. По-нататък $L \in \mathcal{E}^0$ и $R \in \mathcal{E}^0$ поради равенствата

$$L(z) = \mu_{x \leq z}\big(\exists_{y \leq z}(z = \Pi(x, y))\big),$$
$$R(z) = \mu_{y \leq z}\big(\exists_{x \leq z}(z = \Pi(x, y))\big)$$

за всяко $z \in \mathbb{N}$. Тук използвахме, че $z = \Pi(x, y)$ задава Δ_0-определима релация на x, y, z и че $\mathcal{E}^0$ е затворен относно ограничена минимизация.

Сега ще разширим кодирането на наредените двойки до кодиране на наредените k-орки за произволно естествено число $k \geq 1$. Използваме нотацията $\langle x_0, x_1, \ldots, x_k \rangle$ за кода на наредената $(k+1)$-орка $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$. Дефиницията е индуктивна:

$$\langle x_0 \rangle = x_0, \quad \langle x_0, x_1, \ldots, x_k \rangle = \Pi(x_0, \langle x_1, \ldots, x_k \rangle), \quad k \geq 1.$$

Разбира се, функцията $\lambda x_0 x_1 \ldots x_k . \langle x_0, x_1, \ldots, x_k \rangle$ е биективна и принадлежи на $\mathcal{E}^2$ за всяко фиксирано $k \geq 0$.

Най-накрая кодираме непразните крайни списъци, като присвояваме числото

$$\langle n, \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \rangle$$

като код за списъка $x_0, x_1, \ldots, x_n$. *Дължината* на списъка е числото n (което е с едно по-малко от броя на елементите на списъка), *i-тият елемент* на списъка е x_i за $i \leq n$. Разбира се, всяко естествено число е код за единствен списък. Ще покажем, че съществуват унарна функция len и бинарна функция mem, и двете принадлежащи на $\mathcal{E}^0$, такива че за всички естествени числа s, ако s е кодът на списъка $x_0, x_1, \ldots, x_n$, то

$$len(s) = n, \quad mem(s, i) = x_i \text{ за } i \leq n.$$

Функцията len се дефинира лесно с

$$len(s) = L(s).$$

Функцията mem се дефинира малко по-трудно. Първо дефинираме $\widetilde{R} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ с

$$\widetilde{R}(0, s) = s, \quad \widetilde{R}(i + 1, s) = R(\widetilde{R}(i, s)).$$

Лесно е да се види, че $\widetilde{R}(i, s) \leq s$ с индукция по i. Имаме, че $\widetilde{R}$ се дефинира с ограничена примитивна рекурсия от функции в $\mathcal{E}^0$, така че $\widetilde{R} \in \mathcal{E}^0$. Сега функцията mem може да се дефинира със случаи

$$mem(s, i) = \begin{cases} L\big(\widetilde{R}(i + 1, s)\big) & \text{ако } i < len(s), \\ \widetilde{R}(i + 1, s) & \text{ако } i = len(s), \\ 0 & \text{ако } i > len(s). \end{cases}$$

Тъй като това е дефиниция със случаи в $\mathcal{E}^0$, трябва да покажем мажорираща функция, но това е лесно, тъй като $mem(s, i) \leq s$.

По-нататък ще се нуждаем от някои функции, които позволяват по-лесно да се работи със списъците. Първата функция $head : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ връща първия елемент на списък, така че тя може да се дефинира с

$$head(s) = mem(s, 0).$$

Втората функция $tail : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ връща кода на списък, който се получава с изпускане на първия елемент (по даден код на списък с ненулева дължина):

$$tail(s) = \begin{cases} 0 & \text{ако } len(s) = 0, \\ \langle len(s) \dot{-} 1, R(R(s)) \rangle & \text{ако } len(s) > 0. \end{cases}$$

Ясно е, че $head \in \mathcal{E}^0$. Също така $s \neq 0 \Longrightarrow tail(s) < s$, така че $tail(s) \leq s$ за всяко $s \in \mathbb{N}$. Следователно $tail \in \mathcal{E}^0$.

Първата форма на рекурсия, която ще разгледаме е примитивна рекурсия, която разчита на фиксиран брой предходни значения. Ще разгледаме две предходни значения. Обобщението към повече от две предходни значения е непосредствено.

Теорема 2.4.1. Нека $k \in \mathbb{N}$ и нека $g_0 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, g_1 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, h : \mathbb{N}^{k+3} \to \mathbb{N}$ са функции. Нека $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ е дефинирана чрез равенствата

$$f(0, \vec{x}) = g_0(\vec{x}), \quad f(1, \vec{x}) = g_1(\vec{x}),$$

$$f(y + 2, \vec{x}) = h(y, \vec{x}, f(y + 1, \vec{x}), f(y, \vec{x})).$$

Ако $g_0, g_1, h \in \mathcal{E}^n$ за $n \geq 2$, то $f \in \mathcal{E}^{n+1}$. При това, ако f се мажорира от $b \in \mathcal{E}^n$, то $f \in \mathcal{E}^n$.

Доказателство. Разглеждаме функцията $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, дефинирана с

$$F(y, \vec{x}) = \Pi(f(y+1, \vec{x}), f(y, \vec{x})).$$

Тази функция може да се получи с примитивна рекурсия от функции в $\mathcal{E}^n$ поради следните равенства

$$\begin{aligned}
&F(0, \vec{x}) = \Pi(f(1, \vec{x}), f(0, \vec{x})) = \Pi(g_1(\vec{x}), g_0(\vec{x})),\\
&F(y+1, \vec{x}) = \Pi(f(y+2, \vec{x}), f(y+1, \vec{x}))\\
&= \Pi(h(y, \vec{x}, f(y+1, \vec{x}), f(y, \vec{x})), f(y+1, \vec{x}))\\
&= \Pi(h(y, \vec{x}, L(F(y, \vec{x})), R(F(y, \vec{x}))), L(F(y, \vec{x}))).
\end{aligned}$$

Следователно $F \in \mathcal{E}^{n+1}$ от лема 2.3.2. Също така, ако $b \in \mathcal{E}^n$ и $f(y, \vec{x}) \leq b(y, \vec{x})$ за всички $y, \vec{x}$, то

$$F(y, \vec{x}) \leq \Pi(b(y+1, \vec{x}), b(y, \vec{x})),$$

така че последната примитивна рекурсия е ограничена и $F \in \mathcal{E}^n$. Теоремата следва, тъй като

$$f(y, \vec{x}) = R(F(y, \vec{x})). \qquad \square$$

Когато дефинираме мажориращи функции, ще се нуждаем от функцията $f_L : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, зададена с равенството

$$f_L(n, z) = \underbrace{\langle z, z, \ldots, z \rangle}_{n+1 \text{ пъти}}.$$

Имаме

$$f_L(0, z) = \langle z \rangle = z, \quad f_L(n+1, z) = \langle z, f_L(n, z) \rangle.$$

Тъй като f_L е примитивна рекурсия на функции в $\mathcal{E}^2$, то имаме $f_L \in \mathcal{E}^3$ от лема 2.3.2. Освен това $f_L \notin \mathcal{E}^2$, тъй като лесна индукция показва, че $f_L(n, z)$ е полином на z от степен 2^n, така че f_L не може да се мажорира от полином (т.е. не удовлетворява (2.3.3)).

За всяка $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ дефинираме $H_f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ - *историята* на f по следния начин:

$$H_f(y, \vec{x}) = \langle f(y, \vec{x}), f(y \dot{-} 1, \vec{x}), \ldots, f(0, \vec{x}) \rangle.$$

Лема 2.4.2. Нека $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ е функция. Ако $n \geq 3$ и $f \in \mathcal{E}^n$, то $H_f \in \mathcal{E}^n$.

Доказателство. Резултатът следва от равенствата

$$H_f(0,\vec{x}) = \langle f(0,\vec{x})\rangle = f(0,\vec{x}),$$
$$H_f(y+1,\vec{x}) = \langle f(y+1,\vec{x}), H_f(y,\vec{x})\rangle$$

и неравенството

$$H_f(y,\vec{x}) \le \langle \max_{t\le y} f(t,\vec{x}),\dots,\max_{t\le y} f(t,\vec{x})\rangle = f_L(y,\max_{t\le y} f(t,\vec{x})).$$

Тук използваме, че $\mathcal{E}^n$ е затворен относно ограничен максимум. □

Лемата не е вярна за $n = 2$. Например f_L е историята на проекция и всички проекции попадат в $\mathcal{E}^2$, но $f_L \notin \mathcal{E}^2$. Ако $f \in \mathcal{E}^2$, то $H_f \in \mathcal{E}^3$ в общия случай.

Следствие 2.4.3. Функцията $append : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, такава че $append(s,x)$ е кодът на списък, получен с добавяне на x като последен елемент към списъка с код s, принадлежи на $\mathcal{E}^3$.

Доказателство. Нека функцията $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ е дефинирана с

$$g(0,s,x) = x, \quad g(i,s,x) = mem(s,(len(s)+1) \dot{-} i) \text{ за } i > 0.$$

Тогава $g \in \mathcal{E}^2$ и $append(s,x) = \langle len(s)+1, H_g(len(s)+1,s,x)\rangle$, така че $append \in \mathcal{E}^3$. □

Следствие 2.4.4. Функцията $reverse : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такава че $reverse(s)$ е кодът на списъка, получен с обръщане на реда на елементите на списъка с код s, принадлежи на $\mathcal{E}^3$.

Доказателство. Нека функцията $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ е дефинирана с

$$g(i,s) = mem(s,i).$$

Тогава $g \in \mathcal{E}^2$ и $reverse(s) = \langle len(s), H_g(len(s),s)\rangle$, така че $reverse \in \mathcal{E}^3$. □

Следващата форма на рекурсия е възвратната рекурсия. В дефиницията по-долу $f(y+1,\vec{x})$ може да зависи от всички предходни значения $f(0,\vec{x}), f(1,\vec{x}),\dots,f(y,\vec{x})$.

Теорема 2.4.5. Нека $k \in \mathbb{N}$ и $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ са функции. Нека $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ е дефинирана чрез равенствата

$$f(0,\vec{x}) = g(\vec{x}),$$
$$f(y+1,\vec{x}) = h(y,\vec{x},H_f(y,\vec{x})).$$

Ако $g,h \in \mathcal{E}^n$ за $n \ge 2$, то $f \in \mathcal{E}^{n+1}$. Ако $g,h \in \mathcal{E}^n$ за $n \ge 3$ и f се мажорира от $b \in \mathcal{E}^n$, то $f \in \mathcal{E}^n$.

Доказателство. Разглеждаме историята H_f на f. Имаме

$$H_f(0, \vec{x}) = \langle f(0, \vec{x}) \rangle = g(\vec{x}),$$

$$\begin{aligned} H_f(y+1, \vec{x}) &= \langle f(y+1, \vec{x}), H_f(y, \vec{x}) \rangle \\ &= \langle h(y, \vec{x}, H_f(y, \vec{x})), H_f(y, \vec{x}) \rangle. \end{aligned}$$

Сега ако $n \geq 2$ и $g, h \in \mathcal{E}^n$, то $H_f \in \mathcal{E}^{n+1}$. Също, ако $n \geq 3,\ g, h \in \mathcal{E}^n$ и f се мажорира от $b \in \mathcal{E}^n$, то

$$H_f(y, \vec{x}) \leq f_L(y, \max_{t \leq y} b(t, \vec{x})),$$

така че примитивната рекурсия е ограничена и следователно $H_f \in \mathcal{E}^n$. Теоремата следва, тъй като

$$f(y, \vec{x}) = mem(H_f(y, \vec{x}), 0). \qquad \square$$

Друга форма на рекурсия, от която имаме нужда, е определен вид рекурсия със заместване в параметрите.

Теорема 2.4.6. Нека $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, h : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}, p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, q : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ са функции. Нека f е дефинирана с равенствата

$$f(0, x) = g(x),$$

$$f(y+1, x) = h(y, x, f(y, p(y, x)), f(y, q(y, x))).$$

Ако $n \geq 2, p, q \in \mathcal{E}^n, f$ се мажорира от $b \in \mathcal{E}^{n+1}$ и $g, h \in \mathcal{E}^{n+1}$, то $f \in \mathcal{E}^{n+1}$.

Доказателство. С аритметизация на дървото на изчислението. Например това дърво за изчислението на $f(y, x)$ при $y = 2$ е

$$\begin{array}{cccc} & f(2,x) & & \\ \swarrow & & \searrow & \\ f(1,p(1,x)) & & f(1,q(1,x)) & \\ \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & \\ f(0,p(0,p(1,x))) \quad f(0,q(0,p(1,x))) & & f(0,p(0,q(1,x))) \quad f(0,q(0,q(1,x))) & \end{array}$$

Изчислението ще се осъществи отдолу нагоре. Номерираме нивата на дървото последователно, започвайки от ниво 0 за листата до ниво y за корена. На всяко ниво $l \leq y$ има точно 2^{y-l} върхове, които номерираме последователно отляво надясно, като започваме с 0 за най-левия връх до $2^{y-l} - 1$ за най-десния връх. На всяко ниво $l < y$ параметрите на върховете имат вида

$$s_0(l, s_1(l+1, \ldots, s_{y-l-1}(y-1, x) \ldots)),$$

където s_i е p или q. Всъщност не е трудно да се види, че на всяко ниво $l < y$, ако номерът на върха е

$$c = c_{y-l-1}c_{y-l-2}\dots c_0,$$

записан в двоичен вид, то

$$s_i = p, \text{ ако } c_i = 0 \text{ и } s_i = q, \text{ ако } c_i = 1.$$

Следователно ще се нуждаем от функция, която дава двоичните цифри на естествено число. Нека $bd' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ и $bd : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ са дефинирани с

$$bd'(0,c) = c, \quad bd'(k+1,c) = \left\lfloor \frac{bd'(k,c)}{2} \right\rfloor,$$

$$bd(k,c) = \mathrm{rm}(bd'(k,c),2).$$

Разбира се, bd' е дефинирана с ограничена примитивна рекурсия в $\mathcal{E}^0$, тъй като имаме $bd'(k,c) \leq c$ за всички k и c. Следователно $bd' \in \mathcal{E}^0$ и $bd \in \mathcal{E}^0$. За всяко k и c имаме, че $bd(k,c)$ е k-тата двоична цифра на c, започвайки от нулевата отдясно наляво.

Използвайки тези наблюдения, дефинираме функция $Lev : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, която кодира нужната информация за изчислението на параметрите. По-точно за всички l, y и c, ако един връх на ниво $l < y$ има номер c, то $Lev(l,y,c)$ е кодът на списъка

$$\langle l, c_0\rangle, \langle l+1, c_1\rangle, \dots, \langle y-1, c_{y-l-1}\rangle.$$

Дефинираме Lev с ограничена примитивна рекурсия в $\mathcal{E}^3$ както следва

$$Lev(l,0,c) = 0,$$

$$Lev(l,y+1,c) = \begin{cases} 0 & \text{ако } l > y, \\ \langle 0, \langle y, bd(0,c)\rangle\rangle & \text{ако } l = y, \\ append(Lev(l,y,c), \langle y, bd(y \dot{-} l, c)\rangle) & \text{ако } l < y. \end{cases}$$

За $l < y$ и всички c имаме

$$\begin{aligned} Lev(l,y,c) &\leq \langle (y \dot{-} l) \dot{-} 1, \underbrace{\langle\langle y \dot{-} 1, 1\rangle, \dots, \langle y \dot{-} 1, 1\rangle\rangle}_{y-l \text{ пъти}}\rangle \\ &= \langle (y \dot{-} l) \dot{-} 1, f_L((y \dot{-} l) \dot{-} 1, \langle y \dot{-} 1, 1\rangle)\rangle. \end{aligned}$$

Неравенството

$$Lev(l,y,c) \leq \langle (y \dot{-} l) \dot{-} 1, f_L((y \dot{-} l) \dot{-} 1, \langle y \dot{-} 1, 1\rangle)\rangle$$

също е вярно за $l \geq y$ и всички c, тъй като $Lev(l, y, c) = 0$ в този случай. По този начин $Lev \in \mathcal{E}^3$.

По-нататък дефинираме функцията $Eval : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, която осъществява изчислението на параметрите. За всички s и x, ако s е кодът на списъка

$$\langle y_0, b_0 \rangle, \ldots, \langle y_k, b_k \rangle$$

и $b_0, \ldots, b_k \in \{0, 1\}$, то

$$Eval(s, x) = s_0(y_0, s_1(y_1, \ldots, s_k(y_k, x) \ldots)),$$

където $s_i = p$, ако $b_i = 0$ и $s_i = q$, ако $b_i = 1$. Можем да дефинираме $Eval$ с

$$Eval(s,x) = \begin{cases} p(L(head(s)), x) & \text{ако } len(s) = 0 \text{ и } R(head(s)) = 0, \\ q(L(head(s)), x) & \text{ако } len(s) = 0 \text{ и } R(head(s)) = 1, \\ p(L(head(s)), Eval(tail(s), x)) & \text{ако } len(s) > 0 \text{ и } R(head(s)) = 0, \\ q(L(head(s)), Eval(tail(s), x)) & \text{ако } len(s) > 0 \text{ и } R(head(s)) = 1, \\ 0 & \text{ако } R(head(s)) > 1. \end{cases}$$

По този начин $Eval$ е получена с възвратна рекурсия в $\mathcal{E}^n$ за $n \geq 2$ и теорема 2.4.5 дава $Eval \in \mathcal{E}^{n+1}$. Причината, че сложността на $Eval$ се повишава с едно ниво е, че нейната дефиниция съдържа итерация на p и q.

Най-важната функция, която ще използваме, е $level : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$. За естествени числа $y, l < y$ и x, $level(l, y, x)$ дава кода на списъка от значенията на върховете на ниво l в дървото на изчислението.

За ниво 0 се нуждаем от функцията $vleaf : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, дефинирана с

$$vleaf(c, y, x) = g\big(Eval(Lev(0, y, c), x)\big),$$

която дава значението на листото с номер c на ниво 0. Разбира се, $vleaf \in \mathcal{E}^{n+1}$ и имаме

$$level(0, y, x) = reverse(\langle 2^y \dot{-} 1, H_{vleaf}(2^y \dot{-} 1, y, x) \rangle). \tag{2.4.1}$$

Да предположим, че сме изчислили $level(l, y, x)$. Тогава на ниво $l+1$ върхът с номер c има значение

$$h\big(l, Eval(Lev(l+1, y, c), x), mem(level(l, y, x), 2c), mem(level(l, y, x), 2c+1)\big).$$

Следователно, ако дефинираме $t : \mathbb{N}^5 \to \mathbb{N}$ с

$$t(c, l, y, x, z) = h\big(l, Eval(Lev(l+1, y, c), x), mem(z, 2c), mem(z, 2c+1)\big)$$

и $t' : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ с

$$t'(l, y, x, z) = reverse(\langle 2^{y \dot{-} (l+1)} \dot{-} 1, H_t(2^{y \dot{-} (l+1)} \dot{-} 1, l, y, x, z)\rangle),$$

то $t \in \mathcal{E}^{n+1}$, $t' \in \mathcal{E}^{n+1}$ и имаме

$$level(l+1, y, x) = \begin{cases} t'(l, y, x, level(l, y, x)) & \text{ако } l+1 < y, \\ 0 & \text{ако } l+1 \geq y. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

Равенствата (2.4.1) и (2.4.2) показват, че $level$ е примитивната рекурсия на функции в $\mathcal{E}^{n+1}$. Нашата следваща цел е да покажем, че тази примитивна рекурсия е ограничена. Ще използваме дадената мажорираща функция $b \in \mathcal{E}^{n+1}$ за f. Без ограничение на общността b е растяща по двата си аргумента, тъй като можем да вземем ограничен максимум (или сума). Да изберем растяща по двата си аргумента функция $r : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, r \in \mathcal{E}^n$, която мажорира p и q (тя може да се дефинира лесно чрез сума и ограничен максимум). Идеята е да произведем горна граница за параметрите на всяко ниво $l < y$.

Да дефинираме $V' : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ чрез

$$V'(z, y, x) = \underbrace{r(y, r(y, \ldots, r(y, x) \ldots))}_{z \text{ пъти}}.$$

Формално имаме

$$V'(0, y, x) = x, \quad V'(z+1, y, x) = r(y, V'(z, y, x)),$$

така че V' е примитивната рекурсия на функции в $\mathcal{E}^n$ и следователно $V' \in \mathcal{E}^{n+1}$. Не е трудно да се види, че на всяко ниво $l < y$

$$V(l, y, x) = V'(y \dot{-} l, y, x)$$

е горна граница за параметрите на това ниво и следователно значението на всеки връх на ниво l е по-малко или равно на

$$U(l, y, x) = b(l, V(l, y, x)).$$

Разбира се, $V \in \mathcal{E}^{n+1}, U \in \mathcal{E}^{n+1}$ и оттук следва, че за всички y, l и x

$$level(l, y, x) \leq \langle 2^{y \dot{-} l} \dot{-} 1, f_L(2^{y \dot{-} l} \dot{-} 1, U(l, y, x))\rangle,$$

което дава необходимата мажорираща функция за $level$ в $\mathcal{E}^{n+1}$.

Накрая използваме равенството

$$f(y,x) = \begin{cases} g(x) & \text{ако } y = 0, \\ h(y \dot{-} 1, x, mem(level(y \dot{-} 1, y, x), 0), mem(level(y \dot{-} 1, y, x), 1)) & \text{ако } y > 0, \end{cases}$$

за да заключим, че $f \in \mathcal{E}^{n+1}$. □

Последната форма на рекурсия, която ще използваме, е определен вид едновременна рекурсия.

Теорема 2.4.7. Нека c_0, c_1, d_0, d_1 са естествени числа и $h_1 : \mathbb{N}^5 \to \mathbb{N}, h_2 : \mathbb{N}^5 \to \mathbb{N}$ са функции. Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ са дефинирани с равенствата

$$\begin{aligned} f(0) &= c_0, \quad f(1) = c_1, \\ g(0) &= d_0, \quad g(1) = d_1, \\ f(y+2) &= h_1(y, f(y+1), g(y+1), f(y), g(y)), \\ g(y+2) &= h_2(y, f(y+1), g(y+1), f(y), g(y)). \end{aligned}$$

Ако $h_1, h_2 \in \mathcal{E}^n$ за $n \geq 2$, то $f, g \in \mathcal{E}^{n+1}$. При това, ако f се мажорира от $b_1 \in \mathcal{E}^n$ и g се мажорира от $b_2 \in \mathcal{E}^n$, то $f, g \in \mathcal{E}^n$.

Доказателство. Да дефинираме помощна функция $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ чрез

$$p(y) = \Pi(f(y), g(y)).$$

Тогава имаме следните равенства

$$\begin{aligned} p(0) &= \Pi(c_0, d_0), \quad p(1) = \Pi(c_1, d_1), \\ p(y+2) &= \Pi(f(y+2), g(y+2)) \\ &= \Pi(h_1(y, f(y+1), g(y+1), f(y), g(y)), \\ &\qquad\qquad h_2(y, f(y+1), g(y+1), f(y), g(y))) \\ &= \Pi(h_1(y, L(p(y+1)), R(p(y+1)), L(p(y)), R(p(y))), \\ &\qquad\qquad h_2(y, L(p(y+1)), R(p(y+1)), L(p(y)), R(p(y)))). \end{aligned}$$

Ако $h_1, h_2 \in \mathcal{E}^n$ за $n \geq 2$, то от теорема 2.4.1 имаме $p \in \mathcal{E}^{n+1}$. Също така, ако f се мажорира от $b_1 \in \mathcal{E}^n$ и g се мажорира от $b_2 \in \mathcal{E}^n$, то

$$p(y) = \Pi(f(y), g(y)) \leq \Pi(b_1(y), b_2(y)).$$

Следователно p се мажорира от функция в $\mathcal{E}^n$ и $p \in \mathcal{E}^n$. Резултатът следва, тъй като

$$f(y) = L(p(y)) \text{ и } g(y) = R(p(y)).$$ □

2.5 Класът $\mathcal{L}^2$

Известен факт е, че класът $\mathcal{E}^3$ на елементарните по Калмар функции може да се дефинира като най-малкият клас от функции, който съдържа изходните функции и отсечената разлика и е затворен относно суперпозиция, ограничена сума и ограничено произведение. Какъв клас ще получим, ако изпуснем ограничените произведения?

Дефиниция 2.5.1. Класът $\mathcal{L}^2$ на *ниско елементарните функции* е най-малкият клас от функции, който съдържа изходните функции и отсечената разлика и е затворен относно суперпозиция и ограничена сума.

Този клас се появява за пръв път в работата на Сколем [22], в която той показва, че всяко рекурсивно номеруемо множество може да се номерира с ниско елементарна функция.

Очевидно е, че $\mathcal{L}^2$ е нормален клас от функции.

Функциите сума и произведение са ниско елементарни, както се вижда с последователно приложение на равенствата

$$x.(y+1) = \sum_{z \le y} I_2^2(z,x),$$
$$x.y = x.(y+1) \dot{-} x,$$
$$x + y = (x+1).(y+1) \dot{-} (x.y+1).$$

Така всички полиноми с естествени коефициенти са ниско елементарни. Също така, всяка ниско елементарна функция е ограничена от полином. Това може да се покаже с индукция, като се използва елементарният факт, че $\sum_{z \le y} z^n$ се мажорира от полином на y от степен $n+1$.

Тъй като $\mathcal{E}^2$ е затворен относно ограничено сумиране, $\mathcal{L}^2 \subseteq \mathcal{E}^2$. Отворен проблем е дали всъщност имаме равенство (еквивалентно, дали $\mathcal{L}^2$ е затворен относно ограничена примитивна рекурсия).

Лесно се вижда, че функциите $\overline{\mathrm{sg}}, \mathrm{sg}, \sigma, \tau$ са ниско елементарни. Същото важи за функциите минимум, максимум и разстояние, тъй като

$$\min(x,y) = x \dot{-} (x \dot{-} y), \quad \max(x,y) = x + (y \dot{-} x),$$

$$|x-y| = \max(x,y) \dot{-} \min(x,y).$$

От лема 2.1.9 получаваме, че $\mathcal{L}^2$ е затворен относно ограничена минимизация.

$\mathcal{L}^2$-релациите ще наричаме *ниско елементарни релации*. От лема 2.2.2 и лема 2.2.4 получаваме, че аритметичните сравнения са ниско елементарни и че класът на ниско елементарните релации е затворен относно булевите операции.

По-нататък от лема 2.2.6 виждаме, че $\mathcal{L}^2$ е затворен относно дефиниции със случаи и от следствие 2.2.8 и от факта, че бинарният $\max$ е ниско елементарна функция получаваме, че $\mathcal{L}^2$ е затворен относно A-ограничена минимизация за всяка унарна $A \in \mathcal{L}^2$. В частност $\mathcal{L}^2$ е затворен относно $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$-ограничена минимизация. Така от лема 2.2.3 ниско елементарните релации са затворени относно ограничено квантифициране и $\mathcal{L}^2$ изпълнява предпоставките в лема 2.2.5 за графиката. Лесно се съобразява, че всяка Δ_0-определима релация е ниско елементарна.

Също така от представянията (2.3.4) и (2.3.5) получаваме, че $\mathcal{L}^2$ е затворен относно ограничен максимум и ограничен минимум.

Функцията частно и функцията остатък също са ниско елементарни, тъй като

$$\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = \mu_{q \leq x}[q.y \leq x \leq (q+1).y], \quad \mathrm{rm}(x,y) = x \dot{-} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor .y.$$

По-нетривиален е фактът, че функцията $\lambda n.p_n$, такава че p_n е $(n+1)$-то просто число,

$$p_0 = 2,\ p_1 = 3,\ p_2 = 5, \ldots$$

е ниско елементарна. Доказателство може да се намери в [22].

2.6 Класът $\mathcal{M}^2$

Пръв Гжегорчик се доближава до дефиниция на $\mathcal{M}^2$, когато в [10] той поставя въпроса дали класът $\mathcal{E}^2$ може да се дефинира с използване на ограничена минимизация вместо ограничена примитивна рекурсия.

Дефиниция 2.6.1. Класът $\mathcal{M}^2$ е най-малкият клас от функции, който съдържа изходните функции, произведението и отсечената разлика и е затворен относно суперпозиция и ограничена минимизация.

Очевидно е, че $\mathcal{M}^2$ е нормален клас от функции.

С използване на равенствата от преходната секция получаваме, че събирането, максимумът, минимумът и разстоянието са функции от $\mathcal{M}^2$. Оттук лесно следва, че $\overline{\mathrm{sg}}, \mathrm{sg}, \sigma, \tau \in \mathcal{M}^2$. Дотук не сме използвали ограничена минимизация.

От лема 2.2.6 получаваме, че класът $\mathcal{M}^2$ е затворен относно дефиниции със случаи.

Като се използват лема 2.1.8 и следствие 2.2.8 се вижда, че в дефиницията на $\mathcal{M}^2$ можем да използваме A-ограничена минимизация за $A \in \mathcal{M}^2$

вместо ограничена минимизация. В литературата най-често се използват $A = O, A = \mathrm{id}_N, A = S$.

Вече е ясно, че $\mathcal{M}^2$ удовлетворява предпоставките в лема 2.2.5 за графиката.

От лема 2.2.2, лема 2.2.4 и лема 2.2.3 получаваме, че класът на $\mathcal{M}^2$-релациите съдържа аритметичните сравнения и е затворен относно булевите операции и ограничено квантифициране.

От представянията (2.3.4) и (2.3.5) получаваме, че $\mathcal{M}^2$ е затворен относно ограничен максимум и ограничен минимум.

Като използваме представянията от предходната секция, виждаме също, че частното и остатъкът са функции от $\mathcal{M}^2$.

Тъй като $\mathcal{L}^2$ е затворен относно ограничена минимизация, $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{L}^2$. Отворен проблем е дали има равенство между двата класа (еквивалентно, дали $\mathcal{M}^2$ е затворен относно ограничено сумиране). Като следствие, всяка функция в $\mathcal{M}^2$ е ограничена от полином.

Класът $\mathcal{M}^2$ изглежда като най-естествен субрекурсивен клас поради следната характеризация:

Теорема 2.6.2. Една функция f е от класа $\mathcal{M}^2$ тогава и само тогава, когато графиката на f е Δ_0-определима релация и f е ограничена от полином.

По този начин една релация R е $\mathcal{M}^2$-релация тогава и само тогава, когато R е Δ_0-определима.

В своята докторска дисертация [3] Бенет е доказал, че $z = x^y$ е Δ_0-определима релация на x, y, z.

Глава 3

ОТНОСИТЕЛНА ИЗЧИСЛИМОСТ НА РЕАЛНИ ЧИСЛА

3.1 Имена и съкратени имена на реални числа

Навсякъде $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ са съответно множеството на целите числа, на рационалните числа и на реалните числа. За нуждите на всички следващи глави се налага да разширим ламбда-нотацията, като позволим чрез нея да се описват и функции с дефиниционна област $\mathbb{N}^k$ за $k \in \mathbb{N}$, които приемат произволни реални стойности (а не само естествени, както беше достатъчно досега).

Едно реално число ξ е *изчислимо*, ако съществува ефективен метод, който генерира произволно близки рационални приближения на ξ. За нашите изследвания е необходимо да релативизираме това понятие, като ограничим общността на ефективните методи. По този начин ще оценяваме сложността на различни представяния на реалните числа.

Дефиниция 3.1.1. Наредената тройка (f, g, h) от унарни функции е *име* на реалното число ξ, ако за всяко $t \in \mathbb{N}$ е изпълнено

$$\left| \frac{f(t) - g(t)}{h(t) + 1} - \xi \right| < \frac{1}{t + 1}.$$

Още казваме, че (f, g, h) *именува* ξ.

Ясно е, че една наредена тройка от унарни функции е име на най-много едно реално число. От друга страна, всяко реално число притежава безброй много имена.

Дефиниция 3.1.2. Наредената двойка (f,h) от унарни функции е *съкратено име* на реалното число ξ, ако за всяко $t \in \mathbb{N}$ е изпълнено

$$\left|\frac{f(t)}{h(t)+1} - \xi\right| < \frac{1}{t+1}.$$

Нека (f,h) е съкратено име на ξ. Тогава ξ е границата на редицата $\lambda t.\dfrac{f(t)}{h(t)+1}$ и следователно ξ е неотрицателно. Разбира се, една наредена двойка от унарни функции е съкратено име на най-много едно неотрицателно реално число. Обратно, всяко неотрицателно реално число има безброй много съкратени имена.

Бележка 3.1.3. Нека ξ е неотрицателно реално число. Ако (f,g,h) е име на ξ, то (f',h) е съкратено име на ξ, където $f'(t) = |f(t)-g(t)|$. Ако (f,h) е съкратено име на ξ, то $(f, \lambda t.0, h)$ е име на ξ.

Действително за неотрицателно реално ξ имаме $|\xi| = \xi$ и следователно за всяко $t \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{|f(t)-g(t)|}{h(t)+1} - \xi\right| = \left|\frac{|f(t)-g(t)|}{h(t)+1} - |\xi|\right| \le \left|\frac{f(t)-g(t)}{h(t)+1} - \xi\right| < \frac{1}{t+1}.$$

Всъщност всяко име на ξ, както и всяко съкратено име на ξ, определя безкрайна редица от рационални числа, която има граница ξ. Затова ще казваме, че имената и съкратените имена определят представяне на ξ с помощта на редици на Коши.

От едно естествено число n може да се получи ефективно негово име и съкратено име. Наистина, за $n \in \mathbb{N}$, наредената тройка $(\lambda t.n, \lambda t.0, \lambda t.0)$ е име на n, а наредената двойка $(\lambda t.n, \lambda t.0)$ е съкратено име на n. Обратно, нека (f,g,h) е име на $n \in \mathbb{N}$. Тогава е изпълнено неравенството

$$\left|\frac{f(1)-g(1)}{h(1)+1} - n\right| < \frac{1}{2},$$

което влече

$$\left|\frac{|f(1)-g(1)|}{h(1)+1} - n\right| < \frac{1}{2}.$$

По този начин n е най-близкото цяло число до $\dfrac{|f(1)-g(1)|}{h(1)+1}$, така че

$$n = \left\lfloor \frac{|f(1)-g(1)|}{h(1)+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

По аналогичен начин можем да получим естественото число n от кое да е съкратено име на n.

Следващата бележка показва, че от име на реално число можем ефективно да получим горна граница за неговата абсолютна стойност.

Бележка 3.1.4. За произволно $\xi \in \mathbb{R}$ и име (f, g, h) на ξ е изпълнено

$$|\xi| < |f(0) - g(0)| + 1.$$

Действително от дефиниция 3.1.1 при $t = 0$ получаваме

$$\left| \frac{f(0) - g(0)}{h(0) + 1} - \xi \right| < 1,$$

така че

$$|\xi| < \left| \frac{f(0) - g(0)}{h(0) + 1} \right| + 1 \leq |f(0) - g(0)| + 1.$$

Следва дефиницията за относителна изчислимост, която се базира на въведената система от имена за реалните числа.

Дефиниция 3.1.5. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции. Казваме, че реалното число ξ е *$\mathcal{F}$-изчислимо*, ако съществува име (f, g, h) на ξ, което се състои от функции от $\mathcal{F}$, т.е. принадлежащо на $\mathcal{F}^3$.

Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции, който съдържа функцията разстояние и унарната константа 0 и е затворен относно суперпозиция. От бележка 3.1.3 получаваме, че едно неотрицателно реално число ξ е $\mathcal{F}$-изчислимо т.с.т.к. ξ има съкратено име $(f, h) \in \mathcal{F}^2$.

Ще разгледаме някои примери.

Нека q е рационално число, $q = \dfrac{m}{n}$, където m и n са цели числа и $n > 0$. Ако $m > 0$, то $(\lambda t.m, \lambda t.0, \lambda t.n - 1)$ е име на q. Ако $m < 0$, то $(\lambda t.0, \lambda t. - m, \lambda t.n - 1)$ е име на q. Ако $m = 0$, то $(\lambda t.0, \lambda t.0, \lambda t.0)$ е име на q. При това положение, ако един клас $\mathcal{F}$ съдържа всички унарни константи, то всяко рационално число е $\mathcal{F}$-изчислимо. Обратно, ако $\mathcal{F}$ съдържа само унарни константи, то всяко $\mathcal{F}$-изчислимо реално число е рационално.

Нека $\mathcal{F}$ е класът на полиномите с естествени коефициенти. Тогава отново $\mathcal{F}$-изчислими са само рационалните числа. Причината е, че границата на сходяща редица, която се представя като частно на два полинома с естествени коефициенти, е рационално число (или 0 или частното на старшия коефициент на числителя и старшия коефициент на знаменателя). По този начин, два различни класа от функции могат да изчисляват едно и също множество от реални числа.

Разбира се, ако $\mathcal{F}$ е множеството от всички функции, то всяко реално число е $\mathcal{F}$-изчислимо. Както отбелязахме по-горе, всяко реално число има дори безброй много имена.

Фундаментален пример е когато $\mathcal{F}$ е множеството от всички рекурсивни (тотални и изчислими) функции. Тогава едно реално число е $\mathcal{F}$-изчислимо т.с.т.к. то е *рекурсивно*. Рекурсивните реални числа са формален аналог на изчислимите реални числа.

По-общо, ако $\mathcal{F}$ се състои само от рекурсивни функции, то всички $\mathcal{F}$-изчислими реални числа са рекурсивни.

Произходът на понятието за име на реално число, което се използва в дисертацията, е в статията [23] на Скордев. Всъщност в тази статия се използват имена, за които неравенството от дефиниция 3.1.1 е нестрого. Но е достатъчно класът $\mathcal{F}$ да съдържа функцията наследник и да е затворен относно суперпозиция, за да получим еквивалентни понятия за $\mathcal{F}$-изчислимост.

Скордев означава с $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ множеството на $\mathcal{F}$-изчислимите реални числа. Първият резултат в [23] описва достатъчни условия за класа от функции $\mathcal{F}$, при които $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ е подполе на $\mathbb{R}$, т.е. затворено относно четирите аритметични операции. Разбира се, както вече отбелязахме, ако $\mathcal{F}$ съдържа всички унарни константи, то $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Един клас от функции е *приемлив* (в смисъл на [23]), ако той съдържа изходните функции, функцията разстояние и умножението и е затворен относно суперпозиция. Разбира се, всеки приемлив клас от функции е нормален.

Теорема 3.1.6 (Скордев, [23])**.** За приемлив клас $\mathcal{F}$ множеството $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ е поле относно обичайните аритметични операции.

Добре известен факт е, че множеството на рекурсивните реални числа е реално-затворено поле, т.е. съдържа реалните корени на полиномите с рекурсивни коефициенти. В [23] Скордев си поставя за задача да намери условия за класа $\mathcal{F}$, при които полето $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ е реално-затворено. Отговор дава следната

Теорема 3.1.7 (Скордев, [23])**.** Нека $\mathcal{F}$ е приемлив клас, който е затворен относно $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$-ограничена минимизация. Тогава $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ е реално-затворено поле.

От Глава 1 знаем, че класовете $\mathcal{M}^2, \mathcal{L}^2$ и всички $\mathcal{E}^n$ при $n \geq 2$ са приемливи и са затворени относно $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$-ограничена минимизация. По този начин $\mathbb{R}_{\mathcal{M}^2}, \mathbb{R}_{\mathcal{L}^2}$ и $\mathbb{R}_{\mathcal{E}^n}$ при $n \geq 2$ са реално-затворени полета. Също така $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}_{\mathcal{M}^2}$ и следователно всички алгебрични реални числа са $\mathcal{M}^2$-изчислими.

3.2 Субрекурсивна изчислимост на реални константи

Интуитивно е ясно, че сложността на едно реално число ξ трябва да се измерва чрез сложността на най-простото представяне на ξ. В термините от предходната секция по дадено реално число ξ ние търсим възможно най-малък клас от функции $\mathcal{F}$, такъв че ξ е $\mathcal{F}$-изчислимо.

Първите стъпки в тази насока са от статията [25], където Скордев показва, че числата e, π, числото на Лиувил L и константата на Ойлер γ са $\mathcal{E}^2$-изчислими. По-нататък Вайерман уточнява доказателствата, като използва нетривиални резултати за Δ_0-определими функции, и получава, че e, L са $\mathcal{M}^2$-изчислими.

Но методите, които се използват в [25], не са достатъчно общи, за да обхванат и други константи. Поради тази причина Скордев разработва по-универсален метод в статията [26]. За да формулираме този метод се нуждаем от допълнителна дефиниция.

Дефиниция 3.2.1. За клас от функции $\mathcal{F}$ и $k \in \mathbb{N}$ частичната реалнозначна функция $\theta : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{N}^k$, е $\mathcal{F}$-*изчислима*, ако съществуват $(k+1)$-местни функции $f, g, h \in \mathcal{F}$, такива че за всички $\vec{s} \in D$ тройката $(\lambda t.f(t, \vec{s}), \lambda t.g(t, \vec{s}), \lambda t.h(t, \vec{s}))$ е име на $\theta(\vec{s})$.

Разбира се, ако $\mathcal{F}$ съдържа константните функции и е затворен относно суперпозиция, всички стойности на θ са $\mathcal{F}$-изчислими реални числа.

Следващата теорема е доказана в [26].

Теорема 3.2.2 (общ метод, Скордев, [26])**.** Нека $\mathcal{F}$ е нормален клас от функции, който съдържа отсечената разлика и е затворен относно ограничено сумиране. Нека $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е $\mathcal{F}$-изчислима реалнозначна функция. Нека редът $\sum_{s=0}^{\infty} \theta(s)$ е сходящ и α е неговата сума. Нека съществува унарна функция p от класа $\mathcal{F}$, такава че

$$\left| \sum_{s=k+1}^{\infty} \theta(s) \right| \leq \frac{1}{t+1}$$

за всички $t \in \mathbb{N}$ и $k = p(t)$. Тогава реалното число α също е $\mathcal{F}$-изчислимо.

Разбира се, $\mathcal{L}^2$ е най-малкият клас от функции, който удовлетворява условията в теоремата. Тези условия също се удовлетворяват от класовете $\mathcal{E}^n$ при $n \geq 2$. Но методът не е подходящ за $\mathcal{M}^2$, тъй като не се знае дали $\mathcal{M}^2$ е затворен относно ограничено сумиране (тази затвореност е еквивалентна на равенството $\mathcal{M}^2 = \mathcal{L}^2$).

Затова се налага модификация на общия метод и тя е направена в [7]. Съществениният нетривиален факт е, че класът $\mathcal{M}^2$ е затворен относно $\log$-ограничено сумиране, т.е. ако $k \in \mathbb{N}$ и $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ е функция от $\mathcal{M}^2$, то функцията $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, дефинирана с

$$g(y, \vec{x}) = \sum_{z \leq \log_2(y+1)} f(z, \vec{x}),$$

също принадлежи на класа $\mathcal{M}^2$. Доказателството по същество е направено от Парис, Уилки и Уудс в статията [17].

Теорема 3.2.3 (модифициран метод, Георгиев, [7])**.** Нека $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е $\mathcal{M}^2$-изчислима реалнозначна функция. Нека редът $\sum_{s=0}^{\infty} \theta(s)$ е сходящ и α е неговата сума. Нека съществува унарна функция p от класа $\mathcal{M}^2$, такава че

$$\left| \sum_{s > \log_2(k+1)} \theta(s) \right| \leq \frac{1}{t+1}$$

за всички $t \in \mathbb{N}$ и $k = p(t)$. Тогава реалното число α също е $\mathcal{M}^2$-изчислимо.

С помощта на общия метод и на модифицирания метод в [7] е доказана $\mathcal{L}^2$-изчислимост и $\mathcal{M}^2$-изчислимост на голям брой реални константи. Сред тях е числото π, което е $\mathcal{M}^2$-изчислимо, и константата на Ойлер γ, която е $\mathcal{L}^2$-изчислима.

В следващата глава ще докажем валидността на подобни методи за реални константи, които се представят чрез безкрайни произведения. За тази цел ще се наложи изследване на сложността на логаритмичната и на показателната реални функции.

3.3 Общи факти за верижни дроби

В тази секция разглеждаме някои основни факти за представянето на реалните числа чрез прости верижни дроби. Подробни доказателства могат да се намерят в книгата [13] на Хинчин.

Всяко реално число ξ се представя чрез *(проста) верижна дроб*,

$$\xi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}},$$

където $a_0 = \lfloor \xi \rfloor$ е цялата част на ξ и за $i \geq 1$, a_i е ненулево естествено число. Всички числители са единици (затова верижната дроб е проста). Числата a_i се наричат *коефициенти* на верижната дроб.

Верижната дроб е крайна точно когато ξ е рационално число. Всяко рационално число се представя чрез точно две крайни верижни дроби, едната с последен коефициент 1 и по-дълга с едно число от другата, чийто последен коефициент е различен от 1. При това двете верижни дроби съвпадат до предпоследния коефициент на по-късата дроб. Ето един пример, който загатва метода, чрез който се изчисляват тези верижни дроби:

$$\begin{aligned}\frac{173}{12} &= 14 + \frac{5}{12} = 14 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = 14 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{5}} \\ &= 14 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}} = 14 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} \\ &= 14 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}.\end{aligned}$$

Ирационалните числа имат единствена безкрайна верижна дроб и обратно, всяка безкрайна редица a, такава че $a_0 \in \mathbb{Z}$ и a_i е ненулево естествено число за $i \geq 1$ произвежда единствено ирационално число.

Популярни примери са верижните дроби на e и π:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}, \pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}.$$

Както се вижда, верижната дроб на e има прост вид (следващите коефициенти са $1, 6, 1, 1, 8, 1$ и т.н.), а във верижната дроб на π на пръв поглед не се забелязват закономерности.

Ще изброим някои основни факти за верижните дроби. От гледна точка на изложението е удобно да се ограничим до положителни ирационални реални числа ξ.

Нека $\xi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$ е верижната дроб на ξ (имаме, че $a_0, a_1, \ldots$ са естествени числа и $a_1, a_2, \ldots$ са положителни). По-точно това означава, че ξ съвпада с границата $\lim_{k\to\infty} b_k$, където

$$b_k = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

е рационално число, което наричаме *k-та приближена дроб* на ξ.

Разглеждаме две безкрайни редици p и q, дефинирани с

- $p_{-1} = 1, \quad p_0 = a_0, \quad p_{k+1} = a_{k+1}p_k + p_{k-1}, \quad k = 0, 1, \ldots$
- $q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1, \quad q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}, \quad k = 0, 1, \ldots$

Използваме индекси -1 само за да опростим дефиницията, формално p и q започват с p_0 и q_0, съответно.

Вярно е, че $b_k = \frac{p_k}{q_k}$ за всички естествени числа k. Всъщност тази безкрайна редица има следното поведение

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \ldots < \xi < \ldots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

Следващите неравенства дават индикация за скоростта на сходимост на верижната дроб

$$\frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)} < \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} \tag{3.3.1}$$

за всички естествени числа k. Друго полезно равенство, което може да се докаже с индукция, е

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$$

за всички k. Оттук следва, че

$$b_k = \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \ldots - \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_0}{q_0} + \frac{p_0}{q_0} = a_0 + \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{q_{s+1}q_s}$$

и като извършим граничен преход при $k \to \infty$ получаваме

$$\xi = a_0 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{q_{s+1}q_s}. \tag{3.3.2}$$

Последният факт, от който се нуждаем, също може да се докаже с индукция по k и има вида

$$\frac{p_{k-1} - \xi q_{k-1}}{\xi q_k - p_k} = a_{k+1} + \cfrac{1}{a_{k+2} + \cfrac{1}{\ddots}},$$

което дава

$$a_{k+1} = \left\lfloor \frac{p_{k-1} - \xi q_{k-1}}{\xi q_k - p_k} \right\rfloor \tag{3.3.3}$$

за всички естествени числа k.

Дефиниция 3.3.1. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции. Положителното ирационално реално число ξ *има верижна дроб във* $\mathcal{F}$, ако функцията $\lambda k.a_k$ принадлежи на $\mathcal{F}$.

Резултатите от следващите четири секции до края на главата могат лесно да се обобщят и за отрицателни ирационални числа, като се кодира знакът на числото (например) в първия коефициент на верижната дроб. Сложността на верижните дроби на рационалните числа считаме за тривиална, тъй като те са крайни.

Да разгледаме някои примери.

Нека $\mathcal{F}$ е класът на всички унарни константи. Кои числа ξ имат верижна във $\mathcal{F}$? Лесно се съобразява, че това са точно тези числа ξ, за които

$$\xi = a + \frac{1}{\xi}$$

за някое ненулево естествено число a. Това равенство е еквивалентно на квадратно уравнение за ξ с единствен положителен корен. Така получаваме

$$\xi \text{ има верижна дроб във } \mathcal{F} \iff \xi = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2} \text{ за някое ненулево } a \in \mathbb{N}.$$

По-общо да наречем една унарна функция f *потенциално периодична*, ако съществуват естествени числа k_0 и $h > 0$, такива че за всяко естествено число $k \geq k_0$

$$f(k) = f(k+h)$$

и нека $\mathcal{F}$ е класът на всички потенциално периодични функции. От теорията на верижните дроби е известен следният факт

$$\xi \text{ има верижна дроб във } \mathcal{F} \iff \xi \text{ е квадратично ирационално число.}$$

Квадратично ирационални числа са онези ирационални числа, които са корени на квадратно уравнение с цели коефициенти.

Всяка потенциално периодична функция f е в $\mathcal{E}^0$. Действително да изберем съответните k_0 и $h > 0$. Тогава f може да се дефинира със случаи по следния начин:

$$f(x) = \begin{cases} f(0) & \text{ако } x = 0, \\ f(1) & \text{ако } x = 1, \\ \dots & \\ f(k_0 - 1) & \text{ако } x = k_0 - 1, \\ f(k_0) & \text{ако } x \geq k_0 \text{ и } \mathrm{rm}(x \dot{-} k_0, h) = 0, \\ f(k_0 + 1) & \text{ако } x \geq k_0 \text{ и } \mathrm{rm}(x \dot{-} k_0, h) = 1, \\ \dots & \\ f(k_0 + h - 1) & \text{ако } x \geq k_0 \text{ и } \mathrm{rm}(x \dot{-} k_0, h) = h - 1. \end{cases}$$

Тъй като f приема краен брой стойности, f е ограничена функция. Така от лема 2.2.6 получаваме $f \in \mathcal{E}^0$. По този начин всички квадратично ирационални числа имат верижна дроб в $\mathcal{E}^0$.

Числото e също има верижна дроб в $\mathcal{E}^0$. Действително за коефициентите a_k на верижната му дроб имаме

$$a_k = \begin{cases} 2 & \text{ако } k = 0, \\ 1 & \text{ако } k > 0 \text{ и } \mathrm{rm}(k, 3) \neq 2, \\ 2(\lfloor \frac{k}{3} \rfloor + 1) & \text{ако } k > 0 \text{ и } \mathrm{rm}(k, 3) = 2. \end{cases}$$

Също така лесно се съобразява, че $a_k \leq k + 2$ за всяко естествено число k и отново можем да приложим лема 2.2.6.

Както вече отбелязахме, сложността на верижната дроб на π е неясна на пръв поглед.

Основната цел до края на главата е да сравним сложността на представянето на положителните ирационални реални числа чрез съкратените имена от секция 3.1 и чрез верижни дроби, т.е. да сравним понятията $\mathcal{F}$-изчислимост и притежание на верижна дроб във $\mathcal{F}$.

Например, ако $\mathcal{R}$ е класът на всички рекурсивни функции, то

$$\xi \text{ е } \mathcal{R}\text{-изчислимо} \iff \xi \text{ има верижна дроб в } \mathcal{R}.$$

Посоката отдясно наляво лесно следва от второто неравенство в (3.3.1). Посоката отляво надясно ще следва лесно от резултати в следващата глава.

Но ако вземем класът $\mathcal{PR}$ на примитивно рекурсивните функции, тази еквивалентност вече не е вярна. Всъщност, ако ξ има верижна дроб в $\mathcal{PR}$, то ξ е $\mathcal{PR}$-изчислимо. Но от друга страна, Леман показва в [16], че съществуват $\mathcal{PR}$-изчислими реални числа, чиято верижна дроб не е в $\mathcal{PR}$. По-нататък ще дадем конкретен пример за такова число.

3.4 От верижни дроби към редици на Коши

В секциите до края на глава 3 се представят резултатите от статията [8] на автора.

Навсякъде ξ е положително ирационално реално число.

В [7] авторът е доказал следната

Теорема 3.4.1. Ако ξ има верижна дроб в $\mathcal{E}^2$, то ξ е $\mathcal{E}^2$-изчислимо.

Доказателството се обобщава непосредствено до всички класове $\mathcal{E}^n$ за $n \geq 2$. Възниква въпросът:

Ако ξ е $\mathcal{E}^n$-изчислимо при $n \geq 2$ следва ли, че ξ има верижна дроб в $\mathcal{E}^n$?

Изследването на този въпрос е съществена част от дисертацията. Оказва се, че отговорът на въпроса е отрицателен.

Съществено е наблюдението, че в теорема 3.4.1 можем да отслабим изискването верижната дроб да бъде в $\mathcal{E}^2$ до по-слабото изискване нейната *графика* да е $\mathcal{E}^2$-релация (графиката на верижната дроб на ξ е графиката на функцията $\lambda k.a_k$, съставена от коефициентите на ξ).

Ще се нуждаем от следната

Лема 3.4.2. Нека $\theta_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и $\theta_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ са ограничени функции, които са $\mathcal{E}^n$-изчислими за някое $n \geq 2$. Тогава тяхното произведение $\theta_1.\theta_2$ също е $\mathcal{E}^n$-изчислима функция.

Доказателство. Следваме класическото доказателство за непрекъснатост на реалната функция умножение. Нека c и d са естествени числа, такива че за всяко естествено число s

$$|\theta_1(s)| \leq c \text{ и } |\theta_2(s)| \leq d.$$

Нека за $i = 1, 2$, $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{E}^n$ са функции, такива че

$$\left| \frac{f_i(t,s) - g_i(t,s)}{h_i(t,s)+1} - \theta_i(s) \right| < \frac{1}{t+1}$$

за всички $s, t \in \mathbb{N}$. С помощта на неравенството при $i = 1$ получаваме

$$\left|\frac{f_1(t,s) - g_1(t,s)}{h_1(t,s)+1}\right| < |\theta_1(s)| + \frac{1}{t+1} \leq c+1$$

за всички естествени числа s и t. За всички $w, s \in \mathbb{N}$ имаме

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f_1(w,s) - g_1(w,s)}{h_1(w,s)+1}.\frac{f_2(w,s) - g_2(w,s)}{h_2(w,s)+1} - \theta_1(s).\theta_2(s)\right| \\
&\qquad = \left|\frac{f_1(w,s) - g_1(w,s)}{h_1(w,s)+1}.\left(\frac{f_2(w,s) - g_2(w,s)}{h_2(w,s)+1} - \theta_2(s)\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{f_1(w,s) - g_1(w,s)}{h_1(w,s)+1} - \theta_1(s)\right).\theta_2(s)\right| \\
&\qquad\qquad\qquad < \frac{c+1}{w+1} + \frac{d}{w+1} = \frac{c+d+1}{w+1}.
\end{aligned}$$

Поради тази причина дефинираме функциите f', g', h' с

$$\begin{aligned}
f'(w,s) &= f_1(w,s).f_2(w,s) + g_1(w,s).g_2(w,s), \\
g'(w,s) &= f_1(w,s).g_2(w,s) + g_1(w,s).f_2(w,s), \\
h'(w,s) &= h_1(w,s).h_2(w,s) + h_1(w,s) + h_2(w,s).
\end{aligned}$$

Очевидно е, че $f', g', h' \in \mathcal{E}^n$ и получаваме

$$\left|\frac{f'(w,s) - g'(w,s)}{h'(w,s)+1} - \theta_1(s).\theta_2(s)\right| < \frac{c+d+1}{w+1}$$

за всички $w, s \in \mathbb{N}$. Следователно за всяко естествено число t

$$\left|\frac{f(t,s) - g(t,s)}{h(t,s)+1} - \theta_1(s).\theta_2(s)\right| < \frac{1}{t+1},$$

където f, g, h са дефинирани с

$$f(t,s) = f'((c+d).(t+1)+t,s), \quad g(t,s) = g'((c+d).(t+1)+t,s),$$

$$h(t,s) = h'((c+d).(t+1)+t,s).$$

Разбира се, $f, g, h \in \mathcal{E}^n$ и оттук следва, че $\theta_1.\theta_2$ е $\mathcal{E}^n$-изчислима. □

Бележка 3.4.3. Лема 3.4.2 е вярна и без условието за ограниченост на функциите θ_1 и θ_2. Действително за $i = 1, 2$ и естествено число s имаме, че $(\lambda t.f_i(t,s), \lambda t.g_i(t,s), \lambda t.h_i(t,s))$ е име на $\theta_i(s)$, така че от бележка 3.1.4

$$|\theta_i(s)| < |f_i(0,s) - g_i(0,s)| + 1 \quad \text{за } i = 1, 2.$$

По този начин в дефиницията на функциите f, g, h в края на доказателството можем да заместим

$$c = |f_1(0,s) - g_1(0,s)| + 1, \quad d = |f_2(0,s) - g_2(0,s)| + 1.$$

Теорема 3.4.4. Нека верижната дроб на ξ има графика, която е $\mathcal{E}^n$-релация за някое $n \geq 2$. Тогава ξ е $\mathcal{E}^n$-изчислимо.

Доказателство. Ще приложим теорема 3.2.2 при $\mathcal{F} = \mathcal{E}^n$ за реда в равенството (3.3.2). Ако докажем, че сумата на този ред е $\mathcal{E}^n$-изчислима, то непосредствено ще следва, че ξ също е $\mathcal{E}^n$-изчислимо. Втората предпоставка в теоремата е удовлетворена, поради основно неравенство за редове с алтерниращи по знак членове (чието доказателство може да се намери във всеки по-подробен учебник по анализ):

$$\left|\sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{q_{s+1}q_s}\right| \leq \frac{1}{q_{k+2}q_{k+1}} < \frac{1}{k+1} = \frac{1}{t+1},$$

където $k = t$. Използвахме също, че $q_k \geq k$ за всички $k \in \mathbb{N}$. Това следва лесно по индукция. Остана да установим, че първото условие в теоремата също е удовлетворено. Така сега ще докажем, че функцията

$$\lambda s. \frac{(-1)^s}{q_{s+1}q_s}$$

е $\mathcal{E}^n$-изчислима. Тази функция може да се представи като произведение на трите функции

$$\lambda s.(-1)^s, \quad \lambda s.\frac{1}{q_{s+1}}, \quad \lambda s.\frac{1}{q_s}.$$

Те очевидно са ограничени и доказателството ще бъде завършено с двукратно приложение на лема 3.4.2, ако покажем, че тези три функции са $\mathcal{E}^n$-изчислими. Първата е тривиално $\mathcal{E}^n$-изчислима, тъй като

$$(-1)^s = \mathrm{rm}(s+1, 2) - \mathrm{rm}(s, 2),$$

а $\mathcal{E}^n$-изчислимостта на втората функция ще следва от $\mathcal{E}^n$-изчислимостта на третата, тъй като тя е получена със заместване на s със $s+1$. За да докажем, че $\lambda s.\dfrac{1}{q_s}$ е $\mathcal{E}^n$-изчислима, е достатъчно да намерим функция $r \in \mathcal{E}^n$ със свойството

$$\left|\frac{1}{r(s,t)} - \frac{1}{q_s}\right| < \frac{1}{t+1}$$

за всички $s, t \in \mathbb{N}$. Функцията $r : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, дефинирана с

$$r(s,t) = \min(q_s, t+1),$$

удовлетворява това неравенство и остава да покажем, че $r \in \mathcal{E}^n$. Използваме следните равенства, които се базират на индуктивната дефиниция наq,

$$r(0,t) = \min(q_0, t+1), \quad r(1,t) = \min(q_1, t+1),$$

$$\begin{aligned} r(s+2,t) &= \min(q_{s+2}, t+1) = \min(a_{s+2}.q_{s+1} + q_s, t+1) \\ &= \min(\min(a_{s+2}, t+1).r(s+1,t) + r(s,t), t+1). \end{aligned}$$

Само последното равенство се нуждае от обосновка. Да фиксираме s и t. Ако $q_s \leq t+1, q_{s+1} \leq t+1$ и $a_{s+2} \leq t+1$, то

$$\min(a_{s+2}, t+1) = a_{s+2}, \ \ r(s+1,t) = q_{s+1}, \ \ r(s,t) = q_s$$

и равенството е непосредствено. Ако поне едно от числата q_s, q_{s+1}, a_{s+2} е по-голямо от $t+1$, то поне едно от числата

$$\min(a_{s+2}, t+1), \quad r(s+1,t), \quad r(s,t)$$

е равно на $t+1$. Тъй като тези числа са ненулеви, имаме

$$\min(a_{s+2}.q_{s+1}+q_s, t+1) = t+1 = \min(\min(a_{s+2}, t+1).r(s+1,t)+r(s,t), t+1).$$

По условие $\lambda s.a_s$ има графика, която е $\mathcal{E}^n$-релация. От лема 2.2.5 за графиката получаваме, че $\lambda st.\min(a_{s+2}, t+1) \in \mathcal{E}^n$. Очевидно е, че $r(s,t) \leq t+1$. По този начин r се изразява с ограничена примитивна рекурсия от вида в теорема 2.4.1 и следователно $r \in \mathcal{E}^n$. □

Ето го обобщението на теорема 3.4.1.

Следствие 3.4.5. Ако ξ има верижна дроб в $\mathcal{E}^n$ за някое $n \geq 2$, то ξ е $\mathcal{E}^n$-изчислимо.

Доказателство. От лема 2.2.5 за графиката всяка функция в $\mathcal{E}^n$ има графика, която е $\mathcal{E}^n$-релация. □

Следствие 3.4.6. Ако ξ има верижна дроб, чиято графика е Δ_0-определима релация, то ξ е $\mathcal{E}^2$-изчислимо.

Доказателство. Всички Δ_0-определими релации са $\mathcal{E}^0$-релации (и следователно $\mathcal{E}^2$-релации), както отбелязахме по-горе. □

Прилагаме следствие 3.4.6 за реалното число

$$\xi_A = A(0,0) + \cfrac{1}{A(1,1) + \cfrac{1}{A(2,2) + \cfrac{1}{\ddots}}},$$

където A е функцията на Акерман. Добре е известно, че $\lambda x.A(x,x)$ не е примитивно рекурсивна, а също е вярно, че нейната графика е Δ_0-определима релация (доказателство може да се намери в статията [4] на Калуде). Числото ξ_A е $\mathcal{E}^2$-изчислимо от следствие 3.4.6 и следователно $\mathcal{E}^n$-изчислимо за всички $n \geq 2$. Но неговата верижна дроб не е примитивно рекурсивна, така че тя не попада в нито един от класовете $\mathcal{E}^n$. Заключаваме, че обратното на следствие 3.4.5 не е вярно.

3.5 Първи частичен резултат за обратимост

Ние все пак се надяваме, че комбинацията на $\mathcal{E}^n$-изчислимостта с някое друго естествено свойство ще даде поне частична обратимост на следствие 3.4.5. Петер е дефинирала такова условие, използвано в [16] от Леман: *примитивно рекурсивна ирационалност*.

Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции. Положителното реално число ξ е *$\mathcal{F}$-ирационално*, ако съществува унарна функция $v \in \mathcal{F}$, такава че за всички естествени числа m и $n > 0$ е изпълнено неравенството $\left|\xi - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{v(n)}$. Разбира се, ако ξ е положително $\mathcal{F}$-ирационално число, то ξ е ирационално.

Пример 3.5.1. Нека $\mathcal{R}$ е класът на всички рекурсивни функции. Ще покажем, че всяко $\mathcal{R}$-изчислимо положително ирационално реално число ξ е $\mathcal{R}$-ирационално.

Избираме съкратено име $(f,h) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ на ξ. Дефинираме бинарна рекурсивна функция b със

$$b(m,n) = \mu t\left[\frac{f(t)}{h(t)+1} + \frac{1}{t+1} < \frac{m}{n} \vee \frac{f(t)}{h(t)+1} - \frac{1}{t+1} > \frac{m}{n}\right] \text{ при } n > 0,$$

$$b(m,0) = 0.$$

Тъй като $\lambda t.\frac{f(t)}{h(t)+1}$ има граница $\xi \neq \frac{m}{n}$, минимизацията е успешна за всички m и $n > 0$. Сега дефинираме бинарна $\mathcal{R}$-релация R по следния начин:

$$R(m,n) \iff n = 0 \vee \left(n > 0 \;\&\; \frac{f(b(m,n))}{h(b(m,n))+1} + \frac{1}{b(m,n)+1} < \frac{m}{n}\right).$$

Оттук лесно се доказва, че за всички m и $n > 0$

$$R(m,n) \iff \xi < \frac{m}{n}$$

и разбира се,

$$\neg R(m,n) \iff \xi > \frac{m}{n}.$$

По-нататък дефинираме рекурсивна тернарна релация R' с

$$R'(m,n,q) \iff \neg R(m.q+1, n.q) \vee R(m.q \dot{-} 1, n.q).$$

Лесно се проверява, че за всички m и $n > 0, q > 0$,

$$R'(m,n,q) \iff \left|\xi - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{q}.$$

Тъй като ξ е ирационално, за всички m и $n > 0$ имаме, че

$$\left|\xi - \frac{m}{n}\right| > 0$$

и следователно за всички m и $n > 0$ съществува $q > 0$, такова че

$$\left|\xi - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{q}.$$

При това положение можем да дефинираме бинарна рекурсивна функция v' с

$$v'(m,n) = \mu q[q \geq 1 \;\&\; R'(m,n,q)]$$

(минимизацията е успешна и при $n = 0$). Имаме, че за всички m и $n > 0$ е изпълнено

$$\left|\xi - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{v'(m,n)}.$$

Целта е да елиминираме m в дясната страна на последното неравенство. Да изберем естествено число C, такова че $C > \xi$ и да дефинираме унарна рекурсивна функция v с

$$v(n) = \max_{m \leq n.(C+1)} v'(m,n).$$

Допускаме, че за някои m и $n > 0$ имаме

$$\left|\xi - \frac{m}{n}\right| \leq \frac{1}{v(n)}.$$

Тогава

$$\frac{m}{n} \leq \xi + \frac{1}{v(n)} \Longrightarrow \frac{m}{n} \leq C + 1 \Longrightarrow m \leq n.(C+1).$$

Тъй като $v(n)$ е максимум на $v'(m,n)$ по всички $m \leq n.(C+1)$,

$$v(n) \geq v'(m,n).$$

Така получаваме

$$\left|\xi - \frac{m}{n}\right| \leq \frac{1}{v(n)} \leq \frac{1}{v'(m,n)},$$

което е противоречие. □

Теорема 3.5.2 (Леман). Положителното ирационално реално число ξ има верижна дроб в $\mathcal{PR}$ тогава и само тогава, когато ξ е $\mathcal{PR}$-изчислимо и $\mathcal{PR}$-ирационално.

Ще проучим внимателно доказателството в [16] на тази теорема, за да получим

Теорема 3.5.3. За всички $n \geq 2$, ако положителното ирационално реално число ξ е $\mathcal{E}^{n+1}$-изчислимо и $\mathcal{E}^n$-ирационално, то ξ има верижна дроб в $\mathcal{E}^{n+1}$.

Доказателство. Идеята на доказателството е да се използва равенство (3.3.3). В него ще заменим ξ с друго число, което е достатъчно близо до ξ, но така, че равенството да остане в сила. Това число ще зависи от двойката функции, които образуват съкратено име на ξ, и от друга функция, която се осигурява от $\mathcal{E}^n$-ирационалността на ξ.

Започваме с избор на $v \in \mathcal{E}^n$ – свидетел за $\mathcal{E}^n$-ирационалността на ξ и дефинираме $v^\star$ с $v^\star(k) = \max_{x \leq k} v(x)$. Разбира се, $v^\star$ е растяща и получена с ограничен максимум, така че $v^\star \in \mathcal{E}^n$. Имаме

$$\left|\xi - \frac{m}{k}\right| > \frac{1}{v(k)} \geq \frac{1}{v^\star(k)} \tag{3.5.1}$$

за всички m и $k > 0$. По-нататък дефинираме функция $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ чрез следната итерация

$$\mu(0) = 1, \quad \mu(k+1) = v^\star\big(\mu(k)\big).$$

Тъй като μ е примитивната рекурсия на функции в $\mathcal{E}^n$, имаме $\mu \in \mathcal{E}^{n+1}$. Сега можем да покажем

$$q_k \leq \mu(k)$$

с индукция по k. Базата е тривиална, тъй като $q_0 = \mu(0) = 1$. Комбинираме неравенствата (3.3.1) и (3.5.1) и получаваме

$$\frac{1}{v^\star(q_k)} < \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

и тъй като $q_k \geq 1$ за всички k, имаме $v^\star(q_k) > q_{k+1}$. Индуктивната хипотеза дава $q_k \leq \mu(k)$, и тъй като $v^\star$ е растяща, $q_{k+1} \leq v^\star(q_k) \leq v^\star\big(\mu(k)\big) = \mu(k+1)$, което завършва доказателството.

Имаме, че $\lambda k.\dfrac{p_k}{q_k}$ е сходяща редица, така че можем да изберем естествено число C, такова че $\dfrac{p_k}{q_k} \leq C$ за всички k и следователно $p_k \leq C.q_k \leq C.\mu(k)$. По този начин както $\lambda k.p_k$, така и $\lambda k.q_k$ се мажорират от функции в $\mathcal{E}^{n+1}$.

Нека $(f,h) \in \mathcal{E}^{n+1} \times \mathcal{E}^{n+1}$ е съкратено име на ξ и нека α, β, γ са дефинирани с

$$\alpha(k) = f(\mu(k+2)), \quad \beta(k) = h(\mu(k+2)) + 1$$
$$\gamma(k) = \frac{\alpha(k)}{\beta(k)}$$

за $k \in \mathbb{N}$. Разбира се, $\alpha, \beta \in \mathcal{E}^{n+1}$. Имаме

$$|\gamma(k) - \xi| < \frac{1}{\mu(k+2)+1} < \frac{1}{v^\star\big(\mu(k+1)\big)} \leq \frac{1}{v^\star(q_{k+1})} < \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \xi\right|.$$

Следователно $\gamma(k)$ е по-близо до ξ от $\dfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$. Също е вярно (например, като използваме (3.3.1)), че $\dfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ е по-близо до ξ от $\dfrac{p_k}{q_k}$. От тези факти получаваме, че $\gamma(k)$ лежи между $\dfrac{p_k}{q_k}$ и $\dfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, т.е.

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}} < \gamma(k) < a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}}}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

при четно k или $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} < \gamma(k) < \frac{p_k}{q_k}$ при нечетно k. И в двата случая верижните дроби на ξ и $\gamma(k)$ съвпадат до k-тия член a_k, включително. Като следствие ние можем да заменим ξ с $\gamma(k+1)$ в равенство (3.3.3) и така получаваме

$$a_{k+1} = \left\lfloor \frac{p_{k-1} - \gamma(k+1)q_{k-1}}{\gamma(k+1)q_k - p_k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|p_{k-1}\beta(k+1) - q_{k-1}\alpha(k+1)|}{|q_k\alpha(k+1) - p_k\beta(k+1)|} \right\rfloor .$$

Имаме следните равенства

$$\begin{aligned}
p_0 &= a_0, \quad p_1 = a_1 p_0 + 1 = a_1 a_0 + 1, \\
p_{k+1} &= a_{k+1}p_k + p_{k-1} = \left\lfloor \frac{|p_{k-1}\beta(k+1) - q_{k-1}\alpha(k+1)|}{|q_k\alpha(k+1) - p_k\beta(k+1)|} \right\rfloor p_k + p_{k-1}, \\
q_0 &= 1, \quad q_1 = a_1 q_0 = a_1, \\
q_{k+1} &= a_{k+1}q_k + q_{k-1} = \left\lfloor \frac{|p_{k-1}\beta(k+1) - q_{k-1}\alpha(k+1)|}{|q_k\alpha(k+1) - p_k\beta(k+1)|} \right\rfloor q_k + q_{k-1}
\end{aligned}$$

за всички естествени числа $k \geq 1$. По този начин, $\lambda k.p_k$ и $\lambda k.q_k$ се получават чрез рекурсивната схема от теорема 2.4.7 и ние вече показахме, че $\lambda k.p_k$ и $\lambda k.q_k$ се мажорират от функции в $\mathcal{E}^{n+1}$. Следователно $\lambda k.p_k$ и $\lambda k.q_k$ принадлежат на $\mathcal{E}^{n+1}$. Оттук следва, че също $\lambda k.a_k \in \mathcal{E}^{n+1}$, т.е. ξ има верижна дроб в $\mathcal{E}^{n+1}$. □

На практика същото доказателство заедно с пример 3.5.1 дават, че всяко $\mathcal{R}$-изчислимо положително ирационално реално число има верижна дроб в $\mathcal{R}$, където $\mathcal{R}$ е класът на всички рекурсивни функции.

3.6 Приложения

Ще приложим теорема 3.5.3, за да получим някои интересни факти.

Нека ξ е фиксирано положително ирационално реално число. Нека R е множеството на всички положителни реални числа r, такива че неравенството

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^r} \tag{3.6.1}$$

има най-много краен брой решения (p, q), където p и $q > 0$ са цели числа. *Мярката на ирационалност* на ξ е инфимумът на R (∞, ако R е празно).

Грубо казано, мярката на ирационалност на ξ измерва степента, до която ξ може да се апроксимира добре с рационални числа.

Числата с безкрайна мярка на ирационалност (за които $R = \emptyset$) се наричат *числа на Лиувил* и за тях е добре известно, че са първите примери за трансцендентни числа.

Следващата лема свързва понятието крайна мярка на ирационалност с понятието относителна ирационалност.

Лема 3.6.1. Числото ξ има крайна мярка на ирационалност тогава и само тогава, когато ξ е $\mathcal{E}^2$-ирационално.

Доказателство. Да предположим, че ξ има крайна мярка на ирационалност, т.е. че $R \neq \emptyset$. Тъй като R е очевидно затворено нагоре, ние можем да изберем положително естествено число n в R. Нека $(p_1, q_1), \ldots, (p_k, q_k)$ са всички решения на (3.6.1) с $r = n$. Тъй като ξ е ирационално, за всички $i \in \{1, \ldots, k\}$ ние можем да изберем положително цяло t_i, такова че

$$\left|\xi - \frac{p_i}{q_i}\right| > \frac{1}{t_i}.$$

Да дефинираме $v(q) = \max(q^n, t_1, \ldots, t_k)$ за всички $q \in \mathbb{N}$. Тогава v е свидетел за $\mathcal{E}^2$-ирационалността на ξ. Наистина, нека p и $q > 0$ са произволни. Ако $(p, q) = (p_i, q_i)$ за някое i, то

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| = \left|\xi - \frac{p_i}{q_i}\right| > \frac{1}{t_i} \geq \frac{1}{v(q)}.$$

Ако не, (p, q) не удовлетворява (3.6.1), и тъй като ξ е ирационално,

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^n} \geq \frac{1}{v(q)}.$$

За обратното, да предположим, че ξ е $\mathcal{E}^2$-ирационално и нека $v \in \mathcal{E}^2$ е унарна функция, такава че

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{v(q)}$$

за всички p и $q > 0$. Тъй като имаме $v \in \mathcal{E}^2$, v се мажорира от някой полином и можем да изберем положително цяло n, такова че неравенството $v(q) \leq q^n$ се удовлетворява за всички естествени числа q с изключение на краен брой. Ще покажем, че $n \in R$. Наистина, за всички q с изключение на крайно много имаме

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{v(q)} \geq \frac{1}{q^n}$$

за всички p. Следователно неравенството

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

може да се удовлетвори само за крайно много стойности на q. Но ако q е фиксирано, това неравенство се удовлетворява само за крайно много естествени стойности на p, именно онези в интервала

$$\big(q(\xi - \frac{1}{q^n}), q(\xi + \frac{1}{q^n})\big).$$

По този начин двойките (p, q), които удовлетворяват неравенството, са крайно много и следователно $n \in R$. Така R е непразно, т.е. ξ има крайна мярка на ирационалност. $\square$

Числото ξ_A, дефинирано в края на секция 3.4, е $\mathcal{E}^2$-изчислимо и неговата верижна дроб не е в $\mathcal{PR}$. От теорема 3.5.3 следва, че ξ_A не е $\mathcal{E}^n$-ирационално за никое естествено число n. Като използваме този факт при $n = 2$ и лема 3.6.1, получаваме, че ξ_A има безкрайна мярка на ирационалност, т.е. ξ_A е число на Лиувил.

Както вече отбелязахме в края на секция 3.1, всички реални алгебрични числа са $\mathcal{M}^2$-изчислими (и следователно $\mathcal{E}^3$-изчислими). Тъй като всички числа на Лиувил са трансцендентни, ирационалните алгебрични числа имат крайна мярка на ирационалност. От лема 3.6.1 и теорема 3.5.3 следва, че верижната дроб на всяко ирационално алгебрично число е в $\mathcal{E}^3$.

Също отбелязахме, че в [25] е доказан факта, че π е $\mathcal{E}^2$-изчислимо (и следователно $\mathcal{E}^3$-изчислимо). Мярката на ирационалност на π е крайна, дори по-малка от 8.0161, съгласно [12]. От лема 3.6.1 и теорема 3.5.3 следва, че верижната дроб на π също е в $\mathcal{E}^3$.

3.7 Втори частичен резултат за обратимост

В последната секция от тази глава ние даваме друго условие, което комбинирано с $\mathcal{E}^n$-изчислимостта дава ниска сложност на верижната дроб, а именно – граница върху растежа на членовете на верижната дроб.

Ще се нуждаем от две предварителни леми, които са версии на определени твърдения от [30].

Първата от тях показва, че ние винаги можем да трансформираме двойка (f, h), която е съкратено име на ξ, в двойка от вида $(g, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$, която също е съкратено име на ξ и има същата сложност. Това е по същество лема 1 от секция 1.3 в [30] (за случая, когато g е константата 0) и пълното доказателство може да се намери там.

Лема 3.7.1. Нека (f, h) е съкратено име на положителното реално число ξ. Нека g е дефинирана с

$$g(t) = \left\lfloor (t+1)\frac{f(2t+1)}{h(2t+1)+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor. \tag{3.7.1}$$

Тогава $(g, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ също е съкратено име на ξ и ако $f, h \in \mathcal{E}^n$ за $n \geq 2$, то $g \in \mathcal{E}^n$.

Другата лема засяга ефективната изчислимост на функцията реципрочно. Тя всъщност е следствие от лема 3.7.1 и версия на пример 14 от секция 2.2 в [30] с $\xi_1\xi_2 > 1$ и $\xi_2 = l$, където l е положително цяло число.

Лема 3.7.2. Нека l е положително цяло число и ξ_1 е реално число, такова че $\xi_1 l > 1$. Нека $(f_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е съкратено име на ξ_1. Нека g е дефинирана с равенството (3.7.1), където f и h са дефинирани с

$$f(t) = m + 1, \quad h(t) = f_1(m) \dot{-} 1$$

$$\text{при } m = (t+1)l^2 + l \dot{-} 1.$$

Тогава $(g, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е съкратено име на $\dfrac{1}{\xi_1}$.

Доказателство. Предвид лема 3.7.1, достатъчно е да докажем, че (f, h) е съкратено име на $\dfrac{1}{\xi_1}$. Нека $t \in \mathbb{N}$ и да положим

$$\rho = \frac{f_1(m)}{m+1},$$

където m е както във формулировката на лемата. Тогава $|\rho - \xi_1| < \dfrac{1}{m+1}$, следователно

$$\rho > \xi_1 - \frac{1}{m+1} > \frac{1}{l} - \frac{1}{m+1} = \frac{(t+1)l}{m+1}.$$

По този начин

$$\left|\frac{f(t)}{h(t)+1} - \frac{1}{\xi_1}\right| = \left|\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\xi_1}\right| = \frac{|\xi_1 - \rho|}{|\rho|\,|\xi_1|} < \frac{1}{t+1}. \qquad \square$$

Ще се нуждаем също от една проста лема, която засяга изчислимостта на дробната част на реално число.

Лема 3.7.3. Нека $(g, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е съкратено име на положителното реално число ξ. Нека h е дефинирана с

$$h(t) = \left|g(t) - \lfloor \xi \rfloor (t+1)\right|.$$

Тогава $(h, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е съкратено име на дробната част $\{\xi\} = \xi - \lfloor \xi \rfloor$ на ξ.

Доказателство. Тъй като $(g, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е съкратено име на ξ, то за всички t имаме

$$\left|\frac{g(t)}{t+1} - \xi\right| < \frac{1}{t+1} \Longrightarrow \left|\frac{g(t)}{t+1} - \lfloor\xi\rfloor - \{\xi\}\right| < \frac{1}{t+1}$$
$$\Longrightarrow \left|\frac{g(t) - \lfloor\xi\rfloor(t+1)}{t+1} - \{\xi\}\right| < \frac{1}{t+1}$$
$$\Longrightarrow \left|\frac{|g(t) - \lfloor\xi\rfloor(t+1)|}{t+1} - \{\xi\}\right| = \left|\frac{h(t)}{t+1} - \{\xi\}\right| < \frac{1}{t+1}.$$

Последната импликация е вярна, защото $\{\xi\}$ е неотрицателно. □

Вече сме готови да докажем последната теорема в тази глава.

Теорема 3.7.4. За всички $n \geq 2$, ако положителното ирационално реално число ξ е $\mathcal{E}^{n+1}$-изчислимо и съществува унарна функция $v \in \mathcal{E}^n$, която мажорира $\lambda k.a_k$ (членовете на верижната дроб на ξ), то ξ има верижна дроб в $\mathcal{E}^{n+1}$.

Доказателство. Идеята е по-проста от тази в теорема 3.5.3. За всички естествени числа k да дефинираме

$$\xi_k = a_k + \cfrac{1}{a_{k+1} + \cfrac{1}{a_{k+2} + \cfrac{1}{\ddots}}},$$

така че $\xi_0 = \xi$ и за всички $k \in \mathbb{N}$ $a_k = \lfloor\xi_k\rfloor$ и $\xi_{k+1} = \dfrac{1}{\{\xi_k\}}$. Искаме да покажем, че $\lambda k.a_k = \lambda k.\lfloor\xi_k\rfloor \in \mathcal{E}^{n+1}$. За всички k ние имаме неравенствата

$$a_k < \xi_k < a_k + 1 \leq v(k) + 1$$

и следователно

$$\{\xi_k\} = \frac{1}{\xi_{k+1}} > \frac{1}{v(k+1)+1}. \tag{3.7.2}$$

Ще дефинираме индуктивно една редица $g_0, g_1, \ldots, g_k, \ldots$ от унарни функции, такава че за всички k двойката $(g_k, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е съкратено име на ξ_k. След това ще покажем, че бинарната функция g, дефинирана с $g(k,t) = g_k(t)$, принадлежи на $\mathcal{E}^{n+1}$.

Базата на индукцията е $g_0 = b$, където $b \in \mathcal{E}^{n+1}$ е първият компонент на наредена двойка $(b, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$, която е съкратено име на $\xi_0 = \xi$. За да осигурим такава двойка, ние използваме, че ξ е $\mathcal{E}^{n+1}$-изчислимо и прилагаме лема 3.7.1.

Да предположим, че сме конструирали g_k, такава че $(g_k, \mathrm{id}_\mathbb{N})$ е съкратено име на ξ_k. Ще конструираме функция g_{k+1}, такава че $(g_{k+1}, \mathrm{id}_\mathbb{N})$ е съкратено име на $\xi_{k+1} = \dfrac{1}{\{\xi_k\}}$. Първо прилагаме лема 3.7.3 към двойката $(g_k, \mathrm{id}_\mathbb{N})$, която е съкратено име на ξ_k, и получаваме функцията h_k, такава че $(h_k, \mathrm{id}_\mathbb{N})$ е съкратено име на $\{\xi_k\}$. След това прилагаме лема 3.7.2 за числата

$$\{\xi_k\} \text{ и } v(k+1)+1$$

(неравенството (3.7.2) дава, че тяхното произведение е по-голямо от 1) и съкратеното име $(h_k, \mathrm{id}_\mathbb{N})$ на първото число. Получаваме съкратено име $(g_{k+1}, \mathrm{id}_\mathbb{N})$ на $\dfrac{1}{\{\xi_k\}} = \xi_{k+1}$ и конструкцията на редицата $g_0, g_1, \ldots, g_k, \ldots$ е завършена.

Сега ще покажем, че функцията $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, дефинирана с $g(k,t) = g_k(t)$, принадлежи на $\mathcal{E}^{n+1}$.

Дефинираме унарната функция q с

$$q(k) = 2v(k+1)+1.$$

Разбира се, $q \in \mathcal{E}^n$ и за всички k имаме равенството

$$\lfloor \xi_k \rfloor = \left\lfloor \frac{g(k,q(k)) \dot{-} 1}{q(k)+1} \right\rfloor, \tag{3.7.3}$$

тъй като са верни следните две неравенства

$$\lfloor \xi_k \rfloor < \frac{g(k,q(k)) - 1}{q(k)+1} < \xi_k.$$

Второто неравенство е в сила, тъй като $(g_k, \mathrm{id}_\mathbb{N})$ е съкратено име на ξ_k, и също така имаме

$$\xi_k - \frac{g(k,q(k))}{q(k)+1} < \frac{1}{q(k)+1} \iff \xi_k - \frac{g(k,q(k))-1}{q(k)+1} < \frac{2}{q(k)+1}.$$

От друга страна,

$$\xi_k - \lfloor \xi_k \rfloor = \{\xi_k\} > \frac{1}{v(k+1)+1} = \frac{2}{q(k)+1},$$

поради неравенството (3.7.2). По този начин първото неравенство също е в сила.

Разбира се, равенството (3.7.3) тривиално влече $\lambda k.\lfloor \xi_k \rfloor \in \mathcal{E}^{n+1}$, ако докажем $g \in \mathcal{E}^{n+1}$.

За да направим това, ние ще изследваме внимателно горната конструкция, за да видим как се дефинира g_{k+1} в термините на g_k. Според лема 3.7.2, ние имаме

$$g_{k+1}(t) = \left\lfloor (t+1)\frac{f(2t+1)}{h(2t+1)+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor,$$

където

$$f(t) = m+1, \quad h(t) = h_k(m) \dot{-} 1$$

за $m = (t+1)l^2 + l \dot{-} 1$ и $l = v(k+1)+1$. Изчисляваме

$$m = m(k,t) = (t+1)(v(k+1)+1)^2 + v(k+1).$$

Разбира се, числото m, разгледано като функция на k и t принадлежи на $\mathcal{E}^n$, тъй като $v \in \mathcal{E}^n$. Имаме

$$f(2t+1) = m(k,2t+1)+1 \quad \text{и} \quad h(2t+1) = h_k(m(k,2t+1)) \dot{-} 1.$$

Следователно

$$g_{k+1}(t) = \left\lfloor (t+1)\frac{m(k,2t+1)+1}{\big(h_k(m(k,2t+1)) \dot{-} 1\big)+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Следвайки лема 3.7.3 и с използване на равенството (3.7.3) получаваме

$$h_k(t) = |g_k(t) - \lfloor \xi_k \rfloor (t+1)| = \left| g_k(t) - \left\lfloor \frac{g(k,q(k)) \dot{-} 1}{q(k)+1} \right\rfloor (t+1) \right|.$$

По този начин

$$g_{k+1}(t) = \left\lfloor (t+1)\frac{m(k,2t+1)+1}{\left(\left| g_k(m(k,2t+1)) - \left\lfloor \frac{g_k(q(k)) \dot{-} 1}{q(k)+1} \right\rfloor (m(k,2t+1)+1) \right| \dot{-} 1\right)+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

На практика имаме, че

$$\begin{aligned} g_0(t) &= b(t), \\ g_{k+1}(t) &= c(k,t,g_k(m(k,2t+1)), g_k(q(k))) \end{aligned}$$

за определена функция c. Имаме $c \in \mathcal{E}^n$, тъй като c е суперпозиция на функции от $\mathcal{E}^n$. Също имаме $m, q \in \mathcal{E}^n$ и $b \in \mathcal{E}^{n+1}$. Достигнахме до рекурсивна схема, която отговаря на теорема 2.4.6. За да приложим тази теорема, ние също трябва да намерим функция в $\mathcal{E}^{n+1}$, която мажорира g, но това е лесно, тъй като $(g_k, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е съкратено име на ξ_k и така получаваме

$$\left|\frac{g_k(t)}{t+1} - \xi_k\right| < \frac{1}{t+1} \Longrightarrow |g_k(t) - \xi_k(t+1)| < 1$$

$$\Longrightarrow g_k(t) < \xi_k(t+1) + 1 < (v(k)+1)(t+1) + 1.$$

Използвахме неравенството $\xi_k < v(k) + 1$ от началото на доказателството и така накрая получаваме $g \in \mathcal{E}^{n+1}$. □

Глава 4

ОТНОСИТЕЛНА ИЗЧИСЛИМОСТ НА РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

4.1 Равномерна изчислимост на реална функция относно клас от оператори

Навсякъде в тази и следващата глава *реална функция* е функция $\theta : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}^k$, т.е. частична функция от $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}$ за някое естествено число k. Под *рестрикция* на θ ще разбираме ограничението на θ до някое подмножество на нейната дефиниционна област.

След като Скордев разработва методи за доказателство на субрекурсивна изчислимост на реални константи, той започва да разглежда проблема за затвореност на множеството на $\mathcal{F}$-изчислимите реални числа относно елементарните функции на анализа при неограничителни предположения за класа от функции $\mathcal{F}$. Това измества фокуса на изследванията към изучаване на сложността на представянията на реални функции.

При дефинирането на изчислимост на една реална функция θ възникват следните два проблема. Първият проблем е, че θ приема като аргументи реални числа, а едно реално число само по себе си е инфинитарен обект и то не може да се подаде като аргумент на изчислителна процедура. Този проблем се преодолява, като се даде на изчислителната процедура възможност за достъп до имена на аргументите на θ. По-конкретно, за всеки аргумент ξ на θ и име (f, g, h) на ξ, процедурата може да използва функциите f, g и h като *оракули*, т.е. в хода на нейното изпълнение могат да се осъществяват заявки за стойностите на f, g и h в определени вече изчислени аргументи (включително и когато тези заявки не могат да се осъществят по изчислим начин). При това процедурата трябва да работи коректно, независимо от това точно кои имена са използвани. Вторият проблем е, че стойността на функцията θ също е реално число, така че изчислителната процедура трябва да пресмята име на тази стойност. Този проблем се решава по-лесно, като се добави допълнителен естествен аргумент към процедурата, в който трябва да се изчисли името на стойността.

Разбира се, за нашите нужди трябва да формализираме горното описание.

Освен съкратен запис за крайни редици от променливи, оттук нататък ще използваме и съкратен запис за крайни редици от унарни функции, например $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$, като отново размерността ще се определя еднозначно от контекста.

За удобство за всяко естествено число m с $\mathcal{T}_m$ ще означаваме множеството от всички m-местни тотални функции в естествените числа.

Дефиниция 4.1.1. *Оператор от тип* (m, n) или (m, n)-оператор за естествени числа m, n е всяко изображение на $\mathcal{T}_1^m$ в $\mathcal{T}_n$. *Оператор* е просто (m, n)-оператор за някои $m, n \in \mathbb{N}$.

Операторите ще са формалният еквивалент на изчислителните процедури за реалните функции.

Дефиниция 4.1.2. Нека k е естествено число. Тройката оператори (F, G, H) от тип $(3k, 1)$ е *изчислителна система* за реалната функция $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^k$, ако всеки път когато $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) \in D$ и тройката функции (f_i, g_i, h_i) е име на ξ_i за $i = 1, 2, \ldots, k$, тройката функции

$$
\begin{gathered}
(F(f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2, \ldots, f_k, g_k, h_k), \\
G(f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2, \ldots, f_k, g_k, h_k), \\
H(f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2, \ldots, f_k, g_k, h_k))
\end{gathered}
$$

е име на реалното число $\theta(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$.

Много важен клас от оператори е класът на *изчислимите* оператори. Тук е мястото да уточним терминологията. Ще използваме понятията от книгата [19] на Роджърс. Рекурсивните функционали са дефинирани за всички частични функции в $\mathbb{N}$, общо-рекурсивните функционали са онези рекурсивни функционали, които изобразяват тотални функции в тотални. Един оператор е изчислим т.с.т.к. той е ограничението на общо-рекурсивен функционал до тоталните функции. В статията [11] на Гжегорчик е поместена еквивалентна индуктивна дефиниция за изчислим оператор (с точност до елементарни технически детайли).

Дефиниция 4.1.3 (свръхизчислимост на реална функция)**.** Една реална функция θ е *свръхизчислима*, ако съществува изчислителна система за θ, съставена от изчислими оператори.

Тази дефиниция е еквивалентна на дефиницията за изчислимост на реална функция, дадена от Гжегорчик в [11]. Да отбележим, че операторите са тотални, т.е. дефинирани върху всички крайни редици от унарни тотални функции със съответната дължина.

От друга страна, като погледнем дефиницията за изчислителна система виждаме, че за да има тя смисъл е необходимо операторите да са дефинирани само върху $3k$-орки от имена за аргументите на реалната функция. Като допускаме такива частични оператори в дефиницията за изчислителна система, получаваме изчислимостта на Шефердсън от [21], която ще наричаме просто *изчислимост* – това отговаря на съвременната терминология (или *изчислимост в разширен смисъл*, ако искаме да подчертаем разликата от свръхизчислимостта). В същата статия авторът показва, че изчислимостта е еквивалентна със свръхизчислимостта за тотални реални функции или за реални функции, дефинирани върху крайни затворени интервали с краища рекурсивни реални числа. Но в общия случай двете изчислимости не са еквивалентни, както ще видим по-нататък.

Дефиниция 4.1.4. Нека $\mathbf{O}$ е клас от оператори. Реалната функция θ е *равномерно изчислима относно* $\mathbf{O}$ или *равномерно* $\mathbf{O}$*-изчислима*, накратко, ако съществува изчислителна система за θ, състояща се от оператори в $\mathbf{O}$.

По този начин θ е свръхизчислима т.с.т.к. θ е равномерно $\mathbf{O}$-изчислима, където $\mathbf{O}$ е класът на всички изчислими оператори. Също така, ако $\mathbf{O}$ се състои само от изчислими оператори и θ е равномерно $\mathbf{O}$-изчислима, то θ е свръхизчислима.

Ясно е, че произволна рестрикция на равномерно $\mathbf{O}$-изчислима реална функция θ също е равномерно $\mathbf{O}$-изчислима. Действително, ако (F, G, H) е изчислителна система за θ, то (F, G, H) е изчислителна система и за произволна рестрикция на θ.

Сега вече можем по-точно да формулираме целта на изследванията. Интересуваме се от възможно най-тесен клас от изчислими оператори $\mathbf{O}$, така че всички елементарни функции на анализа да са равномерно $\mathbf{O}$-изчислими. Оказва се, че има принципна пречка пред така поставената задача.

Бележка 4.1.5. Всяка свръхизчислима реална функция е равномерно непрекъсната в ограничените подмножества на своята дефиниционна област.

Доказателство може да се намери в [11]. Там е доказана дори ефективна версия на бележката.

Така веднага получаваме, че функцията реципрочно и логаритмичната функция не са свръхизчислими в интервала $(0,1)$, тъй като те не са равномерно непрекъснати в този интервал.

Поради тези съображения изглежда естествено да формулираме по нов начин нашата цел. Търсим подходящ клас $\mathbf{O}$ от изчислими оператори, така че всички елементарни функции на анализа, ограничени до компактни подмножества на своите дефиниционни области, да са равномерно $\mathbf{O}$-изчислими.

4.2 $\mathcal{F}$-субституционни оператори

Скордев успява да намери такъв клас оператори – $\mathcal{M}^2$-субституционните оператори. Първоначалната дефиниция от [30] е за оператори от тип $(k,1)$, която в [29] се обобщава до оператори от произволни типове. Следваме изложението от [29], като даваме подробни доказателства.

Дефиниция 4.2.1. Нека $\mathcal{F}$ е множество от функции. За произволни естествени числа k, m дефинираме класа на *$\mathcal{F}$-субституционните оператори* от тип (k,m) с индукция:

1. За всяка m-местна проекция h в $\mathbb{N}$ операторът F, дефиниран чрез равенството $F(f_1,\ldots,f_k) = h$, е $\mathcal{F}$-субституционен.

2. За всяко $i \in \{1,\ldots,k\}$, ако F_0 е $\mathcal{F}$-субституционен (k,m)-оператор, то същото е вярно и за оператора F, дефиниран чрез равенството

$$F(f_1,\ldots,f_k)(n_1,\ldots,n_m) = f_i(F_0(f_1,\ldots,f_k)(n_1,\ldots,n_m)).$$

3. За всяко естествено число r и всяка r-аргументна функция f от $\mathcal{F}$, ако $F_1,\ldots,F_r$ са $\mathcal{F}$-субституционни оператори от тип (k,m), то същото е вярно и за оператора F, дефиниран чрез равенството

$$\begin{aligned} &F(f_1,\ldots,f_k)(n_1,\ldots,n_m) \\ &\quad = f(F_1(f_1,\ldots,f_k)(n_1,\ldots,n_m),\ldots,F_r(f_1,\ldots,f_k)(n_1,\ldots,n_m)). \end{aligned}$$

Интуитивно, един оператор F от тип (k,m) е $\mathcal{F}$-субституционен т.с.т.к. съществува израз за $F(f_1,\ldots,f_k)(n_1,\ldots,n_m)$, построен от променливите $n_1,\ldots,n_m$ с използване на функционалните символи $f_1,\ldots,f_k$ и функционални символи за функции от $\mathcal{F}$.

Като прост пример, за всяко $i \in \{1,\ldots,k\}$, проекционният $(k,1)$-оператор F, дефиниран с $F(f_1,\ldots,f_k) = f_i$ е $\mathcal{F}$-субституционен (за всеки клас от функции $\mathcal{F}$).

Разбира се, ако $\mathcal{F}$ се състои само от рекурсивни функции, всеки $\mathcal{F}$-субституционен оператор е изчислим.

По-нататък следват твърдения, в които се доказват някои общи свойства на $\mathcal{F}$-субституционните оператори.

Твърдение 4.2.2. Нека F е $\mathcal{F}$-субституционен оператор от тип (k,m) и $G_1,\ldots,G_m$ са $\mathcal{F}$-субституционни (k,l)-оператори. Тогава (k,l)-операторът H, дефиниран с

$$H(\vec{f})(\vec{n}) = F(\vec{f})(G_1(\vec{f})(\vec{n}),\ldots,G_m(\vec{f})(\vec{n})),$$

също е $\mathcal{F}$-субституционен.

Доказателство. Индукция по F. Ако F е $\mathcal{F}$-субституционен по клауза 1 от дефиниция 4.2.1, то H съвпада с някой от $G_1,\ldots,G_m$ и следователно H е $\mathcal{F}$-субституционен. Нека F е $\mathcal{F}$-субституционен по клауза 2 от дефиниция 4.2.1, т.е.

$$F(\vec{f})(\vec{n}) = f_i(F_0(\vec{f})(\vec{n}))$$

и твърдението е изпълнено за оператора F_0, т.е. операторът H_0, дефиниран с

$$H_0(\vec{f})(\vec{n}) = F_0(\vec{f})(G_1(\vec{f})(\vec{n}),\ldots,G_m(\vec{f})(\vec{n})),$$

е $\mathcal{F}$-субституционен. Тогава

$$\begin{aligned} H(\vec{f})(\vec{n}) &= F(\vec{f})(G_1(\vec{f})(\vec{n}),\ldots,G_m(\vec{f})(\vec{n})) \\ &= f_i(F_0(\vec{f})(G_1(\vec{f})(\vec{n}),\ldots,G_m(\vec{f})(\vec{n})) \\ &= f_i(H_0(\vec{f})(\vec{n})) \end{aligned}$$

и следователно H е $\mathcal{F}$-субституционен от клауза 2 на дефиниция 4.2.1 и индукционното предположение. Нека F е $\mathcal{F}$-субституционен по клауза 3 от дефиниция 4.2.1, т.е.

$$F(\vec{f})(\vec{n}) = f(F_1(\vec{f})(\vec{n}),\ldots,F_r(\vec{f})(\vec{n})),$$

където $f : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ е функция от $\mathcal{F}$ и твърдението е изпълнено за операторите $F_1,\ldots,F_r$, т.е. за всяко $i \in \{1,\ldots,r\}$ имаме, че операторът H_i, дефиниран с

$$H_i(\vec{f})(\vec{n}) = F_i(\vec{f})(G_1(\vec{f})(\vec{n}),\ldots,G_m(\vec{f})(\vec{n})),$$

е $\mathcal{F}$-субституционен. Тогава

$$\begin{aligned}
&H(\vec{f})(\vec{n}) = F(\vec{f})(G_1(\vec{f})(\vec{n}), \ldots, G_m(\vec{f})(\vec{n})) \\
&= f(F_1(\vec{f})(G_1(\vec{f})(\vec{n}), \ldots, G_m(\vec{f})(\vec{n})), \ldots, F_r(\vec{f})(G_1(\vec{f})(\vec{n}), \ldots, G_m(\vec{f})(\vec{n}))) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = f(H_1(\vec{f})(\vec{n}), \ldots, H_r(\vec{f})(\vec{n}))
\end{aligned}$$

и така H е $\mathcal{F}$-субституционен от клауза 3 на дефиниция 4.2.1 и индукционното предположение. □

Дефиниция 4.2.3. Нека $\mathbf{O}$ е клас от оператори. Казваме, че $\mathbf{O}$ е затворен относно *композиция на оператори*, ако всеки път когато F е оператор от тип (k, m) и $G_1, \ldots, G_k$ са оператори от тип $(l, 1)$, всичките принадлежащи на $\mathbf{O}$, (l, m)-операторът H, дефиниран с

$$H(\vec{f}) = F(G_1(\vec{f}), \ldots, G_k(\vec{f})),$$

също е от класа $\mathbf{O}$.

Твърдение 4.2.4. Класът на $\mathcal{F}$-субституционните оператори е затворен относно композиция на оператори.

Доказателство. При предположение, че операторите $F, G_1, \ldots, G_k$ са $\mathcal{F}$-субституционни, с индукция по F доказваме, че H е $\mathcal{F}$-субституционен. Ако F е $\mathcal{F}$-субституционен по клауза 1 от дефиниция 4.2.1, то същото е вярно и за H. Нека сега F има вида от клауза 2 в дефиниция 4.2.1, където операторът F_0 притежава свойството, т.е. операторът H_0, дефиниран с

$$H_0(\vec{f}) = F_0(G_1(\vec{f}), \ldots, G_k(\vec{f})),$$

е $\mathcal{F}$-субституционен. Тогава

$$\begin{aligned}
H(\vec{f})(\vec{n}) &= F(G_1(\vec{f}), \ldots, G_k(\vec{f}))(\vec{n}) \\
&= G_i(\vec{f})(F_0(G_1(\vec{f}), \ldots, G_k(\vec{f}))(\vec{n})) \\
&= G_i(\vec{f})(H_0(\vec{f})(\vec{n}))
\end{aligned}$$

и H е $\mathcal{F}$-субституционен, тъй като H_0 и G_i са $\mathcal{F}$-субституционни и можем да приложим твърдение 4.2.2. Накрая да предположим, че F има вида от клауза 3 в дефиниция 4.2.1 и операторите $F_1, \ldots, F_r$ притежават свойството, т.е. за всяко $i \in \{1, \ldots, r\}$ имаме, че операторът H_i, дефиниран с

$$H_i(\vec{f}) = F_i(G_1(\vec{f}), \ldots, G_k(\vec{f})),$$

е $\mathcal{F}$-субституционен. Тогава

$$\begin{aligned}H(\vec{f})(\vec{n}) &= F(G_1(\vec{f}),\dots,G_k(\vec{f}))(\vec{n})\\ &= f(F_1(G_1(\vec{f}),\dots,G_k(\vec{f}))(\vec{n}),\dots,F_r(G_1(\vec{f}),\dots,G_k(\vec{f}))(\vec{n}))\\ &= f(H_1(\vec{f})(\vec{n}),\dots,H_r(\vec{f})(\vec{n}))\end{aligned}$$

и H също е $\mathcal{F}$-субституционен от клауза 3 на дефиниция 4.2.1 и индукционното предположение. □

Твърдение 4.2.4 може да се обобщи по следния начин.

Твърдение 4.2.5. Нека F е $\mathcal{F}$-субституционен оператор от тип (k,m) и $G_1,\dots,G_k$ са $\mathcal{F}$-субституционни оператори от тип $(l,p+1)$. Тогава $(l,p+m)$-операторът H, дефиниран с равенството

$$H(\vec{f})(\vec{u},\vec{n}) = F(\lambda t.G_1(\vec{f})(\vec{u},t),\dots,\lambda t.G_k(\vec{f})(\vec{u},t))(\vec{n}),$$

също е $\mathcal{F}$-субституционен.

Доказателство. Индукция по F. Ако F е $\mathcal{F}$-субституционен по клауза 1 от дефиниция 4.2.1, то същото е вярно и за H. Нека сега F има вида от клауза 2 в дефиниция 4.2.1, където операторът F_0 притежава свойството, т.е. операторът H_0, дефиниран с

$$H_0(\vec{f})(\vec{u},\vec{n}) = F_0(\lambda t.G_1(\vec{f})(\vec{u},t),\dots,\lambda t.G_k(\vec{f})(\vec{u},t))(\vec{n}),$$

е $\mathcal{F}$-субституционен. Тогава

$$\begin{aligned}H(\vec{f})(\vec{u},\vec{n}) &= F(\lambda t.G_1(\vec{f})(\vec{u},t),\dots,\lambda t.G_k(\vec{f})(\vec{u},t))(\vec{n})\\ &= \lambda t.G_i(\vec{f})(\vec{u},t)(F_0(\lambda t.G_1(\vec{f})(\vec{u},t),\dots,\lambda t.G_k(\vec{f})(\vec{u},t))(\vec{n}))\\ &= \lambda t.G_i(\vec{f})(\vec{u},t)(H_0(\vec{f})(\vec{u},\vec{n}))\\ &= G_i(\vec{f})(\vec{u},H_0(\vec{f})(\vec{u},\vec{n}))\end{aligned}$$

и H е $\mathcal{F}$-субституционен, тъй като H_0 и G_i са $\mathcal{F}$-субституционни и можем да приложим клауза 1 на дефиниция 4.2.1 и твърдение 4.2.2. В последния случай, при който F има вида от клауза 3 в дефиниция 4.2.1, разсъжденията са напълно аналогични на тези в предходното твърдение 4.2.4, затова ги пропускаме. □

Следва обобщение на твърдение 1 от секция 2.2 на [30], отново с подробно доказателство.

Твърдение 4.2.6. Нека класът $\mathcal{F}$ съдържа проекциите и е затворен относно суперпозиция. Нека F е $\mathcal{F}$-субституционен оператор от тип (k,l).

Ако $f_1, \dots, f_k$ са функции от $\mathcal{T}_{m+1} \cap \mathcal{F}$, то $(m+l)$-местната функция h, дефинирана с

$$h(\vec{s}, \vec{n}) = F(\lambda t.f_1(\vec{s}, t), \dots, \lambda t.f_k(\vec{s}, t))(\vec{n}),$$

също принадлежи на класа $\mathcal{F}$. В частност, ако $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{F}$, то $h = F(f_1, \dots, f_k) \in \mathcal{F}$.

Доказателство. Индукция по F. Нека F е $\mathcal{F}$-субституционен по клауза 1 от дефиниция 4.2.1. Тогава лесно се съобразява, че функцията h е проекция и по условие принадлежи на класа $\mathcal{F}$. Нека F има вида от клауза 2 в дефиниция 4.2.1, където твърдението е вярно за оператора F_0, т.е. функцията h_0, дефинирана с

$$h_0(\vec{s}, \vec{n}) = F_0(\lambda t.f_1(\vec{s}, t), \dots, \lambda t.f_k(\vec{s}, t))(\vec{n}),$$

принадлежи на класа $\mathcal{F}$. Имаме

$$\begin{aligned} h(\vec{s}, \vec{n}) &= F(\lambda t.f_1(\vec{s}, t), \dots, \lambda t.f_k(\vec{s}, t))(\vec{n}) \\ &= \lambda t.f_i(\vec{s}, t)(F_0(\lambda t.f_1(\vec{s}, t), \dots, \lambda t.f_k(\vec{s}, t))(\vec{n})) \\ &= \lambda t.f_i(\vec{s}, t)(h_0(\vec{s}, \vec{n})) \\ &= f_i(\vec{s}, h_0(\vec{s}, \vec{n})). \end{aligned}$$

Тъй като $\mathcal{F}$ е затворен относно суперпозиция и съдържа f_i, h_0 и проекциите, $h \in \mathcal{F}$. Накрая нека F има вида от клауза 3 в дефиниция 4.2.1 и твърдението е изпълнено за операторите $F_1, \dots, F_r$, т.е. за всяко $i \in \{1, \dots, r\}$, функцията h_i, дефинирана с

$$h_i(\vec{s}, \vec{n}) = F_i(\lambda t.f_1(\vec{s}, t), \dots, \lambda t.f_k(\vec{s}, t))(\vec{n}),$$

принадлежи на класа $\mathcal{F}$. Тогава

$$\begin{aligned} &h(\vec{s}, \vec{n}) = F(\lambda t.f_1(\vec{s}, t), \dots, \lambda t.f_k(\vec{s}, t))(\vec{n}) \\ &= f(F_1(\lambda t.f_1(\vec{s}, t), \dots, \lambda t.f_k(\vec{s}, t))(\vec{n}), \dots, F_r(\lambda t.f_1(\vec{s}, t), \dots, \lambda t.f_k(\vec{s}, t))(\vec{n})) \\ &\qquad = f(h_1(\vec{s}, \vec{n}), \dots, h_r(\vec{s}, \vec{n})). \end{aligned}$$

Тъй като $f, h_1, \dots, h_r \in \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ е затворен относно суперпозиция, окончателно $h \in \mathcal{F}$. □

Следващото твърдение може да се разглежда като индикация за запазване на темпа на растеж на функциите след приложение на $\mathcal{F}$-субституционен оператор при подходящи класове $\mathcal{F}$. Всички полиноми, които разглеждаме, са с естествени коефициенти.

Твърдение 4.2.7. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции, всяка от които се мажорира от полином. Нека F е $\mathcal{F}$-субституционен оператор от тип $(k, 1)$. За всеки полином P на 2 променливи съществува полином Q на $k+1$ променливи, такъв че за всички $\vec{s} \in \mathbb{N}^k$ и за всички унарни функции $f_1, \ldots, f_k$, ако $\lambda n.P(s_j, n)$ мажорира f_j за $j = 1, \ldots, k$, то $\lambda n.Q(\vec{s}, n)$ мажорира унарната функция $F(\vec{f})$.

Доказателство. Индукция по F. Нека F е $\mathcal{F}$-субституционен по клауза 1 от дефиниция 4.2.1. Тогава за всички унарни функции $f_1, \ldots, f_k$, имаме $F(\vec{f}) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Следователно можем да изберем $Q = I^{k+1}_{k+1}$, независимо от P. Нека F има вида от клауза 2 в дефиниция 4.2.1, където твърдението е вярно за оператора F_0, т.е. за всеки полином P на 2 променливи съществува полином Q на $k+1$ променливи, такъв че за всички $\vec{s}$ и всички унарни $f_1, \ldots, f_k$, ако $\lambda n.P(s_j, n)$ мажорира f_j за $j = 1, \ldots, k$, то $\lambda n.Q(\vec{s}, n)$ мажорира $F_0(\vec{f})$. Ще докажем, че твърдението е изпълнено за F. Нека P е полином на 2 променливи и да изберем полином Q_0 на $k+1$ променливи, съответен на оператора F_0. Нека $\vec{s} \in \mathbb{N}^k$ и $f_1, \ldots, f_k$ са унарни функции, такива че $\lambda n.P(s_j, n)$ мажорира f_j за $j = 1, \ldots, k$. За всяко $n \in \mathbb{N}$ имаме

$$\begin{aligned}
F(\vec{f})(n) &= f_i(F_0(\vec{f})(n)) \\
&\leq P(s_i, F_0(\vec{f})(n)) \\
&\leq P(s_i, Q_0(\vec{s}, n)).
\end{aligned}$$

Използвахме, че $\lambda n.P(s_i, n)$ мажорира f_i, че P е растяща по всички аргументи, и че при горните предположения $\lambda n.Q_0(\vec{s}, n)$ мажорира $F_0(\vec{f})$. При това положение можем да изберем

$$Q(\vec{s}, n) = P(s_i, Q_0(\vec{s}, n)).$$

Накрая, нека F е $\mathcal{F}$-субституционен съгласно клауза 3 в дефиниция 4.2.1 и твърдението е изпълнено за операторите $F_1, \ldots, F_r$, т.е. за всеки полином P на 2 променливи съществуват полиноми $Q_1, \ldots, Q_r$ на $k+1$ променливи, такива че за всички $\vec{s}$ и всички унарни $f_1, \ldots, f_k$, ако $\lambda n.P(s_j, n)$ мажорира f_j за $j = 1, \ldots, k$, то $\lambda n.Q_i(\vec{s}, n)$ мажорира $F_i(\vec{f})$ за $i = 1, \ldots, r$. Ще докажем, че твърдението е изпълнено за F. Да изберем полином R, който мажорира функцията f. Нека P е полином на 2 променливи и да изберем полиноми $Q_1, \ldots, Q_r$ на $k+1$ променливи, съответни на операторите $F_1, \ldots, F_r$ (те съществуват от индукционното предположение). Нека $\vec{s} \in \mathbb{N}^k$ и $f_1, \ldots, f_k$ са унарни функции, такива че $\lambda n.P(s_j, n)$ мажорира f_j за $j = 1, \ldots, k$. За всяко $n \in \mathbb{N}$ имаме

$$\begin{aligned} F(\vec{f})(n) &= f(F_1(\vec{f})(n), \ldots, F_r(\vec{f})(n)) \\ &\leq R(F_1(\vec{f})(n), \ldots, F_r(\vec{f})(n)) \\ &\leq R(Q_1(\vec{s}, n), \ldots, Q_r(\vec{s}, n)). \end{aligned}$$

Използвахме, че R мажорира f, че R е растяща по всички аргументи, и че при направените предположения $\lambda n.Q_i(\vec{s}, n)$ мажорира $F_i(\vec{f})$ за $i = 1, \ldots, r$. Така можем да изберем

$$Q(\vec{s}, n) = R(Q_1(\vec{s}, n), \ldots, Q_r(\vec{s}, n)). \qquad \square$$

Едно много важно свойство на изчислимите оператори е тяхната непрекъснатост.

Дефиниция 4.2.8. Нека F е оператор от тип (k, m). Казваме, че F е *непрекъснат*, ако е изпълнено следното: за всички $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{T}_1$ и $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$ съществува $u \in \mathbb{N}$, такова че $F(\vec{g})(\vec{n}) = F(\vec{f})(\vec{n})$, винаги когато $g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{T}_1$ и $g_1(t) = f_1(t)$, $\ldots$, $g_k(t) = f_k(t)$ за всички $t \leq u$.

Лесно се вижда, че следната модифицирана дефиниция е еквивалентна на предходната.

Дефиниция 4.2.9. Нека F е оператор от тип (k, m). Казваме, че F е *непрекъснат*, ако е изпълнено следното: за всички $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{T}_1$ и $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$ съществува крайно множество $A \subseteq \mathbb{N}$, такова че $F(\vec{g})(\vec{n}) = F(\vec{f})(\vec{n})$, винаги когато $g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{T}_1$ и $g_1(t) = f_1(t)$, $\ldots$, $g_k(t) = f_k(t)$ за всички $t \in A$.

Действително, ако F е непрекъснат според дефиниция 4.2.8, можем да вземем $A = \{t | t \leq u\}$. Ако F е непрекъснат според дефиниция 4.2.9, можем да вземем u да бъде по-голямо от всички числа в A.

Сега ще покажем, че $\mathcal{F}$-субституционните оператори притежават усилена форма на непрекъснатост.

Твърдение 4.2.10 (за силна непрекъснатост)**.** Нека F е $\mathcal{F}$-субституционен оператор от тип (k, m). Съществува естествено число v със следното свойство: за всички $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{T}_1$ и $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$ съществува крайно множество $A \subseteq \mathbb{N}$ с не повече от v елемента, такова че $F(\vec{g})(\vec{n}) = F(\vec{f})(\vec{n})$, винаги когато $g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{T}_1$ и $g_1(t) = f_1(t)$, $\ldots$, $g_k(t) = f_k(t)$ за всички $t \in A$.

Доказателство. Неформално числото v представлява броя на срещанията на функционални символи за аргументите в израза за оператора F. Формалното доказателство е с индукция по F. Ако F е $\mathcal{F}$-субституционен по клауза 1 от дефиниция 4.2.1, то можем да вземем $v = 0$, тъй като равенството $F(\vec{g})(\vec{n}) = F(\vec{f})(\vec{n})$ е изпълнено за всички унарни функции $g_1, \ldots, g_k, f_1, \ldots, f_k$. Нека F е $\mathcal{F}$-субституционен съгласно клауза 2 на дефиниция 4.2.1, като твърдението е изпълнено за оператора F_0, т.е. съществува естествено число v_0 със свойството, че за всички $f_1, \ldots, f_k$ и $\vec{n}$ съществува множество A_0 с кардиналност най-много v_0, такова че $F_0(\vec{g})(\vec{n}) = F_0(\vec{f})(\vec{n})$, винаги когато $g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{T}_1$ и $g_1(t) = f_1(t), \ldots, g_k(t) = f_k(t)$ за всички $t \in A_0$. Да изберем едно такова v_0. Ще покажем, че твърдението е изпълнено за оператора F при $v = v_0 + 1$. Нека $f_1, \ldots, f_k$ са унарни функции и $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$. Да изберем крайно множество A_0 с кардиналност не повече от v_0, което притежава горното свойство за оператора F_0. Да вземем $A = A_0 \cup \{F_0(\vec{f})(\vec{n})\}$. Разбира се, A има кардиналност най-много v. Нека $g_1, \ldots, g_k$ са унарни функции, такива че $g_1(t) = f_1(t), \ldots, g_k(t) = f_k(t)$ за всички $t \in A$. Тогава, в частност, $g_1(t) = f_1(t), \ldots, g_k(t) = f_k(t)$ за всички $t \in A_0$, тъй като $A_0 \subseteq A$. От свойството на A_0 получаваме

$$F_0(\vec{g})(\vec{n}) = F_0(\vec{f})(\vec{n}).$$

Също така, $F_0(\vec{f})(\vec{n}) \in A$, така че $g_i(F_0(\vec{f})(\vec{n})) = f_i(F_0(\vec{f})(\vec{n}))$. Следователно

$$F(\vec{f})(\vec{n}) = f_i(F_0(\vec{f})(\vec{n})) = g_i(F_0(\vec{f})(\vec{n})) = g_i(F_0(\vec{g})(\vec{n})) = F(\vec{g})(\vec{n}).$$

Накрая, нека F е $\mathcal{F}$-субституционен според клауза 3 от дефиниция 4.2.1 и твърдението е изпълнено за операторите $F_1, \ldots, F_r$. За всяко $i \in \{1, \ldots, r\}$ да изберем естествено число v_i със свойството, че за всички $f_1, \ldots, f_k$ и $\vec{n}$ съществува множество A_i с кардиналност най-много v_i, такова че $F_i(\vec{g})(\vec{n}) = F_i(\vec{f})(\vec{n})$, винаги когато $g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{T}_1$ и $g_1(t) = f_1(t), \ldots, g_k(t) = f_k(t)$ за всички $t \in A_i$. Ще покажем, че твърдението е изпълнено за оператора F при $v = v_1 + \ldots + v_r$. Нека $f_1, \ldots, f_k$ са унарни функции и $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$. За всяко $i \in \{1, \ldots, r\}$ да изберем крайно множество A_i с кардиналност не повече от v_i, което притежава горното свойство за оператора F_i. Да вземем $A = A_1 \cup \ldots \cup A_r$. Разбира се, A има кардиналност най-много v. Нека $g_1, \ldots, g_k$ са унарни функции, такива че $g_1(t) = f_1(t), \ldots, g_k(t) = f_k(t)$ за всички $t \in A$. Тогава, в частност, $g_1(t) = f_1(t), \ldots, g_k(t) = f_k(t)$ за всички $t \in A_i$, тъй като $A_i \subseteq A$. От свойството на A_i получаваме

$$F_i(\vec{g})(\vec{n}) = F_i(\vec{f})(\vec{n})$$

за всяко $i \in \{1, \ldots, r\}$. Следователно

$$F(\vec{f})(\vec{n}) = f(F_1(\vec{f})(\vec{n}), \ldots, F_r(\vec{f})(\vec{n})) = f(F_1(\vec{g})(\vec{n}), \ldots, F_r(\vec{g})(\vec{n})) = F(\vec{g})(\vec{n}).$$

□

Да подчертаем, че силната непрекъснатост от твърдение 4.2.10 е наистина по-силна от непрекъснатостта в дефиниция 4.2.9, тъй като множеството A може да зависи от избора на $f_1, \ldots, f_k$ и $\vec{n}$, но границата v за кардиналността на A не може да зависи от този избор.

Пример 4.2.11. Операторът F от тип $(1,1)$ за ограничена минимизация, дефиниран с $F(f)(n) = \mu_{t \leq n}[f(t) = 0]$, не е $\mathcal{F}$-субституционен за никой клас от функции $\mathcal{F}$. Действително, ще покажем, че F не удовлетворява свойството силна непрекъснатост от твърдение 4.2.10. Допускаме, че има естествено число v със свойството от 4.2.10 за оператора F и избираме едно такова v. Нека f е унарната константа 1 и нека n е естествено число, такова че $n \geq v$. Да изберем крайно множество A с не повече от v елемента, такова че $F(f)(n) = F(g)(n)$, винаги когато $f(t) = g(t)$ за всяко $t \in A$. Множеството $\{t \in \mathbb{N} | t \leq n\}$ има $n + 1 > v$ елементи. Следователно можем да изберем $t_0 \in \mathbb{N}$, такова че $t_0 \leq n$ и $t_0 \notin A$. Сега противоречието се извежда лесно. Да изберем унарна функция g, такава че $g(t) = f(t) = 1$ при $t \neq t_0$ и $g(t_0) = 0$. Тогава $f(t) = g(t)$ за всяко $t \in A$, но $F(f)(n) = n + 1 \neq t_0 = F(g)(n)$, което е абсурдно от свойството на A. Аналогично, с малко по-различен избор на f и g, може да се покаже, че $(1,1)$-операторите ограничен минимум, ограничен максимум, ограничена сума и ограничено произведение не са $\mathcal{F}$-субституционни. Съществено е да отбележим, обаче, че всички оператори, споменати в този пример, са елементарни по Калмар (и следователно изчислими и непрекъснати). □

В края на секцията ще докажем теорема за равномерност за $\mathcal{F}$-субституционните оператори. Следваме изложението в доказателството на теорема 1 от статията [27] на Скордев, която представлява теорема за равномерност за $\mathcal{F}$-субституционните оператори от тип $(k,1)$.

Дефиниция 4.2.12. Нека F е (k,m)-оператор. Казваме, че $(1,m)$-операторът Ω *определя равномерна граница за* F, ако за всички $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$ и за всяка монотонно растяща унарна функция g, ако унарните функции $f_1, \ldots, f_k, f'_1, \ldots, f'_k$ се мажорират от g и

$$f_1(t) = f'_1(t), \ \ldots \ , f_k(t) = f'_k(t)$$

за всички $t \leq \Omega(g)(\vec{n})$, то

$$F(f_1, \ldots, f_k)(\vec{n}) = F(f'_1, \ldots, f'_k)(\vec{n}).$$

Дефиниция 4.2.13. Класът от функции $\mathcal{F}$ изпълнява *условието за мажориране*, ако за всяко естествено число m и функция $f \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{F}$ съществува функция $\widetilde{f} \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{F}$, която мажорира f и е монотонно растяща по отношение на всичките си аргументи.

Например от теорема 2.3.3 класовете $\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^1$ и $\mathcal{E}^2$ удовлетворяват условието за мажориране. Разбира се, това е вярно и за $\mathcal{M}^2$ и $\mathcal{L}^2$, тъй като $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{L}^2 \subseteq \mathcal{E}^2$ и $\mathcal{M}^2$ съдържа полиномите с естествени коефициенти. Ясно е, че всеки клас от функции $\mathcal{F}$, който е затворен относно ограничен максимум, удовлетворява условието за мажориране.

Лема 4.2.14. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции, който удовлетворява условието за мажориране, и $k, m \in \mathbb{N}$. За всеки $\mathcal{F}$-субституционен (k, m)-оператор F съществува $\mathcal{F}$-субституционен $(1, m)$ оператор F^d, такъв че за всички $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^k$ и всяка монотонно растяща функция $g \in \mathcal{T}_1$, която мажорира $f_1, \ldots, f_k$, имаме че $F^d(g)$ мажорира $F(\vec{f})$.

Доказателство. Индукция по F. Ако F е $\mathcal{F}$-субституционен според клауза 1 на дефиниция 4.2.1, т.е. $F(\vec{f}) = h$ за m-местна проекция h, то можем да изберем $F^d(g) = h$. Нека F е $\mathcal{F}$-субституционен според клауза 2 на дефиниция 4.2.1, т.е.

$$F(\vec{f})(\vec{n}) = f_i(F_0(\vec{f})(\vec{n}))$$

и твърдението на лемата е изпълнено за F_0. Да изберем съответен $\mathcal{F}$-субституционен $(1, m)$-оператор F_0^d. Ще покажем, че $(1, m)$-операторът $\mathcal{F}^d$, дефиниран с

$$F^d(g)(\vec{n}) = g(F_0^d(g)(\vec{n}))$$

удовлетворява условията за оператора F. Разбира се, F^d е $\mathcal{F}$-субституционен. Нека $f_1, \ldots, f_k, g \in \mathcal{T}_1$ са функции, такива че g е монотонно растяща и g мажорира $f_1, \ldots, f_k$. Тогава $F_0^d(g)$ мажорира $F_0(\vec{f})$. За всички $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$ имаме

$$F(\vec{f})(\vec{n}) = f_i(F_0(\vec{f})(\vec{n})) \leq g(F_0(\vec{f})(\vec{n})) \leq g(F_0^d(g)(\vec{n})) = F^d(g)(\vec{n}),$$

т.е. $F^d(g)$ мажорира $F(\vec{f})$. Накрая, нека F е $\mathcal{F}$-субституционен по клауза 3 от дефиниция 4.2.1, т.е.

$$F(\vec{f})(\vec{n}) = f(F_1(\vec{f})(\vec{n}), \ldots, F_r(\vec{f})(\vec{n}))$$

за функция $f \in \mathcal{T}_r \cap \mathcal{F}$, и нека твърдението е изпълнено за операторите $F_1, \ldots, F_r$. Да изберем съответни $\mathcal{F}$-субституционни $(1, m)$-оператори $F_1^d, \ldots, F_r^d$. Тъй като $\mathcal{F}$ удовлетворява условието за мажориране, можем да изберем $\widetilde{f} \in \mathcal{T}_r \cap \mathcal{F}$, която мажорира f и е монотонно растяща по всичките си аргументи. Дефинираме $(1, m)$-оператор F^d с

$$F^d(g)(\vec{n}) = \widetilde{f}(F_1^d(g)(\vec{n}), \ldots, F_r^d(g)(\vec{n})).$$

Очевидно е, че F^d е $\mathcal{F}$-субституционен. Нека $f_1, \ldots, f_k, g \in \mathcal{T}_1$ и g е монотонно растяща, която мажорира $f_1, \ldots, f_k$. Тогава за всяко $j \in \{1, \ldots, r\}$, $F_j^d(g)$ мажорира $F_j(\vec{f})$ и за всички $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$ е изпълнено

$$\begin{aligned} F(\vec{f})(\vec{n}) = f(F_1(\vec{f})(\vec{n}), \ldots, F_r(\vec{f})(\vec{n})) \\ \leq \widetilde{f}(F_1(\vec{f})(\vec{n}), \ldots, F_r(\vec{f})(\vec{n})) \\ \leq \widetilde{f}(F_1^d(g)(\vec{n}), \ldots, F_r^d(g)(\vec{n})) = F^d(g)(\vec{n}), \end{aligned}$$

т.е. $F^d(g)$ мажорира $F(\vec{f})$, с което лемата е доказана. $\square$

Теорема 4.2.15 (за равномерност)**.** Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции, който удовлетворява условието за мажориране и съдържа бинарния максимум. Нека $k, m \in \mathbb{N}$. За произволен $\mathcal{F}$-субституционен (k, m)-оператор F съществува $\mathcal{F}$-субституционен $(1, m)$-оператор Ω, който определя равномерна граница за F.

Доказателство. Индукция по F. Нека F има вида от клауза 1 на дефиниция 4.2.1, т.е.

$$F(\vec{f}) = h$$

за някоя m-местна проекция h. Тогава равенството

$$F(f_1, \ldots, f_k)(\vec{n}) = F(f'_1, \ldots, f'_k)(\vec{n})$$

е изпълнено за произволно $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$ и унарни функции $f_1, \ldots, f_k, f'_1, \ldots, f'_k$, тъй като F не зависи от своите аргументи. При това положение Ω може да се избере произволно, стига да е $\mathcal{F}$-субституционен, например

$$\Omega(g) = h.$$

Нека F е $\mathcal{F}$-субституционен от клауза 2 на дефиниция 4.2.1, т.е.

$$F(\vec{f})(\vec{n}) = f_i(F_0(\vec{f})(\vec{n}))$$

и твърдението на лемата е изпълнено за F_0. Да изберем $\mathcal{F}$-субституционен $(1, m)$-оператор Ω_0, който определя равномерна граница за F_0. Също така да изберем $\mathcal{F}$-субституционен $(1, m)$-оператор F_0^d, съответен на F_0, съгласно лема 4.2.14. Ще покажем, че $(1, m)$-операторът Ω, дефиниран с

$$\Omega(g)(\vec{n}) = \max(\Omega_0(g)(\vec{n}), F_0^d(g)(\vec{n})),$$

определя равномерна граница за F. Разбира се, Ω е $\mathcal{F}$-субституционен, тъй като бинарният $\max$ принадлежи на $\mathcal{F}$. Нека $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$ и $f_1, \ldots, f_k, f'_1, \ldots, f'_k, g$

са унарни функции, такива че g мажорира $f_1, \dots, f_k, f'_1, \dots, f'_k$ и g е монотонно растяща. Нека още

$$f_1(t) = f'_1(t),\ \dots\ , f_k(t) = f'_k(t)$$

за всички $t \leq \Omega(g)(\vec{n})$. Тъй като $\Omega_0(g)(\vec{n}) \leq \Omega(g)(\vec{n})$ и Ω_0 определя равномерна граница за F_0,

$$F_0(f_1, \dots, f_k)(\vec{n}) = F_0(f'_1, \dots, f'_k)(\vec{n}).$$

Също така, $F_0^d(g)$ мажорира $F_0(f_1, \dots, f_k)$ и

$$f_i(F_0(f_1, \dots, f_k)(\vec{n})) = f'_i(F_0(f_1, \dots, f_k)(\vec{n})),$$

тъй като $F_0(f_1, \dots, f_k)(\vec{n}) \leq F_0^d(g)(\vec{n}) \leq \Omega(g)(\vec{n})$. Тогава

$$\begin{aligned} F(f_1, \dots, f_k)(\vec{n}) = f_i(F_0(f_1, \dots, f_k)(\vec{n})) &= f'_i(F_0(f_1, \dots, f_k)(\vec{n})) \\ &= f'_i(F_0(f'_1, \dots, f'_k)(\vec{n})) = F(f'_1, \dots, f'_k)(\vec{n}). \end{aligned}$$

Накрая, нека F е $\mathcal{F}$-субституционен според клауза 3 на дефиниция 4.2.1, т.е.

$$F(\vec{f})(\vec{n}) = f(F_1(\vec{f})(\vec{n}), \dots, F_r(\vec{f})(\vec{n}))$$

за функция $f \in \mathcal{T}_r \cap \mathcal{F}$, и нека твърдението е изпълнено за операторите $F_1, \dots, F_r$. Да изберем съответни $\mathcal{F}$-субституционни $(1, m)$-оператори $\Omega_1, \dots, \Omega_r$, които определят равномерна граница за $F_1, \dots, F_r$, съответно. Да дефинираме $(1, m)$-оператор Ω с

$$\Omega(g)(\vec{n}) = \max(\dots \max(\max(\Omega_1(g)(\vec{n}), \Omega_2(g)(\vec{n})), \Omega_3(g)(\vec{n})) \dots, \Omega_r(g)(\vec{n})).$$

Преди всичко, Ω е $\mathcal{F}$-субституционен, тъй бинарният $\max$ принадлежи на $\mathcal{F}$. Ще покажем, че Ω определя равномерна граница за F. Нека $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$ и $f_1, \dots, f_k$, $f'_1, \dots, f'_k, g$ са унарни функции, такива че g мажорира $f_1, \dots, f_k$, $f'_1, \dots, f'_k$ и g е монотонно растяща. Нека още

$$f_1(t) = f'_1(t),\ \dots\ , f_k(t) = f'_k(t)$$

за всички $t \leq \Omega(g)(\vec{n})$. Тогава за всяко $j \in \{1, \dots, r\}$ имаме $\Omega_j(g)(\vec{n}) \leq \Omega(g)(\vec{n})$ и следователно

$$F_j(f_1, \dots, f_k)(\vec{n}) = F_j(f'_1, \dots, f'_k)(\vec{n}),$$

тъй като Ω_j определя равномерна граница за F_j. Оттук получаваме

$$\begin{aligned} F(f_1, \dots, f_k)(\vec{n}) &= f(F_1(f_1, \dots, f_k)(\vec{n}), \dots, F_r(f_1, \dots, f_k)(\vec{n})) \\ &= f(F_1(f'_1, \dots, f'_k)(\vec{n}), \dots, F_r(f'_1, \dots, f'_k)(\vec{n})) = F(f'_1, \dots, f'_k)(\vec{n}). \quad \square \end{aligned}$$

4.3 Равномерна $\mathcal{F}$-изчислимост на реална функция

След като дефинирахме важния клас на $\mathcal{F}$-субституционните оператори и доказахме някои техни свойства, сме готови да продължим със съответните приложения в работата с реални числа и функции.

Понякога ще се нуждаем от по-специален вид имена за реални числа. За да гарантираме тяхното съществуване, както и за други цели в глава 5, ще бъде полезна функцията $ehelp : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$, дефинирана с

$$ehelp(p,q,r,n) = \left\lfloor (n+1)\frac{p \dot{-} q}{r+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Ясно е, че $ehelp \in \mathcal{M}^2$. Нейното основно свойство формулираме в отделна бележка. Доказателството е непосредствено.

Бележка 4.3.1. За произволни естествени числа p, q, r, n имаме

$$ehelp(p,q,r,n).ehelp(q,p,r,n) = 0$$

и е в сила неравенството

$$\left| \frac{ehelp(p,q,r,n) - ehelp(q,p,r,n)}{n+1} - \frac{p-q}{r+1} \right| \leq \frac{1}{2(n+1)}.$$

Преходът към по-специалните имена се осъществява чрез $(3,1)$-оператора K от секция 1.3 в [30], дефиниран с

$$K(f,g,h)(n) = ehelp(f(2n+1), g(2n+1), h(2n+1), n).$$

Ясно е, че K е $\mathcal{M}^2$-субституционен. Неговите най-важни свойства формулираме в следващата лема.

Лема 4.3.2. За всички унарни функции f, g, h и естествено число n поне едно от числата $K(f,g,h)(n)$ и $K(g,f,h)(n)$ е 0. Ако (f,g,h) е име на реално число ξ, то тройката $(K(f,g,h), K(g,f,h), \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ също е име на ξ.

Доказателство. Следва от бележка 4.3.1. Нека (f,g,h) е име на $\xi \in \mathbb{R}$. Тогава за естествено число n

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{K(f,g,h)(n) - K(g,f,h)(n)}{n+1} - \xi \right| \\
&\quad \leq \left| \frac{K(f,g,h)(n) - K(g,f,h)(n)}{n+1} - \frac{f(2n+1) - g(2n+1)}{h(2n+1)+1} \right| \\
&\qquad + \left| \frac{f(2n+1) - g(2n+1)}{h(2n+1)+1} - \xi \right| < \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Следователно $(K(f,g,h), K(g,f,h), \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е име на ξ. □

Преминаваме към централното понятие за относителна изчислимост на реална функция в тази секция.

Дефиниция 4.3.3. Реалната функция $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^k$ е *равномерно $\mathcal{F}$-изчислима*, ако тя е равномерно $\mathbf{O}$-изчислима, където $\mathbf{O}$ е класът на $\mathcal{F}$-субституционните оператори.

Ако $\mathcal{F}$ се състои само от рекурсивни функции, то $\mathcal{F}$-субституционните оператори са изчислими и следователно всяка равномерно $\mathcal{F}$-изчислима реална функция е свръхизчислима.

Тъй като класът на $\mathcal{F}$-субституционните оператори е затворен относно композиция на оператори, класът на равномерно $\mathcal{F}$-изчислимите реални функции е затворен относно композиция. Също така, ако $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, то всеки $\mathcal{F}$-субситуционен оператор е $\mathcal{G}$-субституционен и следователно всяка равномерно $\mathcal{F}$-изчислима реална функция е също равномерно $\mathcal{G}$-изчислима. Произволна рестрикция на равномерно $\mathcal{F}$-изчислима реална функция също е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима (със същата изчислителна система, както вече отбелязахме).

Ще дадем някои прости примери от [30].

За $i \in \{1,\dots,k\}$, функцията $\theta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, дефинирана с $\theta(\xi_1,\dots,\xi_k) = \xi_i$, е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима относно всеки клас от функции $\mathcal{F}$. За нея съществува изчислителна система от проекционни оператори. По-точно, ако операторите F, G, H от тип $(3k, 1)$ са дефинирани с

$$F(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k) = f_i,$$

$$G(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k) = g_i,$$

$$H(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k) = h_i,$$

то (F, G, H) е изчислителна система за θ, състояща се от $\mathcal{F}$-субституционни оператори.

Реалната функция $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинирана с $\theta(\xi) = -\xi$, е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима относно всеки клас от функции $\mathcal{F}$. За нея също има изчислителна система от проекционни оператори. По-точно, операторите F, G, H от тип $(3, 1)$, дефинирани с

$$F(f,g,h) = g, \quad G(f,g,h) = f, \quad H(f,g,h) = h,$$

са такива, че (F, G, H) е изчислителна система за θ, състояща се от $\mathcal{F}$-субституционни оператори.

Реалната функция $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинирана с $\theta(\xi) = |\xi|$, е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима. Операторите F, G, H от тип $(3, 1)$, дефинирани с

$$F(f, g, h)(n) = |f(n) - g(n)|, \quad G(f, g, h)(n) = 0, \quad H(f, g, h) = h,$$

са $\mathcal{M}^2$-субституционни и (F, G, H) е изчислителна система за θ, както следва лесно от неравенството ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$||\alpha| - |\xi|| \leq |\alpha - \xi|.$$

Нека α е $\mathcal{F}$-изчислимо реално число. Константната реална функция $\theta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, дефинирана с $\theta(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \alpha$, е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима. За нея съществува изчислителна система от константни оператори. По-точно, да изберем име $(f, g, h) \in \mathcal{F}^3$ на α. Тогава операторите F, G, H от тип $(3k, 1)$, дефинирани с

$$F(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k) = f,$$
$$G(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k) = g,$$
$$H(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k) = h,$$

са $\mathcal{F}$-субституционни и (F, G, H) е изчислителна система за θ.

Дефиниция 4.3.4 ([30]). Един клас от функции $\mathcal{F}$ е *удобен*, ако $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ е затворен относно суперпозиция.

Ясно е, че всеки удобен клас е приемлив (виж секция 3.1).

Да фиксираме удобен клас от функции $\mathcal{F}$.

Разбира се, тъй като $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{F}$, всяка равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима реална функция е също равномерно $\mathcal{F}$-изчислима.

Нека k е естествено число и $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^k$ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима реална функция. Да изберем изчислителна система (F, G, H) за θ от $\mathcal{F}$-субституционни оператори. Нека $\xi_1, \ldots, \xi_k$ са $\mathcal{F}$-изчислими реални числа, такива че $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in D$. За всяко $i \in \{1, \ldots, k\}$ да изберем име $(f_i, g_i, h_i) \in \mathcal{F}^3$ на ξ_i. Тогава тройката (f, g, h) е име на $\theta(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, където

$$f = F(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k),$$

$$g = G(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k),$$
$$h = H(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k).$$

При това, от твърдение 4.2.6, $f, g, h \in \mathcal{F}$. Получихме, че $\theta(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ притежава име, състоящо се от функции във $\mathcal{F}$. По този начин $\theta(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ е

$\mathcal{F}$-изчислимо реално число. Да обобщим – за удобни класове $\mathcal{F}$, равномерно $\mathcal{F}$-изчислимите реални функции запазват $\mathcal{F}$-изчислимостта на реалните числа.

В 3.2.1 ние вече дефинирахме понятие за изчислимост на реални функции с дефиниционни области, които са подмножества на $\mathbb{N}^k$. От друга страна, ние имаме дефиницията 4.3.3 чрез изчислителни системи. Както може да се очаква, двете дефиниции не са в конфликт.

Твърдение 4.3.5. Нека $\mathcal{F}$ е удобен клас от функции и $k \in \mathbb{N}$. Реалната функция $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{N}^k$ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима тогава и само тогава, когато θ е $\mathcal{F}$-изчислима в смисъла на дефиниция 3.2.1.

Доказателство. Базира се на абзаца в секция 3.1, който е непосредствено преди дефиниция 3.1.5. Нека θ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима и (F, G, H) е изчислителна система на θ, която се състои от $\mathcal{F}$-субституционни оператори. Дефинираме функциите f, g, h по следния начин:

$$f(t, s_1, \ldots, s_k) = F(\lambda n.s_1, \lambda n.0, \lambda n.0, \ldots, \lambda n.s_k, \lambda n.0, \lambda n.0)(t),$$

$$g(t, s_1, \ldots, s_k) = G(\lambda n.s_1, \lambda n.0, \lambda n.0, \ldots, \lambda n.s_k, \lambda n.0, \lambda n.0)(t),$$

$$h(t, s_1, \ldots, s_k) = H(\lambda n.s_1, \lambda n.0, \lambda n.0, \ldots, \lambda n.s_k, \lambda n.0, \lambda n.0)(t).$$

Тогава $f, g, h \in \mathcal{F}$ от твърдение 4.2.5. За всяко естествено число s наредената тройка $(\lambda n.s, \lambda n.0, \lambda n.0)$ е име на s. Следователно за всяко $\vec{s} \in D$ $(\lambda t.f(t, \vec{s}), \lambda t.g(t, \vec{s}), \lambda t.h(t, \vec{s}))$ е име на $\theta(\vec{s})$ и значи θ е $\mathcal{F}$-изчислима. Обратно, нека $f, g, h \in \mathcal{F}$ са $(k+1)$-местни функции, които са свидетели за θ от дефиниция 3.2.1. Дефинираме операторите F, G, H от тип $(3k, 1)$ по следния начин:

$$F(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k)(t) = f\left(t, \left\lfloor \frac{|f_1(1) - g_1(1)|}{h_1(1)+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{|f_k(1) - g_k(1)|}{h_k(1)+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right),$$

$$G(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k)(t) = g\left(t, \left\lfloor \frac{|f_1(1) - g_1(1)|}{h_1(1)+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{|f_k(1) - g_k(1)|}{h_k(1)+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right),$$

$$H(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k)(t) = h\left(t, \left\lfloor \frac{|f_1(1) - g_1(1)|}{h_1(1)+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{|f_k(1) - g_k(1)|}{h_k(1)+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right).$$

Ясно е, че F, G, H са $\mathcal{F}$-субституционни. Ако (f, g, h) е име на естествено число s, то $s = \left\lfloor \frac{|f(1) - g(1)|}{h(1)+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor$. Оттук веднага следва, че (F, G, H) е изчислителна система за θ. Така θ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима. □

Лесно се съобразява, че твърдението е вярно и при $\mathcal{F} = \mathcal{E}^1$.

По-нататък си поставяме за цел да покажем, че за всяко естествено число $n \geq 2$, функцията $\theta_n : D \to \mathbb{R}$, където $D = [0, +\infty)$ при четно n и $D = \mathbb{R}$ при нечетно n, дефинирана с $\theta_n(\xi) = \sqrt[n]{\xi}$, е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима. Това ще стане на няколко стъпки, в които обобщаваме доказателството от [30] при $n = 2$.

Лема 4.3.6. За всяко $n \geq 2$ функцията $\phi_n : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, дефинирана с

$$\phi_n(x_1, x_2) = \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}}$$

за $x_1, x_2 \in \mathbb{N}, x_2 \neq 0$, е $\mathcal{M}^2$-изчислима в смисъла на дефиниция 3.2.1.

Доказателство. Фиксираме $n \geq 2$. Нека R е релацията, дефинирана с

$$R(y, x_1, x_2, t) \iff (y+1)^n.x_2 > (t+1)^n.x_1.$$

Ясно е, че R е $\mathcal{M}^2$-релация и, че за всички естествени числа y, x_1, x_2, t с $x_2 \neq 0$ имаме

$$R(y, x_1, x_2, t) \iff y + 1 > (t+1)\sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Оттук е очевидно, че за всички x_1, x_2, t с $x_2 \neq 0$ съществува $y \in \mathbb{N}$, такова че $R(y, x_1, x_2, t)$.

Да фиксираме естествени числа x_1, x_2, t, $x_2 \neq 0$. Нека y е най-малкото естествено число, такова че $R(y, x_1, x_2, t)$. Ще покажем, че $y \leq (t+1).x_1$. Действително при $y = 0$ това е очевидно. При $y > 0$ от избора на y имаме $\neg R(y-1, x_1, x_2, t)$, т.е.

$$(y-1) + 1 = y \leq (t+1)\sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Но при произволни $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ с $x_2 \neq 0$ се вижда лесно, че $\sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}} \leq x_1$, така че $y \leq (t+1).x_1$.

С използване на доказаното неравенство се вижда, че $y = a(x_1, x_2, t)$, където функцията $a : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ е дефинирана с

$$a(x_1, x_2, t) = \begin{cases} \mu_{y \leq (t+1).x_1} R(y, x_1, x_2, t) & \text{ако } x_2 \neq 0, \\ 0 & \text{ако } x_2 = 0. \end{cases}$$

Ясно е, че $a \in \mathcal{M}^2$. Нашата непосредствена цел е да покажем неравенството

$$\left| \frac{a(x_1, x_2, t)}{t+1} - \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}} \right| < \frac{1}{t+1}$$

за всички естествени числа x_1, x_2, t с $x_2 \neq 0$. Тогава можем да вземем $g(x_1, x_2, t) = 0$ и $h(x_1, x_2, t) = t$ и по този начин да удовлетворим изискванията в дефиниция 3.2.1 с функциите a, g, h. В горните означения това неравенство е еквивалентно на двете неравенства

$$(t+1)\sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}} - 1 < y < (t+1)\sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}} + 1.$$

Първото неравенство е изпълнено, тъй като имаме $R(y, x_1, x_2, t)$. Второто неравенство е очевидно изпълнено при $y = 0$. Ако $y > 0$, то от избора на y, $\neg R(y-1, x_1, x_2, t)$, т.е.

$$y \leq (t+1)\sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}},$$

от което тривиално следва второто неравенство. □

Лема 4.3.7. За всяко $n \geq 2$ реалната функция $\psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинирана с $\psi_n(\xi) = \sqrt[n]{|\xi|}$, е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима.

Доказателство. Фиксираме $n \geq 2$. Да вземем функцията $a \in \mathcal{M}^2$ от доказателството на предходната лема. Знаем, че е изпълнено неравенството

$$\left|\frac{a(x_1, x_2, t)}{t+1} - \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}}\right| < \frac{1}{t+1} \tag{4.3.1}$$

за всички естествени числа x_1, x_2, t с $x_2 \neq 0$. Дефинираме операторите F, G, H от тип $(3, 1)$ с равенствата

$$F(f, g, h)(t) = a(m_1, m_2, 2t+1), \quad G(f, g, h)(t) = 0, \quad H(f, g, h)(t) = 2t+1,$$

където $m_1 = |f((2t+2)^n \dot{-} 1) - g((2t+2)^n \dot{-} 1)|, m_2 = h((2t+2)^n \dot{-} 1) + 1$. Ясно е, че F, G и H са $\mathcal{M}^2$-субституционни. Ще покажем, че (F, G, H) е изчислителна система за ψ_n. Нека ξ е реално число и $(f, g, h) \in \mathcal{T}_1^3$ е име на ξ. Ще покажем, че $(F(f, g, h), G(f, g, h), H(f, g, h))$ е име на $\psi_n(\xi) = \sqrt[n]{|\xi|}$. Наистина, нека $t \in \mathbb{N}$ и m_1, m_2 са дефинирани както по-горе. Тогава

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{F(f,g,h)(t) - G(f,g,h)(t)}{H(f,g,h)(t)+1} - \psi_n(\xi)\right| = \left|\frac{a(m_1, m_2, 2t+1)}{2t+2} - \sqrt[n]{|\xi|}\right| \\
&\leq \left|\frac{a(m_1, m_2, 2t+1)}{2t+2} - \sqrt[n]{\frac{m_1}{m_2}}\right| + \left|\sqrt[n]{\frac{m_1}{m_2}} - \sqrt[n]{|\xi|}\right| < \frac{1}{2t+2} + \sqrt[n]{\left|\frac{m_1}{m_2} - |\xi|\right|} \\
&\leq \frac{1}{2t+2} + \sqrt[n]{\left|\frac{f((2t+2)^n - 1) - g((2t+2)^n - 1)}{h((2t+2)^n - 1) + 1} - \xi\right|} < \frac{1}{2t+2} + \frac{1}{2t+2} = \frac{1}{t+1}.
\end{aligned}$$

Използвахме неравенството (4.3.1) при $x_1 = m_1, x_2 = m_2$ и елементарното неравенство

$$\left|\sqrt[n]{\alpha} - \sqrt[n]{\beta}\right| \leq \sqrt[n]{|\alpha - \beta|},$$

изпълнено за всички неотрицателни реални числа α, β. □

От лемата веднага получаваме, че функцията θ_n е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима при четно $n \geq 2$, тъй като тя съвпада с рестрикцията на ψ_n до интервала $[0, +\infty)$. Нека $n \geq 3$ е нечетно. Засега имаме, че рестрикциите на θ_n до интервалите $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$ са равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислими. Действително нека (F, G, H) е изчислителна система за ψ_n, състояща се от $\mathcal{M}^2$-субституционни оператори. Тогава (F, G, H) е изчислителна система за рестрикцията на θ_n до $[0, +\infty)$, тъй като $\theta_n(\xi) = \psi_n(\xi)$ за всяко $\xi \in [0, +\infty)$. Също така, (G, F, H) е изчислителна система за рестрикцията на θ_n до $(-\infty, 0]$, тъй като $\theta_n(\xi) = -\psi_n(\xi)$ за всяко $\xi \in (-\infty, 0]$. За да получим равномерна $\mathcal{M}^2$-изчислимост на θ_n върху цялата реална права се нуждаем от допълнителни разглеждания, които ще направим в секция 4.4.

По-нататък ще се наложи да използваме $\mathcal{F}$-изчислим регулатор на непрекъснатост за равномерно $\mathcal{F}$-изчислимите реални функции. Съществуването му се гарантира от следващото твърдение, което ще докажем с помощта на теоремата за равномерност.

Твърдение 4.3.8. Нека $\mathcal{F}$ е удобен клас, който удовлетворява условието за мажориране (дефиниция 4.2.13). Нека $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ е реална функция, която е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима. За произволни реални числа a, b съществува унарна функция $r \in \mathcal{F}$, такава че за всички $t \in \mathbb{N}$ и $\xi, \eta \in (a, b) \cap D$ е изпълнено

$$|\xi - \eta| < \frac{1}{r(t) + 1} \Longrightarrow |\theta(\xi) - \theta(\eta)| < \frac{1}{t + 1}.$$

Доказателство. Фиксираме реални числа a, b. Да изберем положително естествено число A, такова че $(a, b) \subseteq [-A, A]$. Нека (F, G, H) е изчислителна система за θ, която се състои от $\mathcal{F}$-субституционни оператори. Да изберем $\mathcal{F}$-субституционни $(1, 1)$-оператори $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, които определят равномерна граница за F, G, H, съответно. Те съществуват от теоремата 4.2.15 за равномерност. Дефинираме унарната функция r с равенството

$$\begin{aligned} r(t) = \max(\Omega_1(\lambda n.A(n+1)+1)(2t+1),& \\ \Omega_2(\lambda n.A(n+1)+1)(2t+1),& \\ \Omega_3(\lambda n.A(n+1)+1)(2t+1)).& \end{aligned}$$

От твърдение 4.2.6 получаваме, че $r \in \mathcal{F}$. Сега ще покажем, че r има нужното свойство. Нека $t \in \mathbb{N}, \xi, \eta \in (a,b) \cap D$ и $|\xi - \eta| < \dfrac{1}{r(t)+1}$. При фиксирано естествено число n множеството от целите числа z, за които

$$z < (n+1)\xi \text{ и } z < (n+1)\eta$$

е непразно и ограничено отгоре, следователно то има най-голям елемент $z(n) \in \mathbb{Z}$. Да изберем унарни функции f, g, f', g', такива че за всяко $n \in \mathbb{N}$

$$f(n).g(n) = f'(n).g'(n) = 0,$$

за всяко $n \leq r(t)$

$$f(n) = f'(n), \;\; g(n) = g'(n), \;\; f(n) - g(n) = f'(n) - g'(n) = z(n) + 1$$

и за всяко $n > r(t)$

$$\left| \frac{f(n) - g(n)}{n+1} - \xi \right| < \frac{1}{n+1}, \;\; \left| \frac{f'(n) - g'(n)}{n+1} - \eta \right| < \frac{1}{n+1}.$$

Последните две неравенства са изпълнени и при $n \leq r(t)$.

Наистина $\dfrac{z(n)}{n+1} < \xi$, $\dfrac{z(n)}{n+1} < \eta$ и също така

$$\frac{z(n)+1}{n+1} \geq \xi \text{ или } \frac{z(n)+1}{n+1} \geq \eta.$$

Тъй като $|\xi - \eta| < \dfrac{1}{r(t)+1}$ и $\dfrac{1}{n+1} \geq \dfrac{1}{r(t)+1}$, не е възможно числата $\dfrac{z(n)+1}{n+1}$ и $\dfrac{z(n)+2}{n+1}$ да са едновременно между ξ и η, така че

$$\xi \in \left(\frac{z(n)}{n+1}, \frac{z(n)+2}{n+1} \right) = \left(\frac{f(n) - g(n)}{n+1} - \frac{1}{n+1}, \frac{f(n) - g(n)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \right)$$

и

$$\eta \in \left(\frac{z(n)}{n+1}, \frac{z(n)+2}{n+1} \right) = \left(\frac{f'(n) - g'(n)}{n+1} - \frac{1}{n+1}, \frac{f'(n) - g'(n)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \right).$$

По този начин $(f, g, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е име на ξ и $(f', g', \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е име на η. Тъй като (F, G, H) е изчислителна система за θ, $(F(f,g,\mathrm{id}_{\mathbb{N}}), G(f,g,\mathrm{id}_{\mathbb{N}}), H(f,g,\mathrm{id}_{\mathbb{N}}))$ е име на $\theta(\xi)$ и $(F(f',g',\mathrm{id}_{\mathbb{N}}), G(f',g',\mathrm{id}_{\mathbb{N}}), H(f',g',\mathrm{id}_{\mathbb{N}}))$ е име на $\theta(\eta)$. От неравенствата $|\xi| \leq A$, $|\eta| \leq A$ и от $f(n).g(n) = f'(n).g'(n) = 0$ за всяко

$n \in \mathbb{N}$ лесно получаваме, че f, g, f', g' се мажорират от $\lambda n.A(n+1)+1$. Очевидно $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ също се мажорира от $\lambda n.A(n+1)+1$, тъй като $A \neq 0$. Също така за всяко $n \leq r(t)$ имаме $f(n) = f'(n), g(n) = g'(n)$ и от дефиницията на r и от факта, че $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ определят равномерна граница за F, G, H, съответно, получаваме

$$F(f, g, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(2t+1) = F(f', g', \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(2t+1),$$

$$G(f, g, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(2t+1) = G(f', g', \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(2t+1),$$

$$H(f, g, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(2t+1) = H(f', g', \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(2t+1).$$

Следователно

$$|\theta(\xi) - \theta(\eta)| \leq \left|\theta(\xi) - \frac{F(f, g, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(2t+1) - G(f, g, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(2t+1)}{H(f, g, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(2t+1)+1}\right|$$

$$+\left|\frac{F(f', g', \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(2t+1) - G(f', g', \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(2t+1)}{H(f', g', \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(2t+1)+1} - \theta(\eta)\right| < \frac{1}{2t+2} + \frac{1}{2t+2} = \frac{1}{t+1}.$$

□

Следващото твърдение е важна индикация за растежа на равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислимите реални функции.

Твърдение 4.3.9. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции, всяка от които се мажорира от полином, и $k \in \mathbb{N}$. За всяка равномерно $\mathcal{F}$-изчислима реална функция $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^k$ съществува полином R с естествени коефициенти, такъв че

$$|\theta(\xi_1, \ldots, \xi_k)| \leq R(|\xi_1|, \ldots, |\xi_k|)$$

за всички реални числа $\xi_1, \ldots, \xi_k$, такива че $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in D$.

Доказателство. Нека (F, G, H) е изчислителна система за θ, състояща се от $\mathcal{F}$-субституционни $(3k, 1)$-оператори. Дефинираме полином P на две променливи с $P(s, n) = (s+1).(n+1)+1$. При този избор на P нека Q_1, Q_2, Q_3 са полиноми на $3k+1$ променливи с естествени коефициенти, съответни на операторите F, G, H, според твърдение 4.2.7. Нека Q' е сумата на Q_1, Q_2, Q_3 и да дефинираме полином Q с

$$Q(s_1, \ldots, s_k, n) = Q'(s_1, s_1, s_1, \ldots, s_k, s_k, s_k, n).$$

Разбира се, Q е с естествени коефициенти. Ясно е, че за всички $\vec{s} \in \mathbb{N}^k$ и всички унарни функции $f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k$, ако $\lambda n.P(s_j, n)$ мажорира f_j, g_j, h_j за $j = 1, \ldots, k$, то $\lambda n.Q(\vec{s}, n)$ мажорира трите унарни функции, които са образи на $(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k)$ относно операторите F, G, H. Ще покажем, че полиномът R, дефиниран с

$$R(\vec{s}) = Q(\vec{s}, 0) + 1$$

за всички $\vec{s} \in \mathbb{N}^k$, удовлетворява неравенството в условието на твърдението. Наистина, нека $\xi_1, \ldots, \xi_k$ са реални числа, такива че $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in D$. За всяко $i \in \{1, \ldots, k\}$ да изберем име $(f_i, g_i, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ на ξ_i, такова че за $t \in \mathbb{N}$

$$f_i(t) = 0 \text{ или } g_i(t) = 0.$$

Такива имена съществуват от лема 4.3.2. Да изберем естествени числа $s_1, \ldots, s_k$, такива че

$$s_1 \leq |\xi_1| < s_1 + 1, \ \ldots \ , s_k \leq |\xi_k| < s_k + 1.$$

Ще покажем, че за $i \in \{1, \ldots, k\}$ и всяко $t \in \mathbb{N}$ имаме неравенствата

$$f_i(t) < P(s_i, t), \ \ g_i(t) < P(s_i, t), \ \ \mathrm{id}_{\mathbb{N}}(t) = t < P(s_i, t). \tag{4.3.2}$$

Да фиксираме $t \in \mathbb{N}$. Третото неравенство е очевидно. Тъй като $(f_i, g_i, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е име на ξ_i,

$$\left| \frac{f_i(t) - g_i(t)}{t+1} - \xi_i \right| < \frac{1}{t+1},$$

така че

$$|f_i(t) - g_i(t) - \xi_i(t+1)| < 1.$$

Следователно

$$|f_i(t) - g_i(t)| < |\xi_i|(t+1) + 1 < (s_i + 1)(t+1) + 1 = P(s_i, t).$$

Но $f_i(t) = 0$ или $g_i(t) = 0$ и така получаваме първите две неравенства в (4.3.2). Нека унарните функции f, g, h са дефинирани с

$$f = F(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \ldots, f_k, g_k, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}),$$

$$g = G(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \ldots, f_k, g_k, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}),$$

$$h = H(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \ldots, f_k, g_k, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}).$$

Разбира се, (f, g, h) е име на $\theta(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ и от бележка 3.1.4

$$|\theta(\xi_1, \ldots, \xi_k)| < |f(0) - g(0)| + 1.$$

Съгласно свойството на полинома Q, функциите f и g се мажорират от $\lambda n.Q(\vec{s}, n)$ и значи имаме неравенствата $f(0) \leq Q(\vec{s}, 0)$ и $g(0) \leq Q(\vec{s}, 0)$. Така

$$|f(0) - g(0)| \leq Q(\vec{s}, 0)$$

и окончателно

$$|\theta(\xi_1,\ldots,\xi_k)| < Q(\vec{s},0)+1 = R(\vec{s}) \leq R(|\xi_1|,\ldots,|\xi_k|). \qquad \square$$

Като следствие получаваме, че функцията реципрочно, логаритмичната функция и показателната функция (разгледани върху целите си дефиниционни области) не са равномерно $\mathcal{F}$-изчислими за никой клас $\mathcal{F}$, такъв че $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}^2$.

В края на тази секция представяме без доказателство останалите резултати от [30], които описват връзката между равномерната $\mathcal{M}^2$-изчислимост и елементарните функции на анализа.

Теорема 4.3.10 ([30]). Реалната функция $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, дефинирана с $\theta(\xi,\eta) = \xi+\eta$, е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима. Реалната функция $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, дефинирана с $\phi(\xi,\eta) = \xi-\eta$, е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима. Реалната функция $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, дефинирана с $\psi(\xi,\eta) = \xi\eta$, е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима.

Следствие 4.3.11. Реалната функция $\theta_{\max} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, дефинирана с $\theta_{\max}(\xi,\eta) = \max(\xi,\eta)$, е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима. Реалната функция $\theta_{\min} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, дефинирана с $\theta_{\min}(\xi,\eta) = \min(\xi,\eta)$, е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима.

Доказателство. Използваме равенствата

$$\max(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left(\xi+\eta+|\xi-\eta|\right),$$

$$\min(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left(\xi+\eta-|\xi-\eta|\right)$$

и факта, че реалната функция абсолютна стойност е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима. $\square$

Теорема 4.3.12 ([30]). Нека $D = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 | |\xi\eta| \geq 1\}$ и нека $\theta' : D \to \mathbb{R}$ е дефинирана с $\theta'(\xi,\eta) = 1/\xi$. Тогава θ' е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима.

По този начин рестрикцията на функцията реципрочно до всяко множество от вида $(-\infty,-r] \cup [r,+\infty)$ за реално $r > 0$ е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима.

Теорема 4.3.13 ([30]). Нека $D = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 | \xi > 0, \xi\eta \geq 1\}$. Нека $\theta^\circ : D \to \mathbb{R}$ е дефинирана с $\theta^\circ(\xi,\eta) = \ln\xi$. Тогава θ° е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима.

По този начин рестрикцията на логаритмичната функция до всеки интервал от вида $[r,+\infty)$ за реално $r > 0$ е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима.

Теорема 4.3.14 ([30]). Реалната функция $\theta_e : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, дефинирана с $\theta_e(\xi, \eta) = \min(e^\xi, \eta)$, е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима.

По този начин рестрикцията на показателната функция до всеки интервал от вида $(-\infty, r]$ за реално r е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима.

Теорема 4.3.15 ([30]). Реалните функции $\arcsin, \arccos, \arctan$ са равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислими. Реалните функции $\sin$ и $\cos$ са равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислими.

Нека $\mathcal{F}$ е удобен клас от функции. Както вече отбелязахме, равномерно $\mathcal{F}$-изчислимите реални функции запазват $\mathcal{F}$-изчислимостта на реалните числа.

Така от теорема 4.3.10 получаваме, че сума, разлика и произведение на $\mathcal{F}$-изчислими реални числа е отново $\mathcal{F}$-изчислимо реално число. Теорема 4.3.12 дава, че реципрочното на ненулево $\mathcal{F}$-изчислимо реално число също е $\mathcal{F}$-изчислимо (по дадено реално $\xi \neq 0$ избираме естествено число n, такова че $|\xi.n| \geq 1$ и използваме, че n е $\mathcal{F}$-изчислимо). Разбира се, ние вече знаем тези факти от теорема 3.1.6, тъй като всеки удобен клас $\mathcal{F}$ е приемлив.

По-нататък от теорема 4.3.13 следва, че натуралният логаритъм на положително $\mathcal{F}$-изчислимо реално число също е $\mathcal{F}$-изчислим (както по-горе, по дадено реално $\xi > 0$ избираме естествено число n, такова че $\xi.n \geq 1$). Теорема 4.3.14 дава, че за всяко $\mathcal{F}$-изчислимо реално число ξ e^ξ също е $\mathcal{F}$-изчислимо (достатъчно е да вземем естествено число n, такова че $e^\xi < n$ и да използваме, че $e^\xi = \min(e^\xi, n)$).

От теорема 4.3.15 получаваме подобни твърдения за всички тригонометрични и обратни тригонометрични функции - те запазват $\mathcal{F}$-изчислимостта на реалните числа.

Ние знаем, че функциите θ_n при четно $n \geq 2$, разгледани по-горе, са равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислими. При нечетно $n \geq 3$ рестрикциите на θ_n до $(-\infty, 0]$ и до $[0, +\infty)$ са равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислими. Оттук получаваме, че за всяко четно $n \geq 2$ n-тият корен на всяко $\mathcal{F}$-изчислимо неотрицателно реално число е $\mathcal{F}$-изчислим. Също така за всяко нечетно $n \geq 3$ n-тият корен на $\mathcal{F}$-изчислимо реално е $\mathcal{F}$-изчислим, тъй като всяко реално число попада в някой от интервалите $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$.

Да обобщим последните четири параграфа – при удобен клас $\mathcal{F}$ елементарните функции на анализа запазват $\mathcal{F}$-изчислимостта на реалните числа.

4.4 Лема за едноточково разширение. Равномерна $\mathcal{M}^2$-изчислимост на коренуването

Нека θ_n е реалната функция от предходната секция 4.3, дефинирана с $\theta_n(\xi) = \sqrt[n]{\xi}$. Вече знаем, че при четно $n \geq 2$ θ_n е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима. При нечетно $n \geq 3$ знаем, че рестрикциите на θ_n до $(-\infty, 0]$ и до $[0, +\infty)$ са равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислими. Дали оттук следва, че при нечетно $n \geq 3$ θ_n е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима върху цялата реална права? Целта на разглежданията в тази секция е да представим достатъчни условия, при които равномерната $\mathcal{M}^2$-изчислимост се запазва при определени разширения.

Случаят с θ_n при нечетно $n \geq 3$ се решава лесно, като използваме един трик от [5], предложен от Алекс Симпсън.

Лема 4.4.1. Нека $\mathcal{F}$ е удобен клас и $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ е реална функция. Нека c е $\mathcal{F}$-изчислимо реално число, такова че $c \in D$ и рестрикциите на θ до множествата $D \cap (-\infty, c]$ и $D \cap [c, +\infty)$ са равномерно $\mathcal{F}$-изчислими. Тогава θ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима върху цялата си дефиниционна област.

Доказателство. Нека $\theta_{\geq}$ е рестрикцията на θ до $D \cap [c, +\infty)$ и $\theta_{\leq}$ е рестрикцията на θ до $D \cap (-\infty, c]$. Равенството

$$\theta(\xi) = \theta_{\geq}(\max(\xi, c)) + \theta_{\leq}(\min(\xi, c)) - \theta(c)$$

е изпълнено за всяко $\xi \in D$. Като използваме теорема 4.3.10, следствие 4.3.11 и факта, че реалното число $\theta(c)$ е $\mathcal{F}$-изчислимо, получаваме, че θ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима върху цялото D. ☐

Следващата лема показва достатъчни условия, при които равномерната $\mathcal{F}$-изчислимост се запазва при едноточково разширение.

Лема 4.4.2. Нека $\mathcal{F}$ е удобен клас, удовлетворяващ условието за мажориране, и $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ е реална функция. Нека c е $\mathcal{F}$-изчислимо реално число, такова че $c \in D$, $\theta(c)$ също е $\mathcal{F}$-изчислимо и θ е непрекъсната в c. Нека рестрикцията на θ до $D \setminus \{c\}$ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима. Тогава θ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима върху цялата си дефиниционна област D.

Доказателство. Най-напред избираме унарна функция $r \in \mathcal{F}$ по следния начин: ако c е точка на сгъстяване на D, то взимаме r от твърдение 4.3.8 при $a = c - 1, b = c + 1$ за рестрикцията на θ до $D \setminus \{c\}$; ако c е изолирана точка на D, тогава избираме r да бъде унарната константа $\lambda t.A$, където A е най-малкото естествено число, такова че $\left(c - \dfrac{1}{A+1}, c + \dfrac{1}{A+1}\right) \cap D = \{c\}$. Ще покажем, че за всяко $t \in \mathbb{N}$ и $\xi \in D$ е изпълнено

$$|\xi - c| < \frac{1}{r(t)+1} \Longrightarrow |\theta(\xi) - \theta(c)| \leq \frac{1}{t+1}. \tag{4.4.1}$$

Действително нека t е естествено число, $\xi \in D$ и $|\xi - c| < \dfrac{1}{r(t)+1}$. Тогава $\xi \in (c-1, c+1) \cap D$.

Първи случай. c е изолирана точка на D.

Имаме $|\xi - c| < \dfrac{1}{r(t)+1} = \dfrac{1}{A+1}$ и от избора на A получаваме $\xi = c$. Но тогава консеквентът в (4.4.1) е тривиално изпълнен.

Втори случай. c е точка на сгъстяване на D.

При $\xi = c$ консеквентът в (4.4.1) е тривиално верен, така че можем да считаме, че $\xi \neq c$, т.е. $\xi \in D \setminus \{c\}$. Да изберем редица $\eta_0, \eta_1, \ldots$, която има граница c и се състои от точки в $D \setminus \{c\}$. Лесно се съобразява, че при достатъчно голямо $n \in \mathbb{N}$ имаме $\eta_n \in (c-1, c+1) \cap D \setminus \{c\}$ и е изпълнено $|\xi - \eta_n| < \dfrac{1}{r(t)+1}$. Следователно от избора на r при достатъчно голямо n $|\theta(\xi) - \theta(\eta_n)| < \dfrac{1}{t+1}$. При $n \to \infty$, като използваме непрекъснатостта на θ в точката c, получаваме исканото неравенство $|\theta(\xi) - \theta(c)| \leq \dfrac{1}{t+1}$.

Нека (F', G', H') е изчислителна система за рестрикцията на θ до $D \setminus \{c\}$, която се състои от $\mathcal{F}$-субституционни оператори. Да фиксираме име $(f_c, g_c, h_c) \in \mathcal{F}^3$ на c и име $(f', g', h') \in \mathcal{F}^3$ на $\theta(c)$. Нека $R \subseteq \mathbb{N}^4$ е релацията, дефинирана с

$$\begin{aligned} R(x,y,z,t) &\Longleftrightarrow \left| \frac{x-y}{z+1} - \frac{f_c(t) - g_c(t)}{h_c(t)+1} \right| < \frac{2}{t+1} \\ &\Longleftrightarrow |(x(h_c(t)+1) + (z+1)g_c(t)) - ((z+1)f_c(t) + y(h_c(t)+1))|\,(t+1) \\ &\qquad < 2(z+1)(h_c(t)+1). \end{aligned}$$

Ясно е, че R е $\mathcal{F}$-релация. Нека $a : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ е функцията, дефинирана с

$$a(x,y,z) = \begin{cases} x & \text{ако } z = 0, \\ y & \text{ако } z \neq 0. \end{cases}$$

От предположенията за $\mathcal{F}$ и леми 2.2.4, 2.2.6 получаваме $a \in \mathcal{F}$. По-нататък да дефинираме операторите (F, G, H) от тип $(3,1)$ с равенствата

$$F(f,g,h)(t) = a(f'(2t+1), F'(f,g,h)(t), \chi_R(f(t_0), g(t_0), h(t_0), t_0)),$$

$$G(f,g,h)(t) = a(g'(2t+1), G'(f,g,h)(t), \chi_R(f(t_0), g(t_0), h(t_0), t_0)),$$
$$H(f,g,h)(t) = a(h'(2t+1), H'(f,g,h)(t), \chi_R(f(t_0), g(t_0), h(t_0), t_0)),$$

където навсякъде $t_0 = 4.r(2t+1)+3$. Тъй като операторите F', G', H' са $\mathcal{F}$-субституционни и $a, \chi_R \in \mathcal{F}$, F, G, H също са $\mathcal{F}$-субституционни. Ще докажем, че (F, G, H) е изчислителна система за θ. Нека $\xi \in D$ и (f, g, h) е име на ξ. Нека t е естествено число и $t_0 = 4.r(2t+1)+3$.

Първи случай. $R(f(t_0), g(t_0), h(t_0), t_0)$. Тогава

$$|\xi - c| \leq \left|\xi - \frac{f(t_0)-g(t_0)}{h(t_0)+1}\right| + \left|\frac{f(t_0)-g(t_0)}{h(t_0)+1} - \frac{f_c(t_0)-g_c(t_0)}{h_c(t_0)+1}\right| + \left|\frac{f_c(t_0)-g_c(t_0)}{h_c(t_0)+1} - c\right|$$
$$< \frac{1}{t_0+1} + \frac{2}{t_0+1} + \frac{1}{t_0+1} = \frac{4}{t_0+1} = \frac{1}{r(2t+1)+1}.$$

Използвахме, че (f, g, h) е име на ξ и (f_c, g_c, h_c) е име на c. Сега от (4.4.1) получаваме

$$|\theta(\xi) - \theta(c)| \leq \frac{1}{2t+2}.$$

Също така,

$$\left|\theta(c) - \frac{f'(2t+1) - g'(2t+1)}{h'(2t+1)+1}\right| < \frac{1}{2t+2},$$

тъй като (f', g', h') е име на $\theta(c)$. Следователно

$$\left|\frac{F(f,g,h)(t) - G(f,g,h)(t)}{H(f,g,h)(t)+1} - \theta(\xi)\right| = \left|\frac{f'(2t+1) - g'(2t+1)}{h'(2t+1)+1} - \theta(\xi)\right|$$
$$\leq \left|\frac{f'(2t+1) - g'(2t+1)}{h'(2t+1)+1} - \theta(c)\right| + |\theta(c) - \theta(\xi)| < \frac{1}{2t+2} + \frac{1}{2t+2} = \frac{1}{t+1}.$$

Втори случай. $\neg R(f(t_0), g(t_0), h(t_0), t_0)$. Тогава $\xi \neq c$. Действително, ако $\xi = c$, то

$$\left|\frac{f(t_0)-g(t_0)}{h(t_0)+1} - \frac{f_c(t_0)-g_c(t_0)}{h_c(t_0)+1}\right|$$
$$\leq \left|\frac{f(t_0)-g(t_0)}{h(t_0)+1} - \xi\right| + \left|c - \frac{f_c(t_0)-g_c(t_0)}{h_c(t_0)+1}\right|$$
$$< \frac{1}{t_0+1} + \frac{1}{t_0+1} = \frac{2}{t_0+1}.$$

Получихме, че $R(f(t_0), g(t_0), h(t_0), t_0)$, което е абсурд. Така $\xi \in D \setminus \{c\}$ и от избора на F', G', H' имаме, че $(F'(f,g,h), G'(f,g,h), H'(f,g,h))$ е име на $\theta(\xi)$. При това положение

$$\left|\frac{F(f,g,h)(t)-G(f,g,h)(t)}{H(f,g,h)(t)+1}-\theta(\xi)\right| = \left|\frac{F'(f,g,h)(t)-G'(f,g,h)(t)}{H'(f,g,h)(t)+1}-\theta(\xi)\right| < \frac{1}{t+1}.$$

Така и в двата случая

$$\left|\frac{F(f,g,h)(t)-G(f,g,h)(t)}{H(f,g,h)(t)+1}-\theta(\xi)\right| < \frac{1}{t+1},$$

следователно $(F(f,g,h), G(f,g,h), H(f,g,h))$ е име на $\theta(\xi)$. □

Следва още една лема, която е най-обща в тези разглеждания при условие, че $\mathcal{F}$ е удобен клас, удовлетворяващ условието за мажориране. Тя се доказва с помощта на предходните две.

Лема 4.4.3 (за едноточково разширение)**.** Нека $\mathcal{F}$ е удобен клас, удовлетворяващ условието за мажориране, и $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ е реална функция. Нека c е $\mathcal{F}$-изчислимо реално число, такова че $c \in D$, $\theta(c)$ също е $\mathcal{F}$-изчислимо и θ е непрекъсната в c. Нека рестрикциите на θ до $D\cap(-\infty, c)$ и до $D \cap (c, +\infty)$ са равномерно $\mathcal{F}$-изчислими. Тогава θ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима върху цялата си дефиниционна област.

Доказателство. С две приложения на лема 4.4.2 получаваме, че рестрикциите на θ до $D \cap (-\infty, c]$ и до $D \cap [c, +\infty)$ са равномерно $\mathcal{F}$-изчислими. От лема 4.4.1 θ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима върху цялото D.

4.5 Субрекурсивна изчислимост на реални константи, представени с безкрайни произведения

В секция 3.2 разгледахме два метода за доказателство на субрекурсивна изчислимост на реални числа, представени като суми на безкрайни редове. В тази секция ще изложим два нови метода, които се основават на методите от 3.2 и са приложими за реални константи, представени чрез безкрайни произведения. За да ги обосновем, ще използваме знанията от предходната секция и по-точно резултатите за логаритмичната и за показателната реални функции.

Теорема 4.5.1. Нека $\mathcal{F}$ е удобен клас от функции, затворен относно ограничено сумиране. Нека $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е $\mathcal{F}$-изчислима функция, такава че безкрайното произведение $\alpha = \prod_{s=0}^{\infty} a_s$ е сходящо. Нека съществува унарна функция $q \in \mathcal{F}$, такава че $\sum_{s \geq y+1} \left| b_s \right| \leq \frac{1}{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $y = q(n)$, където $b_s = a_s - 1$. Тогава числото α е $\mathcal{F}$-изчислимо.

Доказателство. Ще използваме теорема 3.2.2, като сведем безкрайното произведение до безкрайна сума чрез логаритмуване. Преди всичко, безкрайното произведение $\prod_{s=0}^{\infty} a_s$ е сходящо, така че $a_s \neq 0$ за всяко естествено число s и $\lim_{s \to \infty} a_s = 1$. Да изберем положително рационално число $q < 1$ и естествено число s_0, такова че $a_s \geq q$ за всяко естествено число $s \geq s_0$. Разглеждаме реда

$$\sum_{s=s_0}^{\infty} \ln(a_s) = \sum_{s=0}^{\infty} \ln(a_{s_0+s}).$$

Той се получава с логаритмуване на (остатък на) безкрайното произведение за α, така че е сходящ. Имаме $a_{s_0+s} \geq q$ за всяко s, $\lambda s.s_0 + s$ е функция от $\mathcal{F}$ и a е $\mathcal{F}$-изчислима. От тези факти и от теорема 4.3.13 получаваме, че общият член на последния ред е $\mathcal{F}$-изчислим. По-нататък ще оценим скоростта на сходимост. Да изберем унарна функция $q \in \mathcal{F}$ от условието на теоремата. Имаме $b_s = a_s - 1$, така че $\lim_{s \to \infty} b_s = 0$. При това положение, като използваме границата

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

можем да изберем ненулево естествено число A, такова че

$$|\ln(b_s + 1)| \leq A\,|b_s|$$

за всички естествени числа s. Също така дефинираме унарна функция p с

$$p(m) = q(Am + A - 1)$$

за всяко $m \in \mathbb{N}$. Разбира се, $p \in \mathcal{F}$. Сега за всяко $m \in \mathbb{N}$ имаме

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{s \geq y+1} \ln(a_{s+s_0}) \right| &= \left| \sum_{s \geq y+1} \ln(b_{s+s_0} + 1) \right| \\
&\leq \sum_{s \geq y+1} |\ln(b_{s+s_0} + 1)| \leq A \sum_{s \geq y+1} |b_{s+s_0}| \leq A \sum_{s \geq y+1} |b_s| \\
&\leq \frac{A}{Am + A - 1 + 1} = \frac{1}{m+1},
\end{aligned}$$

като използваме неравенството от условието за $n = Am + A - 1$ и $y = q(Am + A - 1) = p(m)$. Налице са предпоставките в 3.2.2 и можем да заключим, че числото

$$\sum_{s=0}^{\infty} \ln(a_{s_0+s})$$

е $\mathcal{F}$-изчислимо. Тъй като $\mathcal{F}$ е удобен клас, показателната функция запазва $\mathcal{F}$-изчислимостта. Следователно

$$e^{\sum_{s=0}^{\infty} \ln(a_{s_0+s})}$$

е $\mathcal{F}$-изчислимо реално число, но

$$e^{\sum_{s=0}^{\infty} \ln(a_{s_0+s})} = \prod_{s=0}^{\infty} a_{s_0+s} = \prod_{s=s_0}^{\infty} a_s,$$

така че

$$\prod_{s=s_0}^{\infty} a_s$$

е $\mathcal{F}$-изчислимо. Остава да отбележим, че

$$\alpha = a_0.a_1. \ \ldots \ .a_{s_0-1}. \prod_{s=s_0}^{\infty} a_s$$

и значи α е $\mathcal{F}$-изчислимо, тъй като α е произведение на $\mathcal{F}$-изчислими реални числа (стойностите на $\mathcal{F}$-изчислимата функция a са $\mathcal{F}$-изчислими). $\square$

Пример 4.5.2. Ще приложим теоремата при $\mathcal{F} = \mathcal{L}^2$ за константата C_{Artin} на Артин. Тя възниква във връзка с една хипотеза на Артин, засягаща разпределението на примитивните корени по прости модули. Подробности могат да се намерят в книгата [6] на Финч. За C_{Artin} имаме следното представяне

$$C_{Artin} = \prod_{\text{прости } p} (1 - \frac{1}{p(p-1)}) = \prod_{s=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_s(p_s - 1)}).$$

Общият член на безкрайното произведение е $\mathcal{L}^2$-изчислим, тъй като $\lambda s.p_s \in \mathcal{L}^2$. Доказателство на последния факт може да се намери в [22], както отбелязахме в края на секция 2.5. По отношение на скоростта на сходимост имаме

$$\sum_{s \geq y+1} |b_s| = \sum_{s \geq y+1} \frac{1}{p_s(p_s - 1)} \leq \sum_{s \geq y+1} \frac{1}{(s+1)s} = \sum_{s \geq y+1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{y+1},$$

така че можем да вземем $q(n) = n$. Използвахме неравенството $p_s \geq s+1$, което се доказва с тривиална индукция.

Окончателно, константата C_{Artin} е $\mathcal{L}^2$-изчислима. □

Следва съответният метод за доказателство за $\mathcal{M}^2$-изчислимост на реални константи, представени с безкрайни произведения, основан на модифицирания метод от теорема 3.2.3.

Теорема 4.5.3. Нека $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е $\mathcal{M}^2$-изчислима функция, такава че безкрайното произведение $\alpha = \prod_{s=0}^{\infty} a_s$ е сходящо. Нека съществува унарна функция $q \in \mathcal{M}^2$, такава че $\sum_{s>\log_2(y+1)} |b_s| \leq \frac{1}{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $y = q(n)$, където $b_s = a_s - 1$. Тогава числото α е $\mathcal{M}^2$-изчислимо.

Пропускаме доказателството, тъй като то е аналогично на предходното.

Пример 4.5.4. Ще приложим теоремата за да изследваме сложността на константата на Туе-Морс C_τ. Тя се дефинира чрез

$$C_\tau = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t_s}{2^{s+1}},$$

където $\lambda s.t_s$ е редицата на Туе-Морс, t_s е броят на единиците в двоичното представяне на s по модул 2. За нашите цели е удобно следното представяне, дадено в [6]:

$$2(1 - 2C_\tau) = \prod_{s=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{2^s}}\right).$$

Тъй като $\mathcal{M}^2$-изчислимите реални числа образуват подполе на $\mathbb{R}$, достатъчно е да разгледаме само безкрайното произведение.

Ще използваме неравенството $2^s > s$, което е изпълнено за всяко естествено число s.

Графиката на $\lambda s.2^{2^s}$ е Δ_0-определима, тъй като

$$y = 2^{2^s} \iff \exists x < y (x = 2^s \ \& \ y = 2^x).$$

Използваме, че $\lambda s.2^s$ има Δ_0-определима графика, както отбелязахме в края на секция 2.6. От лемата 2.2.5 за графиката получаваме, че функцията

$$\lambda st. \min(t+1, 2^{2^s})$$

принадлежи на $\mathcal{M}^2$. От друга страна, за всички естествени числа s, t е в сила неравенството

$$\left| \frac{1}{\min(t+1, 2^{2^s})} - \frac{1}{2^{2^s}} \right| < \frac{1}{t+1}$$

и така получаваме, че $\lambda s.\dfrac{1}{2^{2^s}}$ е $\mathcal{M}^2$-изчислима функция. Оттук веднага следва, че общият член на безкрайното произведение по-горе е $\mathcal{M}^2$-изчислим. По отношение на скоростта на сходимост,

$$\sum_{s>log_2(y+1)} |b_s| = \sum_{s>log_2(y+1)} \frac{1}{2^{2^s}} < \sum_{s>log_2(y+1)} \frac{1}{2^s} < \frac{2}{y+1},$$

така че можем да вземем $q(n) = 2n + 1$.

Окончателно безкрайното произведение е $\mathcal{M}^2$-изчислимо, така че също то е вярно и за константата C_τ. □

4.6 Условна изчислимост на реална функция относно клас от оператори

Резултатите в края на секция 4.3, заедно с равномерната $\mathcal{M}^2$-изчислимост на коренуването от секция 4.4, ни позволяват да заключим, че целта, формулирана в края на секция 4.1, е постигната с класа на $\mathcal{M}^2$-субституционните оператори. С индукция по построението (на дефиниращия израз) може да се покаже, че рестрикцията на всяка елементарна функция на анализа до компактно подмножество на нейната дефиниционна област е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима. В случай на логаритъм, реципрочно или показателна функция се използва, че всяка непрекъсната реална функция достига най-малка и най-голяма стойност в произволно компактно множество.

Както вече отбелязахме, за да изчисляваме елементарните функции на анализа върху целите им дефиниционни области, трябва да преминем отвъд равномерната изчислимост и съществено да усложним изчислителните процедури. Скордев успява да направи това, като въвежда понятието условна изчислимост на реална функция. Характерното за условната изчислимост е, че процесът на апроксимация зависи от допълнителен естествен параметър. Неговото значение може да се определи с помощта на търсене на естествено число, което нулира терм от определен вид. Следваме изложението в статията [29].

Първоначално ще изследваме понятието условна изчислимост на реална функция относно класове от субституционни оператори.

Дефиниция 4.6.1. Нека $k \in \mathbb{N}, \theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^k$ и $\mathcal{F}$ е клас от функции. Реалната функция θ е *условно $\mathcal{F}$-изчислима*, ако съществуват $\mathcal{F}$-субституционни оператори E от тип $(3k, 1)$ и F, G, H от тип $(3k, 2)$, такива че за всички $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in D$ и за всички тройки (f_i, g_i, h_i), които са имена на ξ_i за $i = 1, 2, \ldots, k$, са в сила следните две условия:

- Съществува естествено число s, което удовлетворява равенството

$$E(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(s) = 0. \tag{4.6.1}$$

- За всяко естествено число s, което удовлетворява равенството (4.6.1), тройката $(\widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h})$ е име на реалното число $\theta(\xi_1, \dots, \xi_k)$, където

$$\begin{aligned}
\widetilde{f} &= \lambda t.F(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(s, t),\\
\widetilde{g} &= \lambda t.G(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(s, t),\\
\widetilde{h} &= \lambda t.H(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(s, t).
\end{aligned}$$

Ако $\mathcal{F}$ се състои само от рекурсивни функции, то $\mathcal{F}$-субституционните оператори са изчислими и следователно всяка условно $\mathcal{F}$-изчислима реална функция е изчислима (в по-разширения смисъл, дискутиран в абзаца преди дефиниция 4.1.4, тъй като търсенето на s може никога да не приключи, в случая когато аргументите на оператора E не образуват имена на аргументите на θ).

Ще разгледаме някои примери.

Пример 4.6.2. Ако една реална функция е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима, то тя е условно $\mathcal{F}$-изчислима. Наистина, нека $(F^\circ, G^\circ, H^\circ)$ е изчислителна система за реалната функция $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$. Да дефинираме оператори E, F, G, H по следния начин:

$$\begin{aligned}
E(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(s) &= s,\\
F(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(s, t) &= F^\circ(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(t),\\
G(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(s, t) &= G^\circ(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(t),\\
H(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(s, t) &= H^\circ(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(t).
\end{aligned}$$

Тогава E, F, G, H са $\mathcal{F}$-субституционни от клауза 1 в дефиниция 4.2.1 и твърдение 4.2.2. Ясно е, че те удовлетворяват изискванията в дефиниция 4.6.1. □

Пример 4.6.3. Нека $\theta : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ е реалната функция, дефинирана с $\theta(\xi) = \dfrac{1}{\xi}$. Както вече отбелязахме, θ не е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима, но се оказва, че θ е условно $\mathcal{M}^2$-изчислима. За да покажем това ще използваме реалната функция θ' от теорема 4.3.12. Нека (F', G', H') е изчислителна система за θ', състояща се от $\mathcal{M}^2$-субституционни оператори от тип $(6, 1)$. Да дефинираме релация $S \subseteq \mathbb{N}^5$ с

$$S(s_0, s_1, x, y, z) \iff \frac{|x-y|}{z+1} - \frac{1}{s_0+1} > \frac{1}{s_1+1}.$$

Ясно е, че S е $\mathcal{M}^2$-релация (достатъчно е да се освободим от знаменателите). Дефинираме оператори E, F, G, H по следния начин:

$$\begin{aligned}
E(f,g,h)(s) &= \chi_S(L(s), R(s), f(L(s)), g(L(s)), h(L(s))),\\
F(f,g,h)(s,t) &= F'(f,g,h,\lambda x.R(s)+1, \lambda x.0, \lambda x.0)(t),\\
G(f,g,h)(s,t) &= G'(f,g,h,\lambda x.R(s)+1, \lambda x.0, \lambda x.0)(t),\\
H(f,g,h)(s,t) &= H'(f,g,h,\lambda x.R(s)+1, \lambda x.0, \lambda x.0)(t).
\end{aligned}$$

Тук L и R са произволни унарни функции от $\mathcal{M}^2$, такива че

$$\{(L(s), R(s)) | s \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2.$$

Един възможен избор на L и R е указан в секция 2.4. Представянето в същата секция показва, че $L, R \in \mathcal{M}^2$. С помощта на твърдение 4.2.5 лесно се вижда, че E, F, G, H са $\mathcal{M}^2$-субституционни. Ще докажем, че те удовлетворяват изискванията в дефиниция 4.6.1. Нека $\xi \neq 0$ и (f,g,h) е име на ξ. Редицата $\lambda x.\dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)+1}$ има граница ξ и следователно редицата $\lambda x.\dfrac{|f(x)-g(x)|}{h(x)+1}$ има граница $|\xi|$. Така редицата $\lambda x.\left(\dfrac{|f(x)-g(x)|}{h(x)+1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$ също има граница $|\xi|$. Но $|\xi| > 0$, така че можем да изберем естествено число s_0, такова че

$$\frac{|f(s_0)-g(s_0)|}{h(s_0)+1} - \frac{1}{s_0+1} > 0$$

и после да изберем естествено число s_1, такова че

$$\frac{|f(s_0)-g(s_0)|}{h(s_0)+1} - \frac{1}{s_0+1} > \frac{1}{s_1+1}.$$

Нека s е такова, че $s_0 = L(s)$ и $s_1 = R(s)$. Тогава $E(f,g,h)(s) = 0$. Понататък да вземем произволно естествено число s, такова че е изпълнено $E(f,g,h)(s) = 0$, т.е.

$$\frac{|f(s_0)-g(s_0)|}{h(s_0)+1} - \frac{1}{s_0+1} > \frac{1}{s_1+1},$$

където $s_0 = L(s)$ и $s_1 = R(s)$. Тъй като (f,g,h) е име на ξ,

$$|\xi| > \frac{|f(s_0)-g(s_0)|}{h(s_0)+1} - \frac{1}{s_0+1} > \frac{1}{s_1+1},$$

така че $|\xi.(s_1+1)| > 1$. Остава да отбележим, че $(\lambda x.R(s)+1, \lambda x.0, \lambda x.0)$ е име на $R(s)+1 = s_1+1$ и (F', G', H') е изчислителна система за θ'. Така

$$(\lambda t.F(f,g,h)(s,t), \lambda t.G(f,g,h)(s,t), \lambda t.H(f,g,h)(s,t))$$

е име на $\theta'(\xi, R(s)+1) = \dfrac{1}{\xi} = \theta(\xi)$.

Пример 2 в [29] представя друго по-директно доказателство за условната $\mathcal{M}^2$-изчислимост на функцията реципрочно. $\square$

Пример 4.6.4. Нека $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е реалната функция, дефинирана с $\theta(\xi) = e^{\xi}$. Както вече отбелязахме, θ не е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима. Но се оказва, че θ е условно $\mathcal{M}^2$-изчислима. За да докажем това, ще използваме реалната функция θ_e от теорема 4.3.14. Нека (F_2, G_2, H_2) е изчислителна система за θ_e, която се състои от $\mathcal{M}^2$-субституционни оператори. Дефинираме операторите E, F, G, H с

$$\begin{aligned}
E(f,g,h)(s) &= |f(0)-g(0)| \dot{-} \exp_3(s+1),\\
F(f,g,h)(s,t) &= F_2(f,g,h,\lambda x.3s+3,\lambda x.0,\lambda x.0)(t),\\
G(f,g,h)(s,t) &= G_2(f,g,h,\lambda x.3s+3,\lambda x.0,\lambda x.0)(t),\\
H(f,g,h)(s,t) &= H_2(f,g,h,\lambda x.3s+3,\lambda x.0,\lambda x.0)(t),
\end{aligned}$$

където $\exp_3$ е унарната функция, такава че $\exp_3(0) = 0$ и $\exp_3(n)$ е степента на 3 в разлагането на n на прости множители при $n \neq 0$. Операторите E, F, G, H са $\mathcal{M}^2$-субституционни, тъй като $\exp_3 \in \mathcal{M}^2$, както се вижда от

$$\begin{aligned}
\exp_3(n) = e \iff & (n = 0 \,\&\, e = 0)\\
& \vee \exists m \le n (m = 3^e \,\&\, \mathrm{rm}(n,m) = 0 \,\&\, \mathrm{rm}(n,3m) \neq 0),
\end{aligned}$$

$$\exp_3(n) \le n$$

и свойствата на $\mathcal{M}^2$, описани в секция 2.6. Ще покажем, че условията в дефиниция 4.6.1 са изпълнени. Нека ξ е произволно реално число и (f,g,h) е име на ξ. Имаме

$$E(f,g,h)(s) = 0 \iff \exp_3(s+1) \ge |f(0)-g(0)|.$$

Оттук е очевидно, че съществува s, такова че $E(f,g,h)(s) = 0$ (можем да вземем $s = 3^{|f(0)-g(0)|} - 1$). По-нататък нека s е такова, че $E(f,g,h)(s) = 0$, т.е. $\exp_3(s+1) \ge |f(0)-g(0)|$. Тогава

$$s+1 \ge 3^{|f(0)-g(0)|} \Longrightarrow 3s+3 \ge 3^{|f(0)-g(0)|+1}.$$

От друга страна, (f,g,h) е име на ξ и от бележка 3.1.4

$$|\xi| < |f(0)-g(0)|+1.$$

Като комбинираме с горното неравенство, получаваме

$$e^{\xi} < 3^{|\xi|} < 3^{|f(0)-g(0)|+1} \le 3s+3$$

и така $\min(e^\xi, 3s+3) = e^\xi$. Остава да отбележим, че $(\lambda x.3s+3, \lambda x.0, \lambda x.0)$ е име на $3s+3$ и че (F_2, G_2, H_2) е изчислителна система за θ_e. Така

$$(\lambda t.F(f,g,h)(s,t), \lambda t.G(f,g,h)(s,t), \lambda t.H(f,g,h)(s,t))$$

е име на $\theta_e(\xi, 3s+3) = e^\xi = \theta(\xi)$. □

В пример 4 в [29] е показано, че всяка частично рекурсивна функция в естествените числа, разгледана като реална функция, е условно $\mathcal{M}^2$-изчислима.

Теорема 4.6.5. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции, който съдържа бинарна функция C и унарни функции L и R, такива че

$$\{(u,v) \in \mathbb{N}^2 | C(u,v) = 0\} = \{(0,0)\} \text{ и } \{(L(s), R(s)) \,|\, s \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2.$$

Тогава операцията композиция на реални функции запазва условната $\mathcal{F}$-изчислимост.

Доказателство. За да избегнем прекалено дълги изрази, се ограничаваме до случая на реални функции на един аргумент. Нека $\theta_0 : D_0 \to \mathbb{R}$ и $\theta_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ са условно $\mathcal{F}$-изчислими реални функции на един аргумент ($D_0, D_1 \subseteq \mathbb{R}$). Ще покажем условната $\mathcal{F}$-изчислимост на реалната функция $\theta : D \to \mathbb{R}$, дефинирана с $\theta(\xi) = \theta_0(\theta_1(\xi))$ за $\xi \in D$, където

$$D = \{\xi \in \mathbb{R} | \xi \in D_1 \,\&\, \theta_1(\xi) \in D_0\}.$$

За $i = 0, 1$ нека E_i, F_i, G_i, H_i са $\mathcal{F}$-субституционни оператори, такива че $\exists s(E_i(f,g,h)(s) = 0)$ и

$$\begin{aligned} &\forall s(E_i(f,g,h)(s) = 0 \\ &\Longrightarrow (\lambda t.F_i(f,g,h)(s,t), \lambda t.G_i(f,g,h)(s,t), \lambda t.H_i(f,g,h)(s,t)) \text{ е име на } \theta_i(\xi)) \end{aligned}$$

за всички $\xi \in D_i$ и всяка тройка (f,g,h), която е име на ξ. Ще покажем, че изискванията на дефиниция 4.6.1 за реалната функция θ са изпълнени с операторите E, F, G, H, дефинирани чрез равенствата

$$\begin{aligned} E(f,g,h)(s) = C(&E_1(f,g,h)(R(s)), \\ &E_0(\lambda x.F_1(f,g,h)(R(s),x),\, \lambda x.G_1(f,g,h)(R(s),x), \\ &\qquad \lambda x.H_1(f,g,h)(R(s),x))(L(s))), \\ F(f,g,h)(s,t) = F_0(&\lambda x.F_1(f,g,h)(R(s),x),\, \lambda x.G_1(f,g,h)(R(s),x), \\ &\lambda x.H_1(f,g,h)(R(s),x))(L(s),t), \\ G(f,g,h)(s,t) = G_0(&\lambda x.F_1(f,g,h)(R(s),x),\, \lambda x.G_1(f,g,h)(R(s),x), \\ &\lambda x.H_1(f,g,h)(R(s),x))(L(s),t), \\ H(f,g,h)(s,t) = H_0(&\lambda x.F_1(f,g,h)(R(s),x),\, \lambda x.G_1(f,g,h)(R(s),x), \\ &\lambda x.H_1(f,g,h)(R(s),x))(L(s),t). \end{aligned}$$

Като използваме твърдения 4.2.2 и 4.2.5 виждаме, че E, F, G, H са $\mathcal{F}$-субституционни. Сега да предположим, че ξ е реално число от дефиниционната област D на θ и че (f, g, h) е тройка, която е име на ξ. От избора на E_1, F_1, G_1, H_1 съществува $s_1 \in \mathbb{N}$, такова че

$$E_1(f, g, h)(s_1) = 0, \tag{4.6.2}$$

и ако изберем такова s_1, то реалното число $\theta_1(\xi)$ се именува от тройката (f_1, g_1, h_1), където

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda x.F_1(f, g, h)(s_1, x), \\ g_1 &= \lambda x.G_1(f, g, h)(s_1, x), \\ h_1 &= \lambda x.H_1(f, g, h)(s_1, x). \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

От избора на E_0 съществува $s_0 \in \mathbb{N}$, такова че

$$E_0(f_1, g_1, h_1)(s_0) = 0. \tag{4.6.4}$$

Ако $s \in \mathbb{N}$ е такова, че $L(s) = s_0$, $R(s) = s_1$, то $E(f, g, h)(s) = 0$. Сега да разгледаме произволно естествено число s, такова че $E(f, g, h)(s) = 0$. Нека $s_0 = L(s)$, $s_1 = R(s)$. Равенството $E(f, g, h)(s) = 0$ влече равенството (4.6.2), както и равенството (4.6.4) за функциите f_1, g_1, h_1, дефинирани с равенствата (4.6.3). От (4.6.2) следва, че (f_1, g_1, h_1) именува $\theta_1(\xi)$. Като използваме този факт заедно с равенството (4.6.4), получаваме, че $\theta(\xi) = \theta_0(\theta_1(\xi))$ се именува от тройката

$$(\lambda t.F_0(f_1, g_1, h_1)(s_0, t), \lambda t.G_0(f_1, g_1, h_1)(s_0, t), \lambda t.H_0(f_1, g_1, h_1)(s_0, t)).$$

Но тази тройка съвпада с

$$(\lambda t.F(f, g, h)(s, t), \lambda t.G(f, g, h)(s, t), \lambda t.H(f, g, h)(s, t)). \qquad \square$$

Да отбележим, че класовете $\mathcal{E}^n$ за всяко естествено число n, $\mathcal{M}^2$ и $\mathcal{L}^2$ удовлетворяват условието от теоремата. Един възможен избор, който е подходящ за всички тези класове, е $C = \tau$, където τ е функцията от секция 2.1 и L, R, които са дефинирани в секция 2.4.

Пример 4.6.6. Функцията $\theta : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, дефинирана с $\theta(\xi) = \ln \xi$, е условно $\mathcal{M}^2$-изчислима, въпреки че не е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима. За да покажем условната $\mathcal{M}^2$-изчислимост на θ, ще използваме функцията θ° от теорема 4.3.13. Тази функция е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима и следователно тя е условно $\mathcal{M}^2$-изчислима. Имаме равенството $\theta(\xi) = \theta^\circ(\xi, \frac{1}{\xi})$ за всички положителни реални числа ξ. От пример 4.6.3 имаме, че функцията реципрочно е условно $\mathcal{M}^2$-изчислима. Така от теорема 4.6.5 θ е условно $\mathcal{M}^2$-изчислима.

Следствие 4.6.7. Всички елементарни функции на анализа са условно $\mathcal{M}^2$-изчислими.

Доказателство. Всички елементарни функции на анализа могат да се получат с композиция на реалните функции от теорема 4.3.10 и теорема 4.3.15 и функциите θ_n от секция 4.3, които са равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислими, както и реалните функции от примери 4.6.3, 4.6.4 и 4.6.6, които са условно $\mathcal{M}^2$-изчислими. От теорема 4.6.5 получаваме условната $\mathcal{M}^2$-изчислимост на всички елементарни функции на анализа. □

Останалите две теореми от [29], които описват връзки между равномерната и условната изчислимост на реални функции, представяме без доказателство.

Дефиниция 4.6.8. Нека $k \in \mathbb{N}$ и $\theta : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^k$. Нека $\mathbf{O}$ е клас от оператори. Реалната функция θ ще наричаме *локално равномерно* $\mathbf{O}$*-изчислима*, ако всяка точка в D има околност U, такава че рестрикцията на θ до $D \cap U$ е равномерно $\mathbf{O}$-изчислима. Когато $\mathbf{O}$ е класът на $\mathcal{F}$-субституционните оператори за клас от функции $\mathcal{F}$, казваме че θ е локално равномерно $\mathcal{F}$-изчислима.

За $k, c \in \mathbb{N}$ нека функцията $\mu_{k,c} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ е дефинирана по следния начин:

$$\mu_{k,c}(x, y) = \begin{cases} c & \text{ако } x = k, \\ y & \text{иначе.} \end{cases}$$

При фиксирани $k, c \in \mathbb{N}$ това е дефиниция със случаи в $\mathcal{E}^0$ и $\mu_{k,c}$ се мажорира от $\lambda xy.y + c$, така че $\mu_{k,c} \in \mathcal{E}^0$. Оттук следва, че $\mu_{k,c} \in \mathcal{E}^n$ за всяко n. Също е ясно, че $\mu_{k,c} \in \mathcal{M}^2$ и $\mu_{k,c} \in \mathcal{L}^2$.

Теорема 4.6.9. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции, който съдържа унарните константи и функциите $\mu_{k,c}$ за $k, c \in \mathbb{N}$. Тогава всички условно $\mathcal{F}$-изчислими реални функции са локално равномерно $\mathcal{F}$-изчислими.

Доказателство. Виж теорема 2 в [29]. □

Пример 4.6.10. Теорема 4.6.9 ни позволява да дадем пример за изчислима реална функция, която не е условно $\mathcal{F}$-изчислима за никой клас от функции $\mathcal{F}$. Нека $\chi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ е реална функция, която приема стойност 1 в положителните реални числа и стойност 0 в отрицателните реални числа. Нека $D = \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ и да дефинираме реалната функция $\theta : D \to \mathbb{R}$ с

$$\theta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \chi\left(\xi - \frac{1}{k+1}\right).$$

Първо ще покажем, че θ е изчислима (в разширения смисъл). Дефинираме релация $S \subseteq \mathbb{N}^5$ с

$$S(x,y,z,t,k) \iff \frac{x-y}{z+1} + \frac{1}{t+1} < \frac{1}{k+1} \vee \frac{x-y}{z+1} - \frac{1}{t+1} > \frac{1}{k+1}.$$

Ясно е, че S е рекурсивна релация. Лесно се съобразява, че за $\xi \in D$, произволно име (f,g,h) на ξ и естествено число k съществува $t \in \mathbb{N}$, такова че $S(f(t),g(t),h(t),t,k)$ и нека $\Delta(f,g,h)(k)$ е най-малкото такова t. Ясно е, че Δ е изчислим частичен оператор. Дефинираме частичен оператор Γ с

$$\Gamma(f,g,h)(k) = \begin{cases} 0 & \text{ако } \dfrac{f(t_0)-g(t_0)}{h(t_0)+1} + \dfrac{1}{t_0+1} < \dfrac{1}{k+1}, \\ 1 & \text{ако } \dfrac{f(t_0)-g(t_0)}{h(t_0)+1} - \dfrac{1}{t_0+1} > \dfrac{1}{k+1}, \\ \text{недефиниран} & \text{иначе,} \end{cases}$$

където $t_0 = \Delta(f,g,h)(k)$. Ясно е, че Γ също е изчислим частичен оператор. При дадено $\xi \in D$, име (f,g,h) на ξ и естествено число k имаме

$$\Gamma(f,g,h)(k) = \chi(\xi - \frac{1}{k+1}).$$

Следователно за всяко $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left|\theta(\xi) - \sum_{k=0}^{t} \frac{\Gamma(f,g,h)(k)}{2^{k+1}}\right| &= \left|\sum_{k=t+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \chi(\xi - \frac{1}{k+1})\right| \\ &\leq \sum_{k=t+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{t+1}} < \frac{1}{t+1}. \end{aligned}$$

Оттук лесно следва, че θ е изчислима.

Да допуснем, че θ е условно $\mathcal{F}$-изчислима за някой клас от функции $\mathcal{F}$. Тогава θ е условно $\mathcal{T}$-изчислима, където $\mathcal{T}$ е класът на всички тотални функции. Класът $\mathcal{T}$ удовлетворява условията в теорема 4.6.9. Тъй като числото 0 е от дефиниционната област на θ, можем да изберем околност U на 0, такава че рестрикцията на θ до $D \cap U$ е равномерно $\mathcal{T}$-изчислима. За класа $\mathcal{T}$ е приложимо твърдение 4.3.8. От него получаваме, че θ е равномерно непрекъсната в $D \cap U$. Но това е невъзможно, тъй като за всяко $k \in \mathbb{N}$ имаме, че θ притежава лява и дясна граница в $\frac{1}{k+1}$, които са различни, и също така $\frac{1}{k+1}$ попада в U за достатъчно големи k.

Разбира се, θ не е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима относно никой клас от функции $\mathcal{F}$. Но да разгледаме рестрикцията на θ до $D \setminus \{0\}$. Оказва се, че тя също не е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима относно никой клас от функции $\mathcal{F}$. В противен случай, тази рестрикция ще бъде равномерно $\mathcal{T}$-изчислима и от лема 4.4.2 θ ще се окаже равномерно $\mathcal{T}$-изчислима, което не е вярно. Интересен факт е, че рестрикцията на θ до $D \setminus \{0\}$ е условно $\mathcal{M}^2$-изчислима. Нека $T \subseteq \mathbb{N}^5$ е релацията, дефинирана с

$$\begin{aligned} T(x,y,z,s_0,s_1) \iff \Bigg[& \left(s_0 = 0 \;\&\; \frac{x-y}{z+1} + \frac{1}{s_1+1} < 0\right) \\ & \vee \left(s_0 = 1 \;\&\; \frac{x-y}{z+1} - \frac{1}{s_1+1} > 1\right) \\ & \vee \left(s_0 > 1 \;\&\; \frac{1}{s_0} < \frac{x-y}{z+1} - \frac{1}{s_1+1} \;\&\; \frac{x-y}{z+1} + \frac{1}{s_1+1} < \frac{1}{s_0-1}\right)\Bigg] \end{aligned}$$

за естествени числа x, y, z, s_0, s_1. Ясно е, че T е $\mathcal{M}^2$-релация. Да дефинираме оператори E, F, G, H с

$$\begin{aligned} E(f,g,h)(s) &= \chi_T(f(L(s)), g(L(s)), h(L(s)), R(s), L(s)), \\ F(f,g,h)(s,t) &= \mathrm{sg}(R(s)), \\ G(f,g,h)(s,t) &= 0, \\ H(f,g,h)(s,t) &= \mathrm{sg}(R(s) \dot{-} 1).(\min(t+1, 2^{R(s) \dot{-} 1}) \dot{-} 1). \end{aligned}$$

Лесно се проверява, че E, F, G, H са $\mathcal{M}^2$-субституционни. За оператора H използваме лема 2.2.5 за графиката и факта, че $\lambda s.2^s$ има Δ_0-определима графика. При $\xi < 0$ имаме, че $\theta(\xi) = 0$. При $\xi > 1$ имаме, че $\theta(\xi) = 1$. При $0 < \xi < 1$

$$\theta(\xi) = \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^s},$$

където s е естественото число, такова че $\frac{1}{s+1} < \xi < \frac{1}{s}$. Оттук лесно се проверява, че E, F, G, H са свидетели за условната $\mathcal{M}^2$-изчислимост на рестрикцията на θ до $D \setminus \{0\}$. □

Примерът показва, че за условно $\mathcal{M}^2$-изчислимите реални функции няма аналог на лема 4.4.2 за едноточково разширение.

Теорема 4.6.11. Нека $\mathcal{F}$ е нормален клас от функции. Нека $\mathcal{F}$ съдържа функцията събиране, функцията отсечена разлика и функцията σ от секция 2.1. Тогава всички локално равномерно $\mathcal{F}$-изчислими реални функции с компактни дефиниционни области са равномерно $\mathcal{F}$-изчислими.

Доказателство. Виж теорема 3 в [29]. □

Условията в теоремата удовлетворяват класовете $\mathcal{E}^n$ при $n \geq 1$, както и класовете $\mathcal{M}^2$ и $\mathcal{L}^2$.

Следствие 4.6.12. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции, който удовлетворява изискванията в теорема 4.6.11. Тогава всички условно $\mathcal{F}$-изчислими реални функции с компактни дефиниционни области са равномерно $\mathcal{F}$-изчислими.

Доказателство. При посочените предположения $\mathcal{F}$ изпълнява условията от лема 2.2.6 за дефиниции със случаи. Оттук лесно се вижда, че за всички $k, c \in \mathbb{N}$ имаме $\mu_{k,c} \in \mathcal{F}$ и също така всички унарни константи са в $\mathcal{F}$. По този начин $\mathcal{F}$ удовлетворява изискванията в теорема 4.6.9 и следствието е непосредствено. □

Получаваме, че за реални функции с компактни дефиниционни области условната $\mathcal{F}$-изчислимост е еквивалентна с равномерната $\mathcal{F}$-изчислимост при неограничителни предположения за класа $\mathcal{F}$.

4.7 Подходящи класове от оператори

В последната секция на тази глава ще обобщим резултатите от предходната секция 4.6 за ситуация, при която класът на $\mathcal{F}$-субституционните оператори се заменя с произволен клас $\mathbf{O}$ от оператори, изпълняващ подходящи ограничения. Грубо казано, тези ограничения описват някои необходими субституционни свойства, които се притежават от класа на $\mathcal{F}$-субституционните оператори (както се вижда от лема 4.7.2 по-долу).

Един оператор ще наричаме *обикновен*, ако той е от тип $(k, 1)$ за някое $k \in \mathbb{N}$. Навсякъде по-нататък (с малки изключения в секция 5.4) ще се ограничим до работа само с обикновени оператори. Тъй като в дефиницията 4.1.2 за изчислителна система на реална функция участват само такива оператори, това няма да се отрази на равномерната изчислимост. Що се отнася до условната изчислимост, ще покажем, че можем така да модифицираме дефиницията, че в нея също да участват само обикновени оператори.

Резултатите в тази секция са публикувани в статията [9]. Следваме изложението от същата статия.

За произволно естествено число c въвеждаме алтернативното означение $\widehat{c}$ за унарната константа $\lambda t.c$, $\widehat{c} \in \mathcal{T}_1$.

Дефиниция 4.7.1. Нека $\mathbf{O}$ е клас от оператори. Класът $\mathbf{O}$ ще наричаме *подходящ*, ако са изпълнени следните условия:

1. Всеки оператор в $\mathbf{O}$ е обикновен.

2. Проекционните оператори принадлежат на класа $\mathbf{O}$, т.е. за всяко $k \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1, \dots, k\}$ $(k, 1)$-операторът F, дефиниран чрез равенството

$$F(f_1, \dots, f_k) = f_i,$$

принадлежи на $\mathbf{O}$.

3. Операторът F от тип $(2, 1)$, дефиниран с равенството
$$F(f_1, f_2)(n) = f_1(f_2(n)),$$
принадлежи на $\mathbf{O}$.

4. Класът $\mathbf{O}$ е затворен относно композиция на оператори, т.е. за всички $k, l \in \mathbb{N}$, ако F е оператор от тип $(k, 1)$, който принадлежи на $\mathbf{O}$ и $G_1, \ldots, G_k$ са оператори от тип $(l, 1)$, всичките принадлежащи на $\mathbf{O}$, то $(l, 1)$-операторът H, дефиниран с
$$H(g_1, \ldots, g_l) = F(G_1(g_1, \ldots, g_l), \ldots, G_k(g_1, \ldots, g_l)),$$
също принадлежи $\mathbf{O}$.

5. За всяко $k \in \mathbb{N}$ и произволен $(k + 1, 1)$-оператор F, принадлежащ на $\mathbf{O}$, $(k, 1)$-операторът G, дефиниран с
$$G(f_1, \ldots, f_k)(n) = F(f_1, \ldots, f_k, \widehat{n})(n),$$
също принадлежи на $\mathbf{O}$.

Лема 4.7.2. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции и $\mathbf{O}$ е класът на всички обикновени $\mathcal{F}$-субституционни оператори. Тогава $\mathbf{O}$ е подходящ.

Доказателство. Условие 1 от дефиниция 4.7.1 е тривиално изпълнено за $\mathbf{O}$. Условие 2 за $\mathbf{O}$ следва от първия пример след дефиниция 4.2.1. Условие 3 за $\mathbf{O}$ следва от условие 1 и клауза 2 на дефиниция 4.2.1. Условие 4 за $\mathbf{O}$ следва от твърдение 4.2.4. За да докажем условие 5 за $\mathbf{O}$, използваме индукция по построението на F.

Ако F е $\mathcal{F}$-субституционен от клауза 1 на 4.2.1, то същото е вярно за G.

Да предположим, че F има вида от клауза 2 на дефиниция 4.2.1, т.е.
$$F(\vec{f}, f_{k+1})(n) = f_i(F_0(\vec{f}, f_{k+1})(n))$$
за някое $i \in \{1, \ldots, k + 1\}$, и от индуктивната хипотеза операторът F_0 има исканото свойство. Ако $i \leq k$, то
$$G(\vec{f})(n) = F(\vec{f}, \widehat{n})(n) = f_i(F_0(\vec{f}, \widehat{n})(n)),$$
така че от клауза 2 на дефиниция 4.2.1 G е $\mathcal{F}$-субституционен. Ако $i = k+1$, то
$$G(\vec{f})(n) = F(\vec{f}, \widehat{n})(n) = \widehat{n}(F_0(\vec{f}, \widehat{n})(n)) = n,$$

следователно от клауза 1 на дефиниция 4.2.1 G е $\mathcal{F}$-субституционен.

Накрая да предположим, че F е дефиниран с

$$F(\vec{f}, f_{k+1})(n) = f(F_1(\vec{f}, f_{k+1})(n), \ldots, F_r(\vec{f}, f_{k+1})(n)),$$

където $f : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ е функция от $\mathcal{F}$ (клауза 3 на дефиниция 4.2.1), и от индуктивната хипотеза операторите $F_1, \ldots, F_r$ притежават исканото свойство. Тогава

$$G(\vec{f})(n) = F(\vec{f}, \widehat{n})(n) = f(F_1(\vec{f}, \widehat{n})(n), \ldots, F_r(\vec{f}, \widehat{n})(n))$$

и G е $\mathcal{F}$-субституционен от клауза 3 на дефиниция 4.2.1. □

Разбира се, класът на всички обикновени оператори е подходящ. Лема 4.7.2 дава фамилия от примери за подходящи класове от непрекъснати оператори, по един за всеки клас от функции $\mathcal{F}$. Съществуват и по-интересни примери за подходящи класове от непрекъснати оператори – това са класът на обикновените изчислими оператори, класът на обикновените примитивно рекурсивни оператори, класът на обикновните елементарни по Калмар оператори и др. Те могат да се дефинират индуктивно, подобно на индуктивните дефиниции за съответните класове от функции. Както следва от пример 4.2.11, всички тези класове съдържат оператори, които не са $\mathcal{F}$-субституционни за никой клас от функции $\mathcal{F}$. Друг подобен пример е класът на обикновените рудиментарни оператори, който ще разгледаме по-подробно в секция 5.4.

Лема 4.7.3. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции и F е оператор от тип $(k, m+1)$ за някои $k, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$. Операторът F е $\mathcal{F}$-субституционен тогава и само тогава, когато съществува $\mathcal{F}$-субституционен $(k+1, m)$-оператор G, такъв че

$$F(\vec{f})(s, \vec{t}) = G(\vec{f}, \widehat{s})(\vec{t}) \tag{4.7.1}$$

за всички $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^k, s \in \mathbb{N}$ и $\vec{t} \in \mathbb{N}^m$.

Доказателство. ($\Longleftarrow$). С индукция по построението на G ще покажем, че за произволен $\mathcal{F}$-субституционен $(k+1, m)$-оператор G операторът F от тип $(k, m+1)$, дефиниран с равенството (4.7.1), е $\mathcal{F}$-субституционен.

Ако G е $\mathcal{F}$-субституционен от клауза 1 на дефиниция 4.2.1, то същото е вярно за F.

Нека G има вида

$$G(\vec{f}, f_{k+1})(\vec{t}) = f_i(G_0(\vec{f}, f_{k+1})(\vec{t}))$$

за някое $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ и нека от индуктивната хипотеза G_0 притежава исканото свойство. Ако $i \leq k$, то

$$F(\vec{f})(s, \vec{t}) = f_i(G_0(\vec{f}, \widehat{s})(\vec{t})),$$

така че F е $\mathcal{F}$-субституционен от клауза 2 на дефиниция 4.2.1. Ако $i = k+1$, то

$$F(\vec{f})(s, \vec{t}) = \widehat{s}(G_0(\vec{f}, \widehat{s})(\vec{t})) = s,$$

така че F е $\mathcal{F}$-субституционен от клауза 1 на дефиниция 4.2.1.

Накрая да предположим, че G е дефиниран с

$$G(\vec{f}, f_{k+1})(\vec{t}) = f(G_1(\vec{f}, f_{k+1})(\vec{t}), \ldots, G_r(\vec{f}, f_{k+1})(\vec{t}))$$

за функция $f : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ от класа $\mathcal{F}$ (клауза 3 на дефиниция 4.2.1), и операторите $G_1, \ldots, G_r$ притежават разглежданото свойство от индуктивната хипотеза. Тогава

$$F(\vec{f})(s, \vec{t}) = f(G_1(\vec{f}, \widehat{s})(\vec{t}), \ldots, G_r(\vec{f}, \widehat{s})(\vec{t}))$$

и така F е $\mathcal{F}$-субституционен от клауза 3 на дефиниция 4.2.1.

($\Longrightarrow$). С индукция по построението на F ще покажем, че за всеки $\mathcal{F}$-субституционен $(k, m+1)$-оператор F съществува $\mathcal{F}$-субституционен оператор G от тип $(k+1, m)$, такъв че равенството (4.7.1) е в сила за всички $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^k, s \in \mathbb{N}$ и $\vec{t} \in \mathbb{N}^m$.

Да предположим, че $F(\vec{f})(s, \vec{t}) = t_i$ за $i \in \{1, \ldots, m\}$. Тогава операторът G, дефиниран с $G(\vec{f}, f_{k+1})(\vec{t}) = t_i$, удовлетворява изискванията.

Ако $F(\vec{f})(s, \vec{t}) = s$, то операторът G, дефиниран с

$$G(\vec{f}, f_{k+1})(\vec{t}) = f_{k+1}(t_1),$$

е $\mathcal{F}$-субституционен (от клаузи 1 и 2 на дефиниция 4.2.1) и

$$G(\vec{f}, \widehat{s})(\vec{t}) = \widehat{s}(t_1) = s = F(\vec{f})(s, \vec{t}).$$

Ако F има вида

$$F(\vec{f})(s, \vec{t}) = f_i(F_0(\vec{f})(s, \vec{t}))$$

за някое $i \in \{1, \ldots, k\}$ и G_0 е $\mathcal{F}$-субституционен оператор, който съществува от индуктивната хипотеза за оператора F_0, то ние можем да дефинираме оператор G с

$$G(\vec{f}, f_{k+1})(\vec{t}) = f_i(G_0(\vec{f}, f_{k+1})(\vec{t})),$$

който е $\mathcal{F}$-субституционен от клауза 2 на дефиниция 4.2.1. Имаме

$$F(\vec{f})(s, \vec{t}) = f_i(G_0(\vec{f}, \widehat{s})(\vec{t})) = G(\vec{f}, \widehat{s})(\vec{t}).$$

Накрая да предположим, че F е дефиниран с

$$F(\vec{f})(s, \vec{t}) = f(F_1(\vec{f})(s, \vec{t}), \ldots, F_r(\vec{f})(s, \vec{t})),$$

където $f : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ е от класа $\mathcal{F}$ (клауза 3 на дефиниция 4.2.1), и от индуктивната хипотеза операторите $F_1, \ldots, F_r$ имат разглежданото свойство, т.е. съществуват $\mathcal{F}$-субституционни оператори $G_1, \ldots, G_r$, такива че

$$F_i(\vec{f})(s, \vec{t}) = G_i(\vec{f}, \widehat{s})(\vec{t})$$

за всички $i \in \{1, \ldots, r\}$. Да дефинираме

$$G(\vec{f}, f_{k+1})(\vec{t}) = f(G_1(\vec{f}, f_{k+1})(\vec{t}), \ldots, G_r(\vec{f}, f_{k+1})(\vec{t})).$$

Тогава G е $\mathcal{F}$-субституционен от клауза 3 на дефиниция 4.2.1 и

$$F(\vec{f})(s, \vec{t}) = f(G_1(\vec{f}, \widehat{s})(\vec{t}), \ldots, G_r(\vec{f}, \widehat{s})(\vec{t})) = G(\vec{f}, \widehat{s})(\vec{t}). \qquad \square$$

Следствие 4.7.4. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции и F е оператор от тип $(k, m+1)$ за $k, m \in \mathbb{N}$. Операторът F е $\mathcal{F}$-субституционен тогава и само тогава, когато съществува $\mathcal{F}$-субституционен $(k+m, 1)$-оператор G, такъв че

$$F(\vec{f})(s_1, \ldots, s_m, t) = G(\vec{f}, \widehat{s_1}, \ldots, \widehat{s_m})(t)$$

за всички $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^k$ и $s_1, \ldots, s_m, t \in \mathbb{N}$.

Следствието показва, че можем да се ограничим с използване само на обикновени $\mathcal{F}$-субституционни оператори.

За $k \in \mathbb{N}$ и функция $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ дефинираме $(k, 1)$-операторът $\mathring{f}$ с равенството

$$\mathring{f}(f_1, \ldots, f_k)(n) = f(f_1(n), \ldots, f_k(n))$$

за всички $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниция 4.7.5. Нека $\mathbf{O}$ е клас от оператори. Една функция $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ще наричаме *представима в* $\mathbf{O}$ или $\mathbf{O}$-*представима*, накратко, ако съответният оператор $\mathring{f}$ принадлежи на $\mathbf{O}$.

Лема 4.7.6. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции и $\mathbf{O}$ е класът на обикновените $\mathcal{F}$-субституционни оператори. Тогава всички функции от $\mathcal{F}$ са $\mathbf{O}$-представими.

Доказателство. Използваме клауза 3 в дефиниция 4.2.1 и условие 2 в дефиниция 4.7.1, което е в сила, тъй като $\mathbf{O}$ е подходящ клас от лема 4.7.2. $\square$

Лема 4.7.7. Нека $\mathbf{O}$ е подходящ клас от оператори. Тогава всички проекции са $\mathbf{O}$-представими.

Доказателство. Нека $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ е проекция, т.е. за някое $i \in \{1, \dots, k\}$ имаме $f(n_1, \dots, n_k) = n_i$. Тогава $\mathring{f}(f_1, \dots, f_k)(n) = f(f_1(n), \dots, f_k(n)) = f_i(n)$ за всички $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\mathring{f}(f_1, \dots, f_k) = f_i$ и $\mathring{f}$ е проекционен оператор. От условие 2 в дефиниция 4.7.1 $\mathring{f} \in \mathbf{O}$. Така f е $\mathbf{O}$-представима. □

Лема 4.7.8. Нека $\mathbf{O}$ е подходящ клас от оператори. Тогава класът на $\mathbf{O}$-представимите функции е затворен относно суперпозиция.

Доказателство. Нека $k, l \in \mathbb{N}, f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ и $g_i : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, k$ са $\mathbf{O}$-представими функции. Нека функцията $g : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ е дефинирана с

$$g(\vec{n}) = f(g_1(\vec{n}), \dots, g_k(\vec{n})).$$

От условие 4 в дефиниция 4.7.1 е достатъчно да покажем, че равенството

$$\mathring{g}(\vec{f}) = \mathring{f}(\mathring{g}_1(\vec{f}), \dots, \mathring{g}_k(\vec{f}))$$

е в сила за всички $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^l$. Това се вижда по следния начин: за всички $n \in \mathbb{N}$ и $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^l$

$$\begin{aligned}
\mathring{g}(\vec{f})(n) &= g(f_1(n), \dots, f_l(n)) \\
&= f(g_1(f_1(n), \dots, f_l(n)), \dots, g_k(f_1(n), \dots, f_l(n))) \\
&= f(\mathring{g}_1(\vec{f})(n), \dots, \mathring{g}_k(\vec{f})(n)) \\
&= \mathring{f}(\mathring{g}_1(\vec{f}), \dots, \mathring{g}_k(\vec{f}))(n).
\end{aligned}$$ □

Лема 4.7.9. Нека $\mathbf{O}$ е подходящ клас от оператори и k е естествено число. Тогава:

1. Операторът F от тип $(k, 1)$, дефиниран с

   $$F(\vec{f}) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}},$$

   принадлежи на $\mathbf{O}$.

2. За всяко $i \in \{1, \dots, k\}$, ако F_0 е $(k, 1)$-оператор, принадлежащ на $\mathbf{O}$, то същото е вярно за оператора F, дефиниран с

   $$F(\vec{f})(n) = f_i(F_0(\vec{f})(n)).$$

3. За произволно $r \in \mathbb{N}$ и функция $f : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$, която е $\mathbf{O}$-представима, ако $F_1, \dots, F_r$ са $(k, 1)$-оператори, принадлежащи на $\mathbf{O}$, то същото е вярно за оператора F, дефиниран с равенството

   $$F(\vec{f})(n) = f(F_1(\vec{f})(n), \dots, F_r(\vec{f})(n)).$$

Доказателство. Ако F е операторът от условие 1 на лемата, то за всички $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^k$ и $n \in \mathbb{N}$

$$F(\vec{f})(n) = n = F_0(\vec{f}, \widehat{n})(n),$$

където $(k+1, 1)$-операторът F_0 е дефиниран с $F_0(\vec{f}, f_{k+1}) = f_{k+1}$, така че $F \in \mathbf{O}$ от условията 2 и 5 на дефиниция 4.7.1.

Ако F е дефиниран според условие 2 в лемата, то за всички $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^k$

$$F(\vec{f}) = F_1(f_i, F_0(\vec{f})),$$

където F_1 е операторът от условие 3 на дефиниция 4.7.1, така че $F \in \mathbf{O}$ от условия 2, 3 и 4 на дефиниция 4.7.1.

Накрая да предположим, че F е дефиниран съгласно условие 3 от лемата. Тогава за всички $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^k$

$$F(\vec{f}) = \mathring{f}(F_1(\vec{f}), \ldots, F_r(\vec{f})),$$

следователно $F \in \mathbf{O}$ от условие 4 на дефиниция 4.7.1 и от факта, че f е $\mathbf{O}$-представима. □

Следствие 4.7.10. Нека $\mathbf{O}$ е подходящ клас от оператори, k е естествени число и f е унарна $\mathbf{O}$-представима функция. Тогава константният $(k, 1)$-оператор F, дефиниран с

$$F(\vec{f}) = f,$$

принадлежи на $\mathbf{O}$.

Доказателство. Нека F_1 е $(k, 1)$-операторът, дефиниран с

$$F_1(\vec{f}) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}.$$

Тогава за всички $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^k$ и всички $n \in \mathbb{N}$

$$F(\vec{f})(n) = f(F_1(\vec{f})(n)),$$

така че $F \in \mathbf{O}$ от условия 1 и 3 на лема 4.7.9. □

Следствие 4.7.11. Нека $\mathbf{O}$ е подходящ клас от оператори и $\mathcal{F}$ е класът на всички $\mathbf{O}$-представими функции. Тогава всички обикновени $\mathcal{F}$-субституционни оператори принадлежат на $\mathbf{O}$.

Доказателство. При фиксирано естествено число k показваме с индукция, че всички $\mathcal{F}$-субституционни $(k,1)$-оператори попадат в класа $\mathbf{O}$, като използваме условия 1, 2 и 3 на лема 4.7.9. $\square$

След като въведохме нужния апарат за работа с подходящи класове от оператори, сме готови да обобщим резултатите от секция 4.6 за условно изчислимите реални функции.

Първоначално ще представим по-обща дефиниция за условна изчислимост. Тя ще използва само обикновени оператори.

Дефиниция 4.7.12. Нека $\mathbf{O}$ е клас от оператори, $k \in \mathbb{N}$ и $\theta : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}^k$. Реалната функция θ ще наричаме *условно изчислима относно* $\mathbf{O}$ или *условно* $\mathbf{O}$*-изчислима*, накратко, ако съществуват $(3k,1)$-оператор E и оператори F, G, H от тип $(3k+1,1)$, такива че $E, F, G, H \in \mathbf{O}$ и винаги когато $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in D$ и $(f_1, g_1, h_1), \ldots, (f_k, g_k, h_k)$ са тройки от унарни функции, именуващи $\xi_1, \ldots, \xi_k$, съответно, е изпълнено следното:

1. Съществува естествено число s, което удовлетворява равенството
$$E(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k)(s) = 0. \tag{4.7.2}$$

2. За всяко естествено число s, което удовлетворява (4.7.2), тройката
$$\begin{gathered}(F(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k, \widehat{s}),\\ G(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k, \widehat{s}),\\ H(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k, \widehat{s}))\end{gathered}$$
е име на $\theta(\xi_1, \ldots, \xi_k)$.

Твърдение 4.7.13. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции и $\mathbf{O}$ е класът на всички обикновени $\mathcal{F}$-субституционни оператори. Една реална функция е условно $\mathcal{F}$-изчислима тогава и само тогава, когато тя е условно $\mathbf{O}$-изчислима.

Доказателство. Използваме случая $m = 1$ на лема 4.7.3. $\square$

Нека $\mathbf{O}$ е подходящ клас от оператори. Тогава всички равномерно $\mathbf{O}$-изчислими реални функции са условно $\mathbf{O}$-изчислими. Наистина, нека θ е реална функция, $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$ и $(F^\circ, G^\circ, H^\circ)$ е изчислителна система за θ, която се състои от оператори, принадлежащи на $\mathbf{O}$. Тогава ние можем да удовлетворим изискванията на дефиниция 4.7.12 чрез операторите E, F, G, H, дефинирани с
$$\begin{aligned}
E(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k) &= \mathrm{id}_{\mathbb{N}},\\
F(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k, e) &= F^\circ(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k),\\
G(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k, e) &= G^\circ(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k),\\
H(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k, e) &= H^\circ(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k).
\end{aligned}$$

Операторът E принадлежи на $\mathbf{O}$ от част 1 на лема 4.7.9. От условия 2 и 4 на дефиниция 4.7.1 и от факта, че $F^\circ, G^\circ, H^\circ$ принадлежат на $\mathbf{O}$, операторите F, G, H също принадлежат на $\mathbf{O}$.

Да отбележим, че ако $\mathbf{O}$ се състои от изчислими оператори, то условно $\mathbf{O}$-изчислимите функции са изчислими (в разширения смисъл).

Следва обобщението на теорема 4.6.5. В доказателството използваме равенствата

$$\widehat{f(c)} = \lambda t.f(c) = \mathring{f}(\lambda t.c) = \mathring{f}(\widehat{c}),$$

които са изпълнени за всички $f \in \mathcal{T}_1, c \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.7.14. Нека $\mathbf{O}$ е подходящ клас от оператори. Нека съществуват бинарна $\mathbf{O}$-представима функция C и унарни $\mathbf{O}$-представими функции L и R, такива че

$$\{(u,v) \in \mathbb{N}^2 \,|\, C(u,v) = 0\} = \{(0,0)\}, \quad \{(L(s), R(s)) \,|\, s \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2.$$

Тогава операцията композиция на реални функции запазва условната $\mathbf{O}$-изчислимост.

Доказателство. Както в теорема 4.6.5 се ограничаваме само до реални функции на един аргумент. Нека $\theta_0 : D_0 \to \mathbb{R}$ и $\theta_1 : D_1 \to \mathbb{R}$, $D_0, D_1 \subseteq \mathbb{R}$ са условно $\mathbf{O}$-изчислими реални функции на един реален аргумент. Ще покажем условната $\mathbf{O}$-изчислимост на реалната функция $\theta : D \to \mathbb{R}$, дефинирана с $\theta(\xi) = \theta_0(\theta_1(\xi))$, където $D = \{\xi \in \mathbb{R} | \xi \in D_1 \ \& \ \theta_1(\xi) \in D_0\}$. За $i = 0, 1$ нека E_i, F_i, G_i, H_i са оператори от $\mathbf{O}$, такива че $\exists s(E_i(f,g,h)(s) = 0)$ и

$$\begin{aligned} &\forall s(E_i(f,g,h)(s) = 0 \\ &\qquad \Longrightarrow (F_i(f,g,h,\widehat{s}), G_i(f,g,h,\widehat{s}), H_i(f,g,h,\widehat{s})) \text{ именува } \theta_i(\xi)) \end{aligned}$$

за произволни $\xi \in D_i$ и тройка (f,g,h), именуваща ξ. Ще покажем, че изискванията на дефиниция 4.7.12 за реалната функция θ се удовлетворяват чрез операторите E, F, G, H, дефинирани по следния начин:

$$\begin{aligned} E(f,g,h)(s) &= C(E_1(f,g,h)(R(s)), \\ &\qquad E_0(F_1(f,g,h,\mathring{R}(\widehat{s})), G_1(f,g,h,\mathring{R}(\widehat{s})), H_1(f,g,h,\mathring{R}(\widehat{s})))(L(s))), \\ F(f,g,h,e) &= F_0(F_1(f,g,h,\mathring{R}(e)), G_1(f,g,h,\mathring{R}(e)), H_1(f,g,h,\mathring{R}(e)), \mathring{L}(e)), \\ G(f,g,h,e) &= G_0(F_1(f,g,h,\mathring{R}(e)), G_1(f,g,h,\mathring{R}(e)), H_1(f,g,h,\mathring{R}(e)), \mathring{L}(e)), \\ H(f,g,h,e) &= H_0(F_1(f,g,h,\mathring{R}(e)), G_1(f,g,h,\mathring{R}(e)), H_1(f,g,h,\mathring{R}(e)), \mathring{L}(e)). \end{aligned}$$

Да предположим, че $\xi \in D$ и (f, g, h) е тройка, която именува ξ. От условната $\mathbf{O}$-изчислимост на θ_1 съществува естествено число s_1, такова че

$$E_1(f, g, h)(s_1) = 0, \tag{4.7.3}$$

и ако изберем такова s_1, реалното число $\theta_1(\xi)$ се именува от тройката (f_1, g_1, h_1), където

$$f_1 = F_1(f, g, h, \widehat{s_1}), \;\; g_1 = G_1(f, g, h, \widehat{s_1}), \;\; h_1 = H_1(f, g, h, \widehat{s_1}). \tag{4.7.4}$$

От условната $\mathbf{O}$-изчислимост на θ_0 съществува $s_0 \in \mathbb{N}$, такова че

$$E_0(f_1, g_1, h_1)(s_0) = 0. \tag{4.7.5}$$

Ако $s \in \mathbb{N}$ е такова, че $L(s) = s_0$ и $R(s) = s_1$, то $E(f, g, h)(s) = 0$. Сега да разгледаме произволно естествено число, такова че $E(f, g, h)(s) = 0$. Нека $s_0 = L(s)$ и $s_1 = R(s)$. Равенството $E(f, g, h)(s) = 0$ влече равенството (4.7.3), както и равенството (4.7.5) за функциите f_1, g_1, h_1, дефинирани чрез равенството (4.7.4). От (4.7.3) следва, че (f_1, g_1, h_1) е име на $\theta_1(\xi)$ и заедно с (4.7.5) това дава, че $\theta(\xi) = \theta_0(\theta_1(\xi))$ се именува от тройката

$$(F_0(f_1, g_1, h_1, \mathring{L}(\widehat{s})), G_0(f_1, g_1, h_1, \mathring{L}(\widehat{s})), H_0(f_1, g_1, h_1, \mathring{L}(\widehat{s}))),$$

която съвпада с тройката

$$(F(f, g, h, \widehat{s}), G(f, g, h, \widehat{s}), H(f, g, h, \widehat{s})).$$

Операторите F, G, H принадлежат на $\mathbf{O}$ от условия 2 и 4 на дефиниция 4.7.1 и от факта, че всичките оператори $F_0, G_0, H_0, F_1, G_1, H_1, \mathring{R}, \mathring{L}$ принадлежат на $\mathbf{O}$. Остава да покажем, че операторът E също попада в $\mathbf{O}$. Нека операторите A и B са дефинирани с

$$A(f, g, h)(s) = E_1(f, g, h)(R(s)),$$
$$B(f, g, h)(s) = E_0(F_1(f, g, h, \mathring{R}(\widehat{s})), G_1(f, g, h, \mathring{R}(\widehat{s})), H_1(f, g, h, \mathring{R}(\widehat{s})))(L(s)).$$

Тогава имаме

$$E(f, g, h)(s) = C(A(f, g, h)(s), B(f, g, h)(s))$$

и следователно от факта, че функцията C е $\mathbf{O}$-представима, с прилагане на точка 3 от лема 4.7.9 получаваме, че за да имаме $E \in \mathbf{O}$ е достатъчно да покажем, че $A, B \in \mathbf{O}$. Нека $(3, 1)$-операторът U е дефиниран с

$$U(f, g, h) = R$$

за всички унарни функции f, g, h и $(4,1)$-операторът V е дефиниран с

$$V(f, g, h, e) = L$$

за всички унарни функции f, g, h, e. Функциите R и L са $\mathbf{O}$-представими. Така от следствие 4.7.10 получаваме, че операторите U и V принадлежат на $\mathbf{O}$. Имаме равенството

$$A(f, g, h)(s) = E_1(f, g, h)(U(f, g, h)(s)),$$

така че $A \in \mathbf{O}$ от условия 3 и 4 на дефиниция 4.7.1 и от факта, че $E_1, U \in \mathbf{O}$. За да покажем, че B също принадлежи на $\mathbf{O}$, отбелязваме, че за всички унарни функции f, g, h и $s \in \mathbb{N}$

$$B(f, g, h)(s) = W(f, g, h, \widehat{s})(s),$$

където W е дефиниран с

$$W(f, g, h, e)(s) = E_0(F_1(f, g, h, \mathring{R}(e)), G_1(f, g, h, \mathring{R}(e)), H_1(f, g, h, \mathring{R}(e)))(L(s)).$$

Тъй като $L(s) = V(f, g, h, e)(s)$, операторът W принадлежи на $\mathbf{O}$ от условия 2, 3 и 4 на дефиниция 4.7.1 и факта, че $E_0, F_1, G_1, H_1, \mathring{R}, V$ принадлежат на $\mathbf{O}$. Следователно от условие 5 на дефиниция 4.7.1 операторът B също принадлежи на $\mathbf{O}$. □

Представяме обобщението на теорема 4.6.9.

Теорема 4.7.15. Нека $\mathbf{O}$ е подходящ клас от непрекъснати оператори и функциите $\widehat{c}$ за всички $c \in \mathbb{N}$ и функциите $\mu_{k,c}$ за всички $k, c \in \mathbb{N}$ са $\mathbf{O}$-представими. Тогава всички условно $\mathbf{O}$-изчислими реални функции са локално равномерно $\mathbf{O}$-изчислими (в смисъл на дефиниция 4.6.8).

Доказателство. Виж теорема 5.2 в [9]. □

За всяко $n \in \mathbb{N}$ нека δ_n е функцията от $\mathcal{T}_{2n+1}$, дефинирана по следния начин: за всички $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z \in \mathbb{N}$, ако $x_i = 0$ за някое $i \in \{1, \ldots, n\}$, то

$$\delta_n(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z) = y_i$$

за най-малкото такова i, иначе

$$\delta_n(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z) = z.$$

В частност,

$$\delta_1(x, y, z) = \begin{cases} y & \text{ако } x = 0, \\ z & \text{иначе.} \end{cases}$$

Дефиниция 4.7.16. Един клас $\mathbf{O}$ от оператори ще наричаме *благоприличен*, ако $\mathbf{O}$ е подходящ и функциите наследник, отсечена разлика и δ_1 са $\mathbf{O}$-представими.

Лема 4.7.17. Нека $\mathbf{O}$ е благоприличен клас от оператори. Тогава всички унарни константи и функциите δ_n за $n = 0, 1, 2, \ldots,$ са $\mathbf{O}$-представими.

Доказателство. Като използваме $\mathbf{O}$-представимостта на функцията наследник и отсечената разлика, както и леми 4.7.7 и 4.7.8, лесно виждаме, че всички унарни константи са $\mathbf{O}$-представими. $\mathbf{O}$-представимостта на функциите δ_n следва от равенствата

$$\delta_0(z) = z,$$
$$\delta_{n+1}(x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots, x_{n+1}, y_{n+1}, z) = \delta_1(x_1, y_1, \delta_n(x_2, y_2, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1}, z))$$

с индукция по n и с прилагане на леми 4.7.7 и 4.7.8. □

Следствие 4.7.18. Ако $\mathbf{O}$ е благоприличен клас от непрекъснати оператори, то всички условно $\mathbf{O}$-изчислими реални функции са локално равномерно $\mathbf{O}$-изчислими.

Доказателство. Ако $\mathbf{O}$ е благоприличен клас от оператори, то от горната лема, равенството

$$\mu_{k,c}(x, y) = \delta_1(x \dot{-} k, \delta_1(k \dot{-} x, c, y), y)$$

и леми 4.7.7, 4.7.8, функциите, които са изброени в условието на теорема 4.7.15 са $\mathbf{O}$-представими. □

Последната теорема обобщава теорема 4.6.11.

Теорема 4.7.19. Нека $\mathbf{O}$ е благоприличен клас от оператори. Тогава всички локално равномерно $\mathbf{O}$-изчислими реални функции с компактни дефиниционни области са равномерно $\mathbf{O}$-изчислими.

Доказателство. Виж теорема 6.4 в [9]. □

Заключението на теорема 4.6.11 е еквивалентно на заключението на горната теорема в частния случай, при който $\mathbf{O}$ е класът на обикновените $\mathcal{F}$-субституционни оператори и $\mathcal{F}$ е клас от функции, удовлетворяващ условията в теорема 4.6.11. За такъв $\mathcal{F}$ са в сила лемата 2.2.4 за представяне на релациите за сравнение и лемата 2.2.6 за дефиниции със случаи, от което следва $\delta_1 \in \mathcal{F}$. Така класът $\mathbf{O}$ в този случай е благоприличен от леми 4.7.2 и 4.7.6.

Следствие 4.7.20. Ако $\mathbf{O}$ е благоприличен клас от непрекъснати оператори, то всички условно $\mathbf{O}$-изчислими реални функции с компактни дефиниционни области са равномерно $\mathbf{O}$-изчислими.

Доказателство. От следствие 4.7.18 и горната теорема. □

Глава 5

ХАРАКТЕРИЗАЦИОННИ ТЕОРЕМИ ЗА ИЗЧИСЛИМОСТ НА РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

5.1 Приемливи двойки от клас от функции и клас от обикновени оператори

Една от статиите, близки до тематиката на дисертацията, е [31]. В нея авторите Катрин Тент и Мартин Циглер също разглеждат два вида относителна изчислимост на реални функции. Но в техния подход не се използват оператори и имена, а се работи по-директно с рационалните апроксимации на аргументите и на значението на реалната функция.

Според [31] един клас от функции $\mathcal{F}$ е *добър*, ако той съдържа изходните функции и отсечената разлика и е затворен относно суперпозиция и ограничена сума. По този начин $\mathcal{L}^2$ е най-малкият добър клас. Всеки добър клас е удобен в смисъл на дефиниция 4.3.4.

Двете понятия в [31] за изчислимост на реална функция $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$ с отворена дефиниционна област D са следните:

- θ да бъде *във* $\mathcal{F}$,
- θ да бъде *равномерно във* $\mathcal{F}$

за добър клас от функции $\mathcal{F}$. Както се подразбира, второто понятие е по-тясно. Разликата между двете понятия е подобна на разликата между равномерната и условната изчислимост – за по-широкото понятие се допуска процесът на апроксимация да зависи от допълнителен естествен параметър, но неговото описание използва разстоянието до допълнението на дефиниционната област на θ и не използва класа от функции $\mathcal{F}$. По този начин средствата, които се осигуряват от класа $\mathcal{F}$, може да са недостатъчни за да се определи стойността на този параметър. Както отбелязваме и по-долу, индикация за това е съществуването на неизчислими реални функции, които са в класа на рекурсивните функции.

Оказва се, че за добър клас от функции $\mathcal{F}$, равномерната $\mathcal{F}$-изчислимост на реална функция е еквивалентна с това тя да бъде равномерно във $\mathcal{F}$. Това е характеризационната теорема на Скордев, доказана в статията [27], и нейната по-обща версия от [28].

Но тази прилика не се обобщава за по-общите изчислимости. Както е упоменато в бележките в края на статията [29], класът на реалните функции, които са в $\mathcal{L}^2$, не е затворен относно композиция и не съдържа всички елементарни функции на анализа, за разлика от класа на условно $\mathcal{L}^2$-изчислимите реални функции. Също така съществуват реални функции, които са в $\mathcal{L}^2$, но не са изчислими, докато всички условно $\mathcal{L}^2$-изчислими реални функции са изчислими.

Основната цел на тази глава е да представи друга дефиниция за условна изчислимост, в стила на Тент и Циглер, за която може да се обобщи характеризационната теорема. Разбира се, тя ще бъде лишена от недостатъците, описани в предния параграф.

Доказателството на това обобщение ще използва съществено идеите, представени в статията [28], в която е доказана общата версия на характеризационната теорема за равномерната изчислимост. Затова ще изложим подробно доказателството на тази теорема в отделна секция в тази глава.

Централното понятие в [28] е *приемлива двойка*. За нашите цели ще трябва да усилим малко дефиницията от [28]. Да напомним, че обикновените оператори са онези от тип $(k, 1)$ за някое $k \in \mathbb{N}$.

Дефиниция 5.1.1. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции и $\mathbf{O}$ е клас от оператори. Двойката $(\mathcal{F}, \mathbf{O})$ ще наричаме *приемлива*, ако са изпълнени следните условия:

1. Изходните функции, произведението и отсечената разлика принадлежат на класа $\mathcal{F}$.

2. Класът $\mathcal{F}$ е затворен относно суперпозиция и ограничена минимизация.

3. Всеки оператор в $\mathbf{O}$ е обикновен и непрекъснат.

4. За всяко $k \in \mathbb{N}$ $(k,1)$-операторът F, дефиниран с $F(f_1,\dots,f_k) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, принадлежи на $\mathbf{O}$.

5. За $k \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1,\dots,k\}$, ако F_0 е $(k,1)$-оператор, принадлежащ на $\mathbf{O}$, то $(k,1)$-операторът F, дефиниран с
$$F(f_1,\dots,f_k)(n) = f_i(F_0(f_1,\dots,f_k)(n)),$$
също принадлежи на $\mathbf{O}$.

6. За естествени числа k,m и $f \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{F}$, ако $F_1,\dots,F_m$ са $(k,1)$-оператори, принадлежащи на $\mathbf{O}$, то $(k,1)$-операторът F, дефиниран с
$$F(f_1,\dots,f_k)(n) = f(F_1(f_1,\dots,f_k)(n),\dots,F_m(f_1,\dots,f_k)(n)),$$
също принадлежи на $\mathbf{O}$.

7. Класът $\mathbf{O}$ е затворен относно композиция на оператори (в смисъл на дефиниция 4.2.3).

8. Винаги когато $k,m \in \mathbb{N}, f_1,\dots,f_k \in \mathcal{T}_{m+1} \cap \mathcal{F}$ и F е $(k,1)$-оператор, попадащ в $\mathbf{O}$, $(m+1)$-местната функция
$$\lambda\vec{s}n.F(\lambda t.f_1(\vec{s},t),\dots,\lambda t.f_k(\vec{s},t))(n)$$
принадлежи на класа $\mathcal{F}$.

9. За всяко $k \in \mathbb{N}$ и $(k,1)$-оператор F, принадлежащ на $\mathbf{O}$, съществува $(1,1)$-оператор Ω, също принадлежащ на $\mathbf{O}$, който определя равномерна граница за F (в смисъл на дефиниция 4.2.12).

Съществените разлики от дефиницията за приемлива двойка в [28] са следните: в настоящата дефиниция се предполага допълнително, че класът $\mathcal{F}$ от функции е затворен относно ограничена минимизация и че класът $\mathbf{O}$ се състои от непрекъснати оператори и е затворен относно композиция на оператори. Също така има малка разлика в списъка от функции в условие 1, но тя е несъществена, поради условие 2. Важният факт е, че ако $(\mathcal{F},\mathbf{O})$ е приемлива двойка в смисъла на настоящата дефиниция 5.1.1, то $(\mathcal{F},\mathbf{O})$ е приемлива двойка и в смисъла на [28]. Това позволява да използваме свободно резултатите от [28].

Ясно е, че най-малкият клас от функции, който изпълнява условията 1 и 2 от дефиниция 5.1.1, е точно класът $\mathcal{M}^2$. По този начин, ако един клас от функции $\mathcal{F}$ удовлетворява тези условия, то $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{F}$. За такъв клас $\mathcal{F}$ могат да се направят напълно аналогични разглеждания, както в секция 2.6.

Например, $\mathcal{F}$ съдържа функцията частно и бинарния максимум и е затворен относно ограничен минимум и ограничен максимум. Като използваме понятията от дефиниция 4.2.13 и дефиниция 4.3.4, можем да кажем, че $\mathcal{F}$ е удобен клас, който удовлетворява условието за мажориране.

При произволен клас от функции $\mathcal{F}$ нека $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}$ е най-малкият клас от оператори, който удовлетворява условията 4, 5 и 6 от дефиниция 5.1.1. Справка с дефиниция 4.2.1 показва, че $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}$ съвпада с класа на обикновените $\mathcal{F}$-субституционни оператори. Разбира се, ако $(\mathcal{F}, \mathbf{O})$ е приемлива двойка, то $\mathbf{O}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathbf{O}$.

Примери за приемливи двойки са посочени в [28] (лесно се съобразява, че те удовлетворяват и настоящата по-силна дефиниция). Това са двойките $(\mathcal{F}, \mathbf{O})$, където:

- $\mathcal{F}$ е класът на рекурсивните функции и $\mathbf{O}$ се състои от всички обикновени изчислими оператори;
- $\mathcal{F}$ е класът на примитивно рекурсивните функции и $\mathbf{O}$ се състои от всички обикновени примитивно рекурсивни оператори;
- $\mathcal{F}$ е класът на елементарните по Калмар функции ($\mathcal{F} = \mathcal{E}^3$) и $\mathbf{O}$ се състои от всички обикновени елементарни по Калмар оператори.

В секция 5.4 ще разгледаме по-подробно още един пример за приемлива двойка с първа компонента класа $\mathcal{M}^2$.

Друга фамилия от примери за приемливи двойки, с възможно най-малка втора компонента, се дава от следното твърдение.

Твърдение 5.1.2. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции, който удовлетворява условията 1 и 2 от дефиниция 5.1.1. Тогава двойката $(\mathcal{F}, \mathbf{O}_{\mathcal{F}})$ е приемлива.

Доказателство. Условия 1 и 2 са изпълнени по предположение. Условие 3 е изпълнено, тъй като $\mathcal{F}$-субституционните оператори са непрекъснати съгласно твърдение 4.2.10. Условия 4, 5 и 6 са изпълнени от дефиницията на класа $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}$. Условия 7, 8 следват от твърдения 4.2.4, 4.2.6, съответно. Условие 9 е теоремата 4.2.15 за равномерност (класът $\mathcal{F}$ удовлетворява изискванията от тази теорема, както отбелязохме по-горе). □

За всеки от трите примера $(\mathcal{F}, \mathbf{O})$ за приемливи двойки по-горе имаме $\mathbf{O}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathbf{O}$, но $\mathbf{O}_{\mathcal{F}} \neq \mathbf{O}$. Това следва лесно от пример 4.2.11. По този начин класът $\mathcal{F}$ от функции в тези примери е първа компонента на две различни приемливи двойки – $(\mathcal{F}, \mathbf{O}_{\mathcal{F}})$ и $(\mathcal{F}, \mathbf{O})$.

От друга страна, ако $(\mathcal{F}_1, \mathbf{O})$ и $(\mathcal{F}_2, \mathbf{O})$ са приемливи двойки, то $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, както е отбелязано в бележка в секция 3 на [28].

5.2 Характеризационна теорема за равномерно изчислимите реални функции

В тази секция излагаме доказателството на Скордев на характеризационната теорема от [28]. Идеите от него ще са нужни в следващата секция.

Дефиниция 5.2.1. За клас от функции $\mathcal{F}$ и $k \in \mathbb{N}$ реалната функция $\theta : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}^k$, е *равномерно $\mathcal{F}$-изчислима в стила на Тент и Циглер*, ако съществуват функции $d \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{F}$ и $f, g, h \in \mathcal{T}_{3k+1} \cap \mathcal{F}$, такива че за $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in D$ и $p_1, q_1, r_1, \ldots, p_k, q_k, r_k, t \in \mathbb{N}$ неравенствата

$$|\xi_i| \leq t + 1, \quad \left|\frac{p_i - q_i}{r_i + 1} - \xi_i\right| < \frac{1}{d(t) + 1} \quad \text{за } i = 1, \ldots, k \tag{5.2.1}$$

влекат, че числата

$$p = f(p_1, q_1, r_1, \ldots, p_k, q_k, r_k, t), \quad q = g(p_1, q_1, r_1, \ldots, p_k, q_k, r_k, t), \tag{5.2.2}$$

$$r = h(p_1, q_1, r_1, \ldots, p_k, q_k, r_k, t) \tag{5.2.3}$$

удовлетворяват неравенството

$$\left|\frac{p - q}{r + 1} - \theta(\xi_1, \ldots, \xi_k)\right| < \frac{1}{t + 1}. \tag{5.2.4}$$

Да отбележим, че изборът на името на понятието от дефиницията е обоснован – когато класът от функции $\mathcal{F}$ е добър (виж предходната секция) и множеството D е отворено в $\mathbb{R}^k$, реалната функция θ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима в стила на Тент и Циглер тогава и само тогава, когато θ е равномерно във $\mathcal{F}$ в смисъла на [31].

Следващата теорема характеризира равномерната $\mathbf{O}$-изчислимост, дефинирана в 4.1.4.

Теорема 5.2.2 (Скордев, [28])**.** Нека $(\mathcal{F}, \mathbf{O})$ е приемлива двойка и $k \in \mathbb{N}$. Реалната функция $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^k$ е равномерно $\mathbf{O}$-изчислима тогава и само тогава, когато θ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима в стила на Тент и Циглер.

Доказателство. Преди всичко, $\mathcal{F}$ удовлетворява условия 1 и 2 от дефиниция 5.1.1, така че $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{F}$.

За посоката ($\Longleftarrow$) да предположим, че d, f, g, h са функции, които изпълняват изискванията от дефиниция 5.2.1. Дефинираме $(3k, 1)$-оператори F, G, H с равенствата

$$F(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k)(n) = p, \quad G(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k)(n) = q,$$

$$H(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(n) = r,$$

където числата p, q, r се дефинират с равенствата (5.2.2) и (5.2.3) при

$$t = \max(f_1(0), g_1(0), \dots, f_k(0), g_k(0), n),$$

$$p_i = f_i(d(t)), \quad q_i = g_i(d(t)), \quad r_i = h_i(d(t)) \quad \text{за } i = 1, \dots, k.$$

От условия 4, 5 и 6 в дефиниция 5.1.1 получаваме, че $F, G, H \in \mathbf{O}$. Ясно е, че ако са дадени $(\xi_1, \dots, \xi_k) \in D$ и унарни функции $f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k$, такива че (f_i, g_i, h_i) е име на ξ_i за $i = 1, \dots, k$, то за произволно $n \in \mathbb{N}$ горните числа $p_1, q_1, r_1, \dots, p_k, q_k, r_k, t$ удовлетворяват неравенствата (5.2.1), тъй като от бележка 3.1.4

$$|\xi_i| < |f_i(0) - g_i(0)| + 1 \leq \max(f_i(0), g_i(0)) + 1 \leq t + 1 \quad \text{за } i = 1, \dots, k,$$

така че за съответните числа p, q, r ще е изпълнено неравенството (5.2.4). Но също имаме и $t \geq n$, което влече

$$\left|\frac{p - q}{r + 1} - \theta(\xi_1, \dots, \xi_k)\right| < \frac{1}{n + 1},$$

т.е. тройката от унарни функции

$$(F(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k),$$
$$G(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k),$$
$$H(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k))$$

е име на $\theta(\xi_1, \dots, \xi_k)$. По този начин (F, G, H) е изчислителна система за θ и следователно θ е равномерно $\mathbf{O}$-изчислима.

За посоката $(\Longrightarrow)$ нека (F, G, H) е изчислителна система за θ, за която $F, G, H \in \mathbf{O}$. Да изберем $(1,1)$-оператори $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \in \mathbf{O}$, които определят равномерна граница за F, G, H, съответно. Те съществуват от условие 9 в дефиниция 5.1.1. Дефинираме бинарна функция v с равенството

$$v(s, t) = \max(\Omega_1(\lambda x.u(x, s))(t), \Omega_2(\lambda x.u(x, s))(t), \Omega_3(\lambda x.u(x, s))(t)),$$

където $u(x, s) = (s + 2)(x + 1)$. Като използваме условия 1, 2 и 8 в дефиниция 5.1.1, получаваме че $v \in \mathcal{F}$. Съгласно дефиниция 4.2.12 функцията v има следното свойство: за произволни $s, t \in \mathbb{N}$, ако унарните функции $f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k, f'_1, g'_1, h'_1, \dots, f'_k, g'_k, h'_k$ се мажорират от унарната функция $\lambda x.(s + 2)(x + 1)$ и

$$f_i(x) = f'_i(x), \quad g_i(x) = g'_i(x), \quad h_i(x) = h'_i(x) \quad (i = 1, \dots, k)$$

за всички естествени числа $x \leq v(s,t)$, то са в сила равенствата

$$F(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(t) = F(f'_1, g'_1, h'_1, \dots, f'_k, g'_k, h'_k)(t),$$
$$G(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(t) = G(f'_1, g'_1, h'_1, \dots, f'_k, g'_k, h'_k)(t),$$
$$H(f_1, g_1, h_1, \dots, f_k, g_k, h_k)(t) = H(f'_1, g'_1, h'_1, \dots, f'_k, g'_k, h'_k)(t).$$

Дефинираме унарна функция d и $(3k+1)$-местни функции f, g, h с

$$d(t) = 2v(t,t) + 1,$$

$$f(p_1, q_1, r_1, \dots, p_k, q_k, r_k, t) = F(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \dots, f_k, g_k, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(t),$$
$$g(p_1, q_1, r_1, \dots, p_k, q_k, r_k, t) = G(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \dots, f_k, g_k, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(t),$$
$$h(p_1, q_1, r_1, \dots, p_k, q_k, r_k, t) = H(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \dots, f_k, g_k, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(t),$$

където

$$f_i = \lambda x.ehelp(p_i, q_i, r_i, x), \quad g_i = \lambda x.ehelp(q_i, p_i, r_i, x) \quad \text{за } i = 1, \dots, k.$$

Тук $ehelp$ е функцията, дефинирана преди бележка 4.3.1. Ясно е, че $d \in \mathcal{F}$ и също $f, g, h \in \mathcal{F}$ от условия 1, 2 и 8 в дефиниция 5.1.1 и факта, че $ehelp \in \mathcal{F}$. Ще покажем, че функциите d, f, g, h изпълняват изискванията от дефиниция 5.2.1. Да предположим, че $(\xi_1, \dots, \xi_k) \in D$ и $p_1, q_1, r_1, \dots, p_k, q_k, r_k, t$ са естествени числа, които удовлетворяват неравенствата (5.2.1). Нека p, q, r са дефинирани чрез равенствата (5.2.2), (5.2.3). Целта е да докажем неравенството (5.2.4). От бележка 4.3.1 имаме, че за всяко $x \in \mathbb{N}$ и всяко $i \in \{1, \dots, k\}$

$$\left| \frac{f_i(x) - g_i(x)}{x+1} - \frac{p_i - q_i}{r_i + 1} \right| \leq \frac{1}{2(x+1)}, \quad f_i(x).g_i(x) = 0. \tag{5.2.5}$$

Разглеждаме унарни функции $f'_1, g'_1, \dots, f'_k, g'_k$, такива че

$$f'_i(x) = f_i(x), \quad g'_i(x) = g_i(x) \quad (i = 1, \dots, k)$$

за всички естествени числа $x \leq v(t,t)$, и също

$$\left| \frac{f'_i(x) - g'_i(x)}{x+1} - \xi_i \right| < \frac{1}{x+1}, \quad f'_i(x).g'_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, k) \tag{5.2.6}$$

за всички естествени числа $x > v(t,t)$. Всъщност (5.2.6) е изпълнено и за $x \leq v(t,t)$, тъй като от (5.2.5)

$$\left| \frac{f'_i(x) - g'_i(x)}{x+1} - \xi_i \right| = \left| \frac{f_i(x) - g_i(x)}{x+1} - \xi_i \right| \leq \left| \frac{f_i(x) - g_i(x)}{x+1} - \frac{p_i - q_i}{r_i + 1} \right| + \left| \frac{p_i - q_i}{r_i + 1} - \xi_i \right|$$
$$< \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2v(t,t)+2} \leq \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2x+2} = \frac{1}{x+1},$$

$$f_i'(x).g_i'(x) = f_i(x).g_i(x) = 0.$$

По този начин $(f_i', g_i', \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е име на ξ_i за всяко $i \in \{1, \dots, k\}$, следователно

$$\left| \frac{F(f_1', g_1', \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \dots, f_k', g_k', \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(t) - G(f_1', g_1', \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \dots, f_k', g_k', \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(t)}{H(f_1', g_1', \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \dots, f_k', g_k', \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(t) + 1} - \theta(\xi_1, \dots, \xi_k) \right| < \frac{1}{t+1}.$$

От (5.2.6) следва, че всяко от числата $f_i'(x), g_i'(x)$ е по-малко от произведението $(|\xi_i| + 1)(x + 1)$. С помощта на първото неравенство в (5.2.1) получаваме, че функциите $f_1', g_1', \dots, f_k', g_k'$ се мажорират от $\lambda x.(t + 2)(x + 1)$. Същото е вярно за функциите $f_1, g_1, \dots, f_k, g_k$, тъй като от (5.2.5) и (5.2.1) имаме

$$\left| \frac{f_i(x) - g_i(x)}{x + 1} \right| \leq \left| \frac{p_i - q_i}{r_i + 1} \right| + \frac{1}{2} < |\xi_i| + 1 \quad \text{за } i = 1, \dots, k.$$

Разбира се, $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ също се мажорира от $\lambda x.(t+2)(x+1)$. Прилагаме свойството на функцията v от по-горе при $s = t$ и получаваме

$$F(f_1', g_1', \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \dots, f_k', g_k', \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(t) = F(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \dots, f_k, g_k, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(t) = p,$$

$$G(f_1', g_1', \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \dots, f_k', g_k', \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(t) = G(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \dots, f_k, g_k, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(t) = q,$$

$$H(f_1', g_1', \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \dots, f_k', g_k', \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(t) = H(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \dots, f_k, g_k, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(t) = r.$$

По този начин p, q, r удовлетворяват (5.2.4). □

Следствие 5.2.3 (Скордев, [27]). Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции, който удовлетворява условия 1 и 2 в дефиниция 5.1.1. Тогава една реална функция е равномерно $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}$-изчислима тогава и само тогава, когато тя е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима в стила на Тент и Циглер.

Разбира се, равномерната $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}$-изчислимост е точно равномерната $\mathcal{F}$-изчислимост от секция 4.3.

Следствие 5.2.4. За приемлива двойка $(\mathcal{F}, \mathbf{O})$ и реална функция θ следните са еквивалентни:

- θ е равномерно $\mathbf{O}$-изчислима,
- θ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима в стила на Тент и Циглер,
- θ е равномерно $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}$-изчислима.

5.3 Характеризационна теорема за условно изчислимите реални функции

В тази секция ще докажем теорема за характеризация за класа на условно изчислимите реални функции, подобна на теорема 5.2.2 за равномерно изчислимите реални функции от предходната секция.

Преди това ще се нуждаем от някои допълнителни разглеждания от [2], свързани с условната изчислимост.

За естествено число k и наредена k-орка $(\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$ означаваме с $\mathbb{A}_{\xi_1,\dots,\xi_k}$ множеството от наредените $2k$-орки от унарни функции $(f_1, g_1, \dots, f_k, g_k)$, за които $f_1(x).g_1(x) = \dots = f_k(x).g_k(x) = 0$ за всяко $x \in \mathbb{N}$ и тройките $(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}), \dots, (f_k, g_k, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ именуват реалните числа $\xi_1, \dots, \xi_k$, съответно.

При същите предположения за всяко $n \in \mathbb{N}$ да означим с $\mathbb{A}^{[n]}_{\xi_1,\dots,\xi_k}$ множеството от всички наредени $2k$-орки от естествени числа $(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$, за които са изпълнени условията

$$|x_1 - y_1 - (n+1)\xi_1| < 1, \ \ \dots, \ \ |x_k - y_k - (n+1)\xi_k| < 1,$$

$$x_1 y_1 = \dots = x_k y_k = 0.$$

Можем да отъждествим множеството $\mathbb{A}_{\xi_1,\dots,\xi_k}$ с декартовото произведение

$$\mathbb{A}^{[0]}_{\xi_1,\dots,\xi_k} \times \mathbb{A}^{[1]}_{\xi_1,\dots,\xi_k} \times \mathbb{A}^{[2]}_{\xi_1,\dots,\xi_k} \times \dots$$

посредством биекцията $\mathbb{F}$, която съпоставя на $2k$-орката от унарни функции $(f_1, g_1, \dots, f_k, g_k) \in \mathbb{A}_{\xi_1,\dots,\xi_k}$ унарната функция $t = \mathbb{F}(f_1, g_1, \dots, f_k, g_k)$, дефинирана с $t(n) = (f_1(n), g_1(n), \dots, f_k(n), g_k(n))$, за която се съобразява лесно, че принадлежи на декартовото произведение.

За всяко $n \in \mathbb{N}$ непосредствено се вижда, че множеството $\mathbb{A}^{[n]}_{\xi_1,\dots,\xi_k}$ е крайно (всъщност то съдържа най-много 2^k елементи). Следователно то е компактно относно коя да е топология в него. Снабдяваме всяко $\mathbb{A}^{[n]}_{\xi_1,\dots,\xi_k}$ с дискретна топология, а в декартовото произведение въвеждаме топологията произведение. По теоремата на Тихонов декартовото произведение е компактно. Посредством биекцията $\mathbb{F}$ прехвърляме топологията от декартовото произведение в $\mathbb{A}_{\xi_1,\dots,\xi_k}$, т.е. U е отворено в $\mathbb{A}_{\xi_1,\dots,\xi_k}$ т.с.т.к. $\mathbb{F}[U]$ е отворено в декартовото произведение. Разбира се, тогава $\mathbb{F}$ се превръща в хомеоморфизъм и следователно $\mathbb{A}_{\xi_1,\dots,\xi_k}$ също е компактно.

Лема 5.3.1. Нека $k \in \mathbb{N}, (\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$ и E е непрекъснат оператор от тип $(2k, 1)$. Нека при всеки избор на $(f_1, g_1, \dots, f_k, g_k) \in \mathbb{A}_{\xi_1,\dots,\xi_k}$ съществува естествено число s, такова че

$$E(f_1, g_1, \dots, f_k, g_k)(s) = 0. \tag{5.3.1}$$

Тогава съществува такова $T \in \mathbb{N}$, че за всяко $(f_1, g_1, \ldots, f_k, g_k) \in \mathbb{A}_{\xi_1,\ldots,\xi_k}$ равенството (5.3.1) е изпълнено за някое $s \leq T$.

Доказателство. Върху множеството $\mathbb{A}_{\xi_1,\ldots,\xi_k}$ дефинираме функционала M с

$$M(f_1, g_1, \ldots, f_k, g_k) = \mu s[E(f_1, g_1, \ldots, f_k, g_k)(s) = 0].$$

От условието в лемата минимизацията е винаги успешна. Да фиксираме $2k$-орка от унарни функции $(f_1^0, g_1^0, \ldots, f_k^0, g_k^0) \in \mathbb{A}_{\xi_1,\ldots,\xi_k}$ и нека

$$M(f_1^0, g_1^0, \ldots, f_k^0, g_k^0) = n.$$

Ще покажем, че съществува цяла отворена околност на тази $2k$-орка, върху която M приема същата стойност n. Разбира се, от дефиницията на M са изпълнени равенствата

$$\begin{aligned}
E(f_1^0, g_1^0, \ldots, f_k^0, g_k^0)(0) &\neq 0,\\
&\ldots\\
E(f_1^0, g_1^0, \ldots, f_k^0, g_k^0)(n-1) &\neq 0,\\
E(f_1^0, g_1^0, \ldots, f_k^0, g_k^0)(n) &= 0.
\end{aligned}$$

От непрекъснатостта на E (дефиниция 4.2.8) получаваме, че съществува естествено число u, такова че за всяка $2k$-орка от унарни функции $(f_1, g_1, \ldots, f_k, g_k)$ равенствата

$$f_i(x) = f_i^0(x), \quad g_i(x) = g_i^0(x) \quad (i = 1, \ldots, k)$$

за всяко естествено число $x \leq u$ влекат равенствата

$$E(f_1, g_1, \ldots, f_k, g_k)(m) = E(f_1^0, g_1^0, \ldots, f_k^0, g_k^0)(m) \quad \text{за } m = 0, 1, \ldots, n.$$

Но от тези равенства следва $M(f_1, g_1, \ldots, f_k, g_k) = n = M(f_1^0, g_1^0, \ldots, f_k^0, g_k^0)$. С други думи, върху отворената околност $U_0 = \mathbb{F}^{-1}[V_0]$ на $(f_1^0, g_1^0, \ldots, f_k^0, g_k^0)$, където

$$\begin{aligned}
V_0 = \{(f_1^0(0), g_1^0(0), \ldots, f_k^0(0), g_k^0(0))\} \times \ldots\\
\times \{(f_1^0(u), g_1^0(u), \ldots, f_k^0(u), g_k^0(u))\}\\
\times \mathbb{A}_{\xi_1,\ldots,\xi_k}^{[u+1]} \times \mathbb{A}_{\xi_1,\ldots,\xi_k}^{[u+2]} \times \ldots,
\end{aligned}$$

функционалът M приема една и съща стойност n. От компактността множеството $\mathbb{A}_{\xi_1,\ldots,\xi_k}$ може да се покрие с краен брой отворени множества, върху всяко от които функционалът M е константа. Оттук следва, че M приема само краен брой стойности и можем да изберем T да бъде най-голямата от тях. С това лемата е доказана. $\square$

Лема 5.3.2. Нека $\mathbf{O}$ е клас от непрекъснати оператори, който съдържа проекционните оператори и е затворен относно композиция на оператори. Нека $(1,1)$-операторът I, дефиниран с $I(f) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, принадлежи на $\mathbf{O}$ и също $K \in \mathbf{O}$ (където K е дефиниран преди лема 4.3.2). Нека $k \in \mathbb{N}$ и $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^k$ е условно $\mathbf{O}$-изчислима реална функция. Тогава съществуват $(3k,1)$-оператор E и $(3k+1)$-оператори F, G, H, всичките принадлежащи на $\mathbf{O}$, такива че за всяка точка $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in D$ съществува $T \in \mathbb{N}$, така че да са изпълнени следните условия:

1. Ако $(f_1, g_1, h_1), \ldots, (f_k, g_k, h_k)$ именуват съответно $\xi_1, \ldots, \xi_k$, то равенството
$$E(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k)(s) = 0 \tag{5.3.2}$$
е изпълнено за някое естествено число $s \leq T$.

2. Винаги когато $(f_1, g_1, h_1), \ldots, (f_k, g_k, h_k)$ именуват съответно $\xi_1, \ldots, \xi_k$ и равенството (5.3.2) е вярно за някое естествено число s, тройката
$$\begin{aligned}(F(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k, \widehat{s}),\\ G(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k, \widehat{s}),\\ H(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k, \widehat{s}))\end{aligned}$$
именува реалното число $\theta(\xi_1, \ldots, \xi_k)$.

Доказателство. Нека E, F, G, H са свидетели за θ от дефиницията 4.7.12 за условна $\mathbf{O}$-изчислимост. Дефинираме $(3k,1)$-оператор E' и $(3k+1,1)$-оператори F', G', H' с равенствата

$$\begin{aligned}
&E'(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k)\\
&\quad = E(K(f_1, g_1, h_1), K(g_1, f_1, h_1), \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \ldots, K(f_k, g_k, h_k), K(g_k, f_k, h_k), \mathrm{id}_{\mathbb{N}}),\\
&F'(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k, e)\\
&\quad = F(K(f_1, g_1, h_1), K(g_1, f_1, h_1), \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \ldots, K(f_k, g_k, h_k), K(g_k, f_k, h_k), \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, e),\\
&G'(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k, e)\\
&\quad = G(K(f_1, g_1, h_1), K(g_1, f_1, h_1), \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \ldots, K(f_k, g_k, h_k), K(g_k, f_k, h_k), \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, e),\\
&H'(f_1, g_1, h_1, \ldots, f_k, g_k, h_k, e)\\
&\quad = H(K(f_1, g_1, h_1), K(g_1, f_1, h_1), \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \ldots, K(f_k, g_k, h_k), K(g_k, f_k, h_k), \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, e).
\end{aligned}$$

Ще покажем, че можем да изберем E', F', G', H' в качеството на E, F, G, H от условието на лемата. От предположенията за $\mathbf{O}$ имаме $E', F', G', H' \in \mathbf{O}$. Да фиксираме точка $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in D$.

За условие 1 да дефинираме $(2k,1)$-оператор E'' с

$$E''(f_1,g_1,\ldots,f_k,g_k)=E(f_1,g_1,\mathrm{id}_{\mathbb{N}},\ldots,f_k,g_k,\mathrm{id}_{\mathbb{N}}).$$

Ясно е, че E'' е непрекъснат оператор, тъй като E е такъв. Също така, ако $(f_1,g_1,\ldots,f_k,g_k)\in\mathbb{A}_{\xi_1,\ldots,\xi_k}$, то $(f_i,g_i,\mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е име на ξ_i за $i=1,\ldots,k$ и от точка 1 в дефиниция 4.7.12 съществува естествено число s, такова че

$$E(f_1,g_1,\mathrm{id}_{\mathbb{N}},\ldots,f_k,g_k,\mathrm{id}_{\mathbb{N}})(s)=E''(f_1,g_1,\ldots,f_k,g_k)(s)=0.$$

Налице са условията в лема 5.3.1, приложена за оператора E''. Да изберем съответното естествено число T. Същото това T удовлетворява точка 1 в настоящата лема. Действително нека (f_i,g_i,h_i) именува ξ_i за $i=1,\ldots,k$. Тогава от лема 4.3.2 получаваме, че за $i\in\{1,\ldots,k\}$

$$K(f_i,g_i,h_i)(x).K(g_i,f_i,h_i)(x)=0$$

за всяко $x\in\mathbb{N}$ и $(K(f_i,g_i,h_i),K(g_i,f_i,h_i),\mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е име на ξ_i. С други думи,

$$(K(f_1,g_1,h_1),K(g_1,f_1,h_1),\ldots,K(f_k,g_k,h_k),K(g_k,f_k,h_k))\in\mathbb{A}_{\xi_1,\ldots,\xi_k}.$$

От избора на T имаме, че равенството

$$E''(K(f_1,g_1,h_1),K(g_1,f_1,h_1),\ldots,K(f_k,g_k,h_k),K(g_k,f_k,h_k))(s)=0$$

е изпълнено за някое $s\le T$, т.е.

$$E'(f_1,g_1,h_1,\ldots,f_k,g_k,h_k)(s)=0$$

за някое $s\le T$.

За условие 2 нека (f_i,g_i,h_i) именува ξ_i за $i=1,\ldots,k$ и равенството

$$E'(f_1,g_1,h_1,\ldots,f_k,g_k,h_k)(s)=0$$

е вярно за естествено число s. Тогава

$$E(K(f_1,g_1,h_1),K(g_1,f_1,h_1),\mathrm{id}_{\mathbb{N}},\ldots,K(f_k,g_k,h_k),K(g_k,f_k,h_k),\mathrm{id}_{\mathbb{N}})(s)=0.$$

От точка 2 в дефиниция 4.7.12 и от факта, че $(K(f_i,g_i,h_i),K(g_i,f_i,h_i),\mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ именува ξ_i за $i=1,\ldots,k$, тройката

$$(F(K(f_1,g_1,h_1),K(g_1,f_1,h_1),\mathrm{id}_{\mathbb{N}},\ldots,K(f_k,g_k,h_k),K(g_k,f_k,h_k),\mathrm{id}_{\mathbb{N}},\widehat{s}),$$

$$G(K(f_1,g_1,h_1),K(g_1,f_1,h_1),\mathrm{id}_{\mathbb{N}},\ldots,K(f_k,g_k,h_k),K(g_k,f_k,h_k),\mathrm{id}_{\mathbb{N}},\widehat{s}),$$

$$H(K(f_1,g_1,h_1),K(g_1,f_1,h_1),\mathrm{id}_{\mathbb{N}},\ldots,K(f_k,g_k,h_k),K(g_k,f_k,h_k),\mathrm{id}_{\mathbb{N}},\widehat{s}))$$

именува $\theta(\xi_1,\dots,\xi_k)$, но тази тройка съвпада с

$$\begin{aligned}(&F'(f_1,g_1,h_1,\dots,f_k,g_k,h_k,\widehat{s}),\\ &G'(f_1,g_1,h_1,\dots,f_k,g_k,h_k,\widehat{s}),\\ &H'(f_1,g_1,h_1,\dots,f_k,g_k,h_k,\widehat{s})).\end{aligned}$$ □

Следва самата теорема за характеризация на условната $\mathbf{O}$-изчислимост, дефинирана в 4.7.12. За да я формулираме и докажем, ще ни трябва подходящо понятие за условна изчислимост в духа на Тент и Циглер.

Дефиниция 5.3.3. За клас от функции $\mathcal{F}$ и $k \in \mathbb{N}$ реалната функция $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^k$ е *условно $\mathcal{F}$-изчислима в стила на Тент и Циглер*, ако съществуват функции $d_0 \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{F}, d \in \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{F}, e \in \mathcal{T}_{3k+1} \cap \mathcal{F}$ и $f,g,h \in \mathcal{T}_{6k+2} \cap \mathcal{F}$, такива че за всички $(\xi_1,\dots,\xi_k) \in D$ е вярно следното:

1. Съществува $s_0 \in \mathbb{N}$, такова че за всички естествени числа $s \geq s_0$ и всички $p_1^0,q_1^0,r_1^0,\dots,p_k^0,q_k^0,r_k^0 \in \mathbb{N}$, неравенствата
$$\left|\frac{p_i^0-q_i^0}{r_i^0+1}-\xi_i\right| < \frac{1}{d_0(s)+1} \quad \text{за } i=1,\dots,k \tag{5.3.3}$$
влекат равенството
$$e(p_1^0,q_1^0,r_1^0,\dots,p_k^0,q_k^0,r_k^0,s)=0. \tag{5.3.4}$$

2. За всички естествени числа $s,p_1^0,q_1^0,r_1^0,\dots,p_k^0,q_k^0,r_k^0,p_1,q_1,r_1,\dots,p_k,q_k,r_k,t$, които удовлетворяват (5.3.3), (5.3.4) и
$$|\xi_i| \leq s+1, \quad \left|\frac{p_i-q_i}{r_i+1}-\xi_i\right| < \frac{1}{d(s,t)+1} \quad \text{за } i=1,\dots,k, \tag{5.3.5}$$
имаме
$$\left|\frac{p-q}{r+1}-\theta(\xi_1,\dots,\xi_k)\right| < \frac{1}{t+1}, \tag{5.3.6}$$
където
$$p = f(p_1^0,q_1^0,r_1^0,\dots,p_k^0,q_k^0,r_k^0,p_1,q_1,r_1,\dots,p_k,q_k,r_k,s,t), \tag{5.3.7}$$
$$q = g(p_1^0,q_1^0,r_1^0,\dots,p_k^0,q_k^0,r_k^0,p_1,q_1,r_1,\dots,p_k,q_k,r_k,s,t), \tag{5.3.8}$$
$$r = h(p_1^0,q_1^0,r_1^0,\dots,p_k^0,q_k^0,r_k^0,p_1,q_1,r_1,\dots,p_k,q_k,r_k,s,t). \tag{5.3.9}$$

Интуицията зад тази дефиниция не е съвсем ясна на пръв поглед, тъй като главната цел при нейното съставяне е да е подходяща за доказателство на характеризационната теорема. Важното е, че в нея не се използват оператори и системи от имена за реалните числа.

Теорема 5.3.4. Нека $(\mathcal{F}, \mathbf{O})$ е приемлива двойка и $k \in \mathbb{N}$. Реалната функция $\theta : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^k$ е условно $\mathbf{O}$-изчислима тогава и само тогава, когато θ е условно $\mathcal{F}$-изчислима в стила на Тент и Циглер.

Доказателство. Преди всичко, $\mathcal{F}$ удовлетворява условия 1 и 2 от дефиниция 5.1.1, така че $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ е затворен относно ограничен минимум и ограничен максимум, както отбелязохме след дефиниция 5.1.1. Доказателството ще извършим при $k = 1$. Обобщението за произволно k е непосредствено.

За посоката $(\Longleftarrow)$ да предположим, че $d_0, d, e, f, g, h \in \mathcal{F}$ са функции, които изпълняват изискванията от дефиниция 5.3.3. Ще покажем, че θ е условно $\mathbf{O}$-изчислима. Дефинираме оператор E с

$$E(f_1, g_1, h_1)(s') = e(f_1(d_0(s)), g_1(d_0(s)), h_1(d_0(s)), s),$$

където $s = \max(f_1(0), g_1(0), s')$. Също дефинираме оператори F, G, H с

$$F(f_1, g_1, h_1, a)(t) = p, \quad G(f_1, g_1, h_1, a)(t) = q, \quad H(f_1, g_1, h_1, a)(t) = r,$$

където числата p, q, r се дефинират с равенствата (5.3.7), (5.3.8), (5.3.9) при

$$p_1^0 = f_1(d_0(s)), \quad q_1^0 = g_1(d_0(s)), \quad r_1^0 = h_1(d_0(s)), \tag{5.3.10}$$
$$p_1 = f_1(d(s,t)), \quad q_1 = g_1(d(s,t)), \quad r_1 = h_1(d(s,t)) \tag{5.3.11}$$

и $s = \max(f_1(0), g_1(0), a(t))$. От условия 4, 5 и 6 в дефиниция 5.1.1 получаваме $E, F, G, H \in \mathbf{O}$. Ще проверим, че тези оператори са свидетели за условната $\mathbf{O}$-изчислимост на θ. Нека $\xi_1 \in D$ и (f_1, g_1, h_1) е име на ξ_1. Да изберем s_0 от точка 1 в дефиниция 5.3.3. Нека $s = \max(f_1(0), g_1(0), s_0)$. Имаме $s \geq s_0$ и (5.3.3) е изпълнено за числата p_1^0, q_1^0, r_1^0, дефинирани с равенствата (5.3.10). Тогава от (5.3.4)

$$e(p_1^0, q_1^0, r_1^0, s) = 0 = E(f_1, g_1, h_1)(s_0).$$

Така съществува s', за което $E(f_1, g_1, h_1)(s') = 0$.

Нека $s' \in \mathbb{N}$ и имаме $E(f_1, g_1, h_1)(s') = 0$, т.е.

$$e(f_1(d_0(s)), g_1(d_0(s)), h_1(d_0(s)), s) = 0,$$

където $s = \max(f_1(0), g_1(0), s')$. Използваме точка 2 в дефиниция 5.3.3 при произволно t, избраното s и числата $p_1^0, q_1^0, r_1^0, p_1, q_1, r_1$, дефинирани с равенствата (5.3.10) и (5.3.11). Предпоставките (5.3.3), (5.3.4), (5.3.5) са изпълнени, тъй като от бележка 3.1.4

$$|\xi_1| < |f_1(0) - g_1(0)| + 1 \leq \max(f_1(0), g_1(0)) + 1 \leq s + 1.$$

Получаваме, че е изпълнено неравенството (5.3.6) за числата p, q, r, дефинирани с равенствата (5.3.7), (5.3.8), (5.3.9). Но при $a = \lambda x.s' = \widehat{s'}$ имаме

$$p = F(f_1, g_1, h_1, \widehat{s'})(t), \quad q = G(f_1, g_1, h_1, \widehat{s'})(t), \quad r = H(f_1, g_1, h_1, \widehat{s'})(t).$$

По този начин

$$\left| \frac{F(f_1, g_1, h_1, \widehat{s'})(t) - G(f_1, g_1, h_1, \widehat{s'})(t)}{H(f_1, g_1, h_1, \widehat{s'})(t) + 1} - \theta(\xi_1) \right| < \frac{1}{t+1}$$

за всяко $t \in \mathbb{N}$, т.е.

$$(F(f_1, g_1, h_1, \widehat{s'}), G(f_1, g_1, h_1, \widehat{s'}), H(f_1, g_1, h_1, \widehat{s'}))$$

е име на $\theta(\xi_1)$. Така θ е условно $\mathbf{O}$-изчислима.

За обратната посока ($\Longrightarrow$) да предположим, че θ е условно $\mathbf{O}$-изчислима. Класът $\mathbf{O}$ изпълнява предпоставките в условието на лема 5.3.2. Действително, всички оператори, за които се предполага, че трябва да принадлежат на $\mathbf{O}$, са обикновени и $\mathcal{M}^2$-субституционни и значи това е вярно, тъй като $\mathbf{O}_{\mathcal{M}^2} \subseteq \mathbf{O}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathbf{O}$. Останалите условия за $\mathbf{O}$ следват директно от дефиницията 5.1.1 за приемлива двойка. Да изберем оператори $E, F, G, H \in \mathbf{O}$, съответни на реалната функция θ, съгласно лема 5.3.2. След това да изберем $(1,1)$-оператори $\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \in \mathbf{O}$, които определят равномерна граница съответно за E, F, G, H. Те съществуват от условие 9 в дефиниция 5.1.1. Дефинираме последователно следните функции:

$$u(x, s) = (s+2)(x+1),$$

$$v(s, y) = \Omega(\lambda x.u(x, s))(y),$$

$$v'(s) = \max_{y \le s} v(s, y),$$

$$d_0(s) = 6v'(s) + 5,$$

$$w(s, t) = \max\bigl(\Omega_1(\lambda x.u(x, s))(t), \Omega_2(\lambda x.u(x, s))(t), \Omega_3(\lambda x.u(x, s))(t)\bigr),$$

$$w'(s, t) = \max(v'(s), w(s, t)),$$

$$d(s, t) = 6w'(s, t) + 5,$$

$$b(p_1^0, q_1^0, r_1^0, s) = \mu_{x \le s}[E(f_1^0, g_1^0, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(x) = 0],$$

$$e(p_1^0, q_1^0, r_1^0, s) = \min_{x \le s} E(f_1^0, g_1^0, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(x),$$

$$f(p_1^0, q_1^0, r_1^0, p_1, q_1, r_1, s, t) = F(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.b(p_1^0, q_1^0, r_1^0, s))(t),$$

$$g(p_1^0, q_1^0, r_1^0, p_1, q_1, r_1, s, t) = G(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.b(p_1^0, q_1^0, r_1^0, s))(t),$$

$$h(p_1^0, q_1^0, r_1^0, p_1, q_1, r_1, s, t) = H(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.b(p_1^0, q_1^0, r_1^0, s))(t),$$

където

$$f_1^0 = \lambda x.ehelp(p_1^0, q_1^0, r_1^0, x), \quad g_1^0 = \lambda x.ehelp(q_1^0, p_1^0, r_1^0, x), \tag{5.3.12}$$

и също така

$$f_1 = \lambda x.\begin{cases} ehelp(p_1^0, q_1^0, r_1^0, x), & \text{ако } x \leq v'(s), \\ ehelp(p_1, q_1, r_1, x), & \text{ако } x > v'(s), \end{cases} \tag{5.3.13}$$

$$g_1 = \lambda x.\begin{cases} ehelp(q_1^0, p_1^0, r_1^0, x), & \text{ако } x \leq v'(s), \\ ehelp(q_1, p_1, r_1, x), & \text{ако } x > v'(s). \end{cases} \tag{5.3.14}$$

Тук $ehelp$ е функцията, дефинирана преди бележка 4.3.1, $ehelp \in \mathcal{F}$. Не е трудно да се съобрази, че всички дефинирани функции принадлежат на класа $\mathcal{F}$ (поради условия 1, 2 и 8 в дефиниция 5.1.1). Нашата цел е да покажем, че d_0, d, e, f, g, h изпълняват двете условия в дефиниция 5.3.3. Нека $\xi_1 \in D$.

Да изберем естествено число T според лема 5.3.2. Нека $s_0 \in \mathbb{N}$ е такова, че $s_0 \geq T$ и $|\xi_1| \leq s_0 + 1$. Твърдим, че условие 1 в дефиниция 5.3.3 е изпълнено за това s_0. Наистина, нека $s \geq s_0$ и $p_1^0, q_1^0, r_1^0 \in \mathbb{N}$ са такива, че е изпълнено (5.3.3). Дефинираме унарните функции f_1^0 и g_1^0 с помощта на равенствата от (5.3.12). От бележка 4.3.1 за всяко $x \in \mathbb{N}$ е в сила

$$\left| \frac{f_1^0(x) - g_1^0(x)}{x+1} - \frac{p_1^0 - q_1^0}{r_1^0 + 1} \right| \leq \frac{1}{2(x+1)}, \quad f_1^0(x).g_1^0(x) = 0. \tag{5.3.15}$$

Нека изберем унарни функции $\overline{f_1^0}$ и $\overline{g_1^0}$, такива че за всяко $x \in \mathbb{N}$

$$x \leq v'(s) \Longrightarrow \overline{f_1^0}(x) = f_1^0(x) \;\&\; \overline{g_1^0}(x) = g_1^0(x),$$

$$x > v'(s) \Longrightarrow \left| \frac{\overline{f_1^0}(x) - \overline{g_1^0}(x)}{x+1} - \xi_1 \right| < \frac{1}{x+1} \;\&\; \overline{f_1^0}(x).\overline{g_1^0}(x) = 0. \tag{5.3.16}$$

Консеквентът в (5.3.16) е изпълнен и при $x \leq v'(s)$, тъй като

$$\left| \frac{\overline{f_1^0}(x) - \overline{g_1^0}(x)}{x+1} - \xi_1 \right| = \left| \frac{f_1^0(x) - g_1^0(x)}{x+1} - \frac{p_1^0 - q_1^0}{r_1^0 + 1} + \frac{p_1^0 - q_1^0}{r_1^0 + 1} - \xi_1 \right|$$

$$< \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{d_0(s)+1} \leq \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(v'(s)+1)} \leq \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{x+1},$$

$$\overline{f_1^0}(x).\overline{g_1^0}(x) = f_1^0(x).g_1^0(x) = 0.$$

Използвахме, че $d_0(s) \geq 2v'(s)+1$. По този начин $(\overline{f_1^0}, \overline{g_1^0}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е име на ξ_1. Съгласно избора на T съществува s_1, такова че $s_1 \leq T$ и $E(\overline{f_1^0}, \overline{g_1^0}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(s_1) = 0$. Очевидно $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ се мажорира от $\lambda x.u(x,s)$. От (5.3.16) следва, че всяко от числата $\overline{f_1^0}(x), \overline{g_1^0}(x)$ е по-малко от произведението $(|\xi_1|+1)(x+1)$. Но от избора на s_0 имаме $|\xi_1| \leq s_0+1 \leq s+1$ и така функциите $\overline{f_1^0}, \overline{g_1^0}$ се мажорират от $\lambda x.u(x,s)$. Същото е вярно за функциите f_1^0, g_1^0, тъй като от (5.3.15) и (5.3.3) имаме

$$\left|\frac{f_1^0(x) - g_1^0(x)}{x+1}\right| \leq \left|\frac{p_1^0 - q_1^0}{r_1^0+1}\right| + \frac{1}{2} < |\xi_1| + 1.$$

За $x \leq v(s, s_1)$ са верни равенствата $f_1^0(x) = \overline{f_1^0}(x),\ g_1^0(x) = \overline{g_1^0}(x)$, тъй като $s_1 \leq T \leq s_0 \leq s$ и значи $v(s,s_1) \leq v'(s)$. От дефиниция 4.2.12 и от факта, че Ω определя равномерна граница за E

$$E(f_1^0, g_1^0, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(s_1) = E(\overline{f_1^0}, \overline{g_1^0}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(s_1) = 0.$$

И така, $e(p_1^0, q_1^0, r_1^0, s) = \min_{x \leq s} E(f_1^0, g_1^0, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(x) = 0$, тъй като $s_1 \leq s$.

Сега ще покажем, че е изпълнено условие 2 в дефиниция 5.3.3. Нека $s, p_1^0, q_1^0, r_1^0, p_1, q_1, r_1, t$ са естествени числа, които удовлетворяват предпоставките (5.3.3), (5.3.4), (5.3.5) в условие 2. С други думи имаме неравенствата

$$\left|\frac{p_1^0 - q_1^0}{r_1^0+1} - \xi_1\right| < \frac{1}{d_0(s)+1}, \quad |\xi_1| \leq s+1, \quad \left|\frac{p_1 - q_1}{r_1+1} - \xi_1\right| < \frac{1}{d(s,t)+1}$$

и равенството $e(p_1^0, q_1^0, r_1^0, s) = 0$. Нека p, q, r са дефинирани чрез равенствата (5.3.7), (5.3.8), (5.3.9). Целта е да докажем неравенството (5.3.6). Дефинираме функциите f_1^0 и g_1^0 с помощта на равенствата от (5.3.12). За всяко $x \in \mathbb{N}$ е изпълнено (5.3.15) от по-горе. Също така дефинираме функциите f_1, g_1 с помощта на равенствата от (5.3.13), (5.3.14), съответно. Изрично да отбележим, че при $x \leq v'(s)$ имаме

$$f_1^0(x) = f_1(x), \quad g_1^0(x) = g_1(x).$$

За всяко $x \in \mathbb{N}$ е в сила

$$f_1(x).g_1(x) = 0,$$

$$x \leq v'(s) \Longrightarrow \left|\frac{f_1(x) - g_1(x)}{x+1} - \frac{p_1 - q_1}{r_1+1}\right| \leq \frac{5}{6(x+1)}, \tag{5.3.17}$$

$$x > v'(s) \Longrightarrow \left|\frac{f_1(x) - g_1(x)}{x+1} - \frac{p_1 - q_1}{r_1 + 1}\right| \leq \frac{1}{2(x+1)}. \tag{5.3.18}$$

Само (5.3.17) се нуждае от доказателство, (5.3.18) следва от бележка 4.3.1. Нека $x \leq v'(s)$. Тогава

$$\left|\frac{f_1(x) - g_1(x)}{x+1} - \frac{p_1 - q_1}{r_1 + 1}\right|$$

$$= \left|\frac{f_1^0(x) - g_1^0(x)}{x+1} - \frac{p_1^0 - q_1^0}{r_1^0 + 1} + \frac{p_1^0 - q_1^0}{r_1^0 + 1} - \xi_1 + \xi_1 - \frac{p_1 - q_1}{r_1 + 1}\right|$$

$$< \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{d_0(s)+1} + \frac{1}{d(s,t)+1} \leq \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{6(v'(s)+1)} + \frac{1}{6(v'(s)+1)}$$

$$\leq \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{6(x+1)} = \frac{5}{6(x+1)}.$$

Тук използвахме, че $d_0(s) = 6v'(s) + 5$ и $d(s,t) \geq 6v'(s) + 5$.

От $e(p_1^0, q_1^0, r_1^0, s) = 0$ имаме, че $E(f_1^0, g_1^0, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(s_1) = 0$ за някое $s_1 \leq s$. Да изберем най-малкото такова s_1. Избираме функции $\overline{f_1^0}$ и $\overline{g_1^0}$ точно както по-горе и по същия начин $(\overline{f_1^0}, \overline{g_1^0}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е име на ξ_1 и

$$E(\overline{f_1^0}, \overline{g_1^0}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(s_1) = E(f_1^0, g_1^0, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(s_1) = 0.$$

Единствената разлика е, че този път неравенството $|\xi_1| \leq s + 1$ го имаме в предпоставките. По-нататък избираме функции $\overline{f_1}$ и $\overline{g_1}$, такива че

$$x \leq w'(s,t) \Longrightarrow \overline{f_1}(x) = f_1(x) \ \& \ \overline{g_1}(x) = g_1(x),$$

$$x > w'(s,t) \Longrightarrow \left|\frac{\overline{f_1}(x) - \overline{g_1}(x)}{x+1} - \xi_1\right| < \frac{1}{x+1} \ \& \ \overline{f_1}(x).\overline{g_1}(x) = 0.$$

Тогава при $x \leq w'(s,t)$ имаме

$$\overline{f_1}(x).\overline{g_1}(x) = f_1(x).g_1(x) = 0,$$

$$x \leq v'(s) \Longrightarrow \left|\frac{\overline{f_1}(x) - \overline{g_1}(x)}{x+1} - \xi_1\right| = \left|\frac{f_1(x) - g_1(x)}{x+1} - \frac{p_1 - q_1}{r_1 + 1} + \frac{p_1 - q_1}{r_1 + 1} - \xi_1\right|$$

$$< \frac{5}{6(x+1)} + \frac{1}{d(s,t)+1} \leq \frac{5}{6(x+1)} + \frac{1}{6(v'(s)+1)} \leq \frac{5}{6(x+1)} + \frac{1}{6(x+1)} = \frac{1}{x+1},$$

$$x > v'(s) \Longrightarrow \left|\frac{\overline{f_1}(x) - \overline{g_1}(x)}{x+1} - \xi_1\right| = \left|\frac{f_1(x) - g_1(x)}{x+1} - \frac{p_1 - q_1}{r_1 + 1} + \frac{p_1 - q_1}{r_1 + 1} - \xi_1\right|$$

$$< \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{d(s,t)+1} \leq \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

За първата импликация използвахме (5.3.17) и $d(s,t) \geq 6v'(s) + 5$, а за втората – (5.3.18) и $d(s,t) \geq 2w'(s,t)+1 \geq 2x+1$. Получихме, че $(\overline{f_1}, \overline{g_1}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ е име на ξ_1. Имаме, че $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \overline{f_1^0}, \overline{g_1^0}, \overline{f_1}, \overline{g_1}$ се мажорират от $\lambda x.u(x,s)$ и също така

$$\overline{f_1^0}(x) = f_1^0(x) = f_1(x) = \overline{f_1}(x), \quad \overline{g_1^0}(x) = g_1^0(x) = g_1(x) = \overline{g_1}(x)$$

за $x \leq v(s,s_1)$, тъй като $v(s,s_1) \leq v'(s) \leq w'(s,t)$. От дефиниция 4.2.12 и от факта, че Ω определя равномерна граница за E

$$E(\overline{f_1}, \overline{g_1}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(s_1) = E(\overline{f_1^0}, \overline{g_1^0}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(s_1) = 0.$$

От избора на операторите E, F, G, H следва неравенството

$$\left| \frac{F(\overline{f_1}, \overline{g_1}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.s_1)(t) - G(\overline{f_1}, \overline{g_1}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.s_1)(t)}{H(\overline{f_1}, \overline{g_1}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.s_1)(t) + 1} - \theta(\xi_1) \right| < \frac{1}{t+1}.$$

Но $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.s_1, \overline{f_1}, \overline{g_1}$ се мажорират от $\lambda x.u(x,s)$, защото $s_1 \leq s$. Същото е вярно и за f_1, g_1, тъй като

$$\left| \frac{f_1(x) - g_1(x)}{x+1} \right| \leq \left| \frac{p_1 - q_1}{r_1 + 1} \right| + \frac{5}{6} < |\xi_1| + 1 \leq s + 2.$$

Също така $\overline{f_1}(x) = f_1(x)$, $\overline{g_1}(x) = g_1(x)$ за $x \leq w(s,t)$, тъй като $w(s,t) \leq w'(s,t)$. От дефиниция 4.2.12 и от факта, че $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ определят равномерна граница за F, G, H, съответно,

$$F(\overline{f_1}, \overline{g_1}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.s_1)(t) = F(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.s_1)(t),$$

$$G(\overline{f_1}, \overline{g_1}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.s_1)(t) = G(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.s_1)(t),$$

$$H(\overline{f_1}, \overline{g_1}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.s_1)(t) = H(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.s_1)(t).$$

Освен това, $s_1 = \mu_{x \leq s}[E(f_1^0, g_1^0, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(x) = 0] = b(p_1^0, q_1^0, r_1^0, s)$, така че

$$F(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.s_1)(t) = F(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.b(p_1^0, q_1^0, r_1^0, s))(t) = p,$$

$$G(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.s_1)(t) = G(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.b(p_1^0, q_1^0, r_1^0, s))(t) = q,$$

$$H(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.s_1)(t) = H(f_1, g_1, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \lambda x.b(p_1^0, q_1^0, r_1^0, s))(t) = r.$$

С това показахме неравенството (5.3.6) и доказателството е завършено. □

Следствие 5.3.5. Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции, който удовлетворява условия 1 и 2 в дефиниция 5.1.1. Тогава една реална функция е условно $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}$-изчислима тогава и само тогава, когато тя е условно $\mathcal{F}$-изчислима в стила на Тент и Циглер.

Разбира се, от твърдение 4.7.13 условната $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}$-изчислимост е еквивалентна с условната $\mathcal{F}$-изчислимост от секция 4.6.

Следствие 5.3.6. За приемлива двойка $(\mathcal{F}, \mathbf{O})$ и реална функция θ следните са еквивалентни:

- θ е условно $\mathbf{O}$-изчислима,
- θ е условно $\mathcal{F}$-изчислима в стила на Тент и Циглер,
- θ е условно $\mathbf{O}_{\mathcal{F}}$-изчислима.

5.4 Пример с класа на рудиментарните оператори

В тази последна секция ще дефинираме класа на рудиментарните оператори, ще докажем някои негови свойства и ще приложим към него резултатите от предходните секции. Класът на рудиментарните оператори е тясно свързан с класа от функции $\mathcal{M}^2$ от секция 2.6, тъй като и в двата класа съществената операция е ограничена минимизация.

Дефиниция 5.4.1. Класът $\mathbf{RO}$ на *рудиментарните оператори* е най-малкият клас от оператори, такъв че:

1. За всички естествени числа m, n и всяка n-местна изходна функция a операторът F от тип (m, n), дефиниран с $F(\vec{f})(\vec{x}) = a(\vec{x})$, принадлежи на $\mathbf{RO}$. За всяко естествено число m операторите F и G от тип $(m, 2)$, дефинирани с $F(\vec{f})(x, y) = x \dot{-} y, G(\vec{f})(x, y) = xy$, принадлежат на $\mathbf{RO}$.

2. Проекционните оператори са в $\mathbf{RO}$, т.е. за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ $(n, 1)$-операторът F, дефиниран с
$$F(f_1, \ldots, f_n)(x) = f_i(x),$$
принадлежи на $\mathbf{RO}$.

3. Ако m, n, k са естествени числа, F_0 е (m, k)-оператор и $F_1, \ldots, F_k$ са (m, n)-оператори, всичките принадлежащи на $\mathbf{RO}$, то (m, n)-операторът F, дефиниран с

$$F(\vec{f})(\vec{x}) = F_0(\vec{f})(F_1(\vec{f})(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{f})(\vec{x})),$$

също принадлежи на $\mathbf{RO}$.

4. Ако m, n са естествени числа и F_0 е $(m, n+1)$-оператор, който принадлежи на $\mathbf{RO}$, то същото е вярно за оператора F, дефиниран с

$$F(\vec{f})(y, \vec{x}) = \mu_{z \leq y}[F_0(\vec{f})(z, \vec{x}) = 0].$$

Целта в следващите няколко твърдения е да покажем, че класът на $\mathcal{M}^2$-субституционните оператори (дефиниция 4.2.1 при $\mathcal{F} = \mathcal{M}^2$) е собствен подклас на класа $\mathbf{RO}$ на рудиментарните оператори.

Твърдение 5.4.2. Нека m, n са естествени числа и a е n-местна функция от $\mathcal{M}^2$. Тогава (m, n)-операторът F, дефиниран с $F(\vec{f})(\vec{x}) = a(\vec{x})$, е рудиментарен.

Доказателство. Индукция по a. Ако a е изходна функция, функцията произведение или отсечената разлика, то използваме клауза 1 на дефиниция 5.4.1. Ако a се получава със суперпозиция, то използваме клауза 3 на дефиниция 5.4.1. Ако a се получава с ограничена минимизация, то използваме клауза 4 на дефиниция 5.4.1. $\square$

Твърдение 5.4.3. Всеки $\mathcal{M}^2$-субституционен оператор е рудиментарен.

Доказателство. При фиксирани естествени числа m, n с индукция по $\mathcal{M}^2$-суб-ституционния оператор F от тип (m, n) показваме, че $F \in \mathbf{RO}$. Ако F е дефиниран с $F(\vec{f}) = h$, където h е n-местна проекция, то F е рудиментарен от клауза 1 на дефиниция 5.4.1 (проекциите са изходни). Нека F е дефиниран с $F(\vec{f})(\vec{x}) = f_i(F_0(\vec{f})(\vec{x}))$ и от индуктивната хипотеза F_0 е рудиментарен. Тогава $F \in \mathbf{RO}$ от клаузи 2 и 3 на дефиниция 5.4.1. Накрая нека F е дефиниран с $F(\vec{f})(\vec{x}) = a(F_1(\vec{f})(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{f})(\vec{x}))$, където $a \in \mathcal{T}_k \cap \mathcal{M}^2$, и от индуктивната хипотеза $F_1, \ldots, F_k$ са рудиментарни. От твърдение 5.4.2 константният (m, k)-оператор F_0, дефиниран с $F_0(\vec{f})(\vec{y}) = a(\vec{y})$, е рудиментарен. Тогава F е рудиментарен от клауза 3 на дефиниция 5.4.1. $\square$

От клаузи 2 и 4 на дефиниция 5.4.1 се получава, че $(1, 1)$-операторът F, дефиниран с

$$F(f)(x) = \mu_{y \leq x}[f(y) = 0]$$

за $f \in \mathcal{T}_1, x \in \mathbb{N}$, е рудиментарен. Но от пример 4.2.11 този оператор не е $\mathcal{M}^2$-субституционен, тъй като той не удовлетворява свойството за силна непрекъснатост.

Следващото твърдение на практика повтаря отново факта, че ограниченият максимум се изразява с помощта на ограничена минимизация. Но то е формулирано в термините на класа от оператори $\mathbf{RO}$ и за него ще дадем директно доказателство.

Твърдение 5.4.4. За естествени числа m, n, ако F_0 е рудиментарен $(m, n+1)$-оператор, то същото е вярно за оператора F, дефиниран с

$$F(\vec{f})(y, \vec{x}) = \max_{z \leq y} F_0(\vec{f})(z, \vec{x})$$

за $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^m, y \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{N}^n$.

Доказателство. Едно естествено число l е горна граница на множеството $\{F_0(\vec{f})(z, \vec{x}) | z \leq y\}$ тогава и само тогава, когато

$$\begin{aligned}
& \text{за всяко } z \leq y \;\; F_0(\vec{f})(z, \vec{x}) \leq l \\
\iff & \text{за всяко } z \leq y \;\; F_0(\vec{f})(z, \vec{x}) \dot{-} l = 0 \\
\iff & \text{за всяко } z \leq y \;\; \overline{\text{sg}}(F_0(\vec{f})(z, \vec{x}) \dot{-} l) \neq 0 \\
\iff & \mu_{z \leq y}[\overline{\text{sg}}(F_0(\vec{f})(z, \vec{x}) \dot{-} l) = 0] = y + 1 \\
\iff & |\mu_{z \leq y}[\overline{\text{sg}}(F_0(\vec{f})(z, \vec{x}) \dot{-} l) = 0] - (y+1)| = 0.
\end{aligned}$$

Максимумът на множеството $\{F_0(\vec{f})(z, \vec{x}) | z \leq y\}$ е горна граница, която съвпада с някой от неговите елементи. Затова дефинираме $(m, n+1)$-оператор G с равенството

$$G(\vec{f})(y, \vec{x}) = \mu_{t \leq y}[|\mu_{z \leq y}[\overline{\text{sg}}(F_0(\vec{f})(z, \vec{x}) \dot{-} F_0(\vec{f})(t, \vec{x})) = 0] - (y+1)| = 0].$$

По-детайлно, $G(\vec{f})(y, \vec{x})$ е най-малкото $t \leq y$, такова че $F_0(\vec{f})(t, \vec{x})$ е горна граница на $\{F_0(\vec{f})(z, \vec{x}) | z \leq y\}$, т.е. най-малкото $t \leq y$, такова че $F_0(\vec{f})(t, \overline{x})$ е търсеният максимум. Нашата цел е да покажем, че G е рудиментарен оператор. Тогава $F(\vec{f})(y, \vec{x}) = F_0(\vec{f})(G(\vec{f})(y, \vec{x}), \vec{x})$ и от клаузи 1 и 3 на дефиниция 5.4.1 получаваме, че F е рудиментарен.

За да покажем, че $G \in \mathbf{RO}$, дефинираме последователно бинарната функция a с

$$a(l, k) = \overline{\text{sg}}(k \dot{-} l)$$

и $(m, n+2)$-операторите G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 с

$$\begin{aligned}
G_1(\vec{f})(z, \vec{x}, l) &= a(l, F_0(\vec{f})(z, \vec{x})),\\
G_2(\vec{f})(s, \vec{x}, l) &= \mu_{z \leq s}[G_1(\vec{f})(z, \vec{x}, l) = 0],\\
G_3(\vec{f})(t, \vec{x}, s) &= G_2(\vec{f})(s, \vec{x}, F_0(\vec{f})(t, \vec{x})),\\
G_4(\vec{f})(t, \vec{x}, s) &= |G_3(\vec{f})(t, \vec{x}, s) - (s+1)|,\\
G_5(\vec{f})(y, \vec{x}, s) &= \mu_{t \leq y}[G_4(\vec{f})(t, \vec{x}, s) = 0].
\end{aligned}$$

Очевидно е, че $a \in \mathcal{M}^2$. С приложения на твърдение 5.4.2 и клаузи 3 и 4 на дефиниция 5.4.1 последователно получаваме $G_1 \in \mathbf{RO}$, $G_2 \in \mathbf{RO}$, $G_3 \in \mathbf{RO}$, $G_4 \in \mathbf{RO}$, $G_5 \in \mathbf{RO}$. Но за оператора G имаме

$$G(\vec{f})(y, \vec{x}) = G_5(\vec{f})(y, \vec{x}, y)$$

и така окончателно $G \in \mathbf{RO}$ от клаузи 1 и 3 на дефиниция 5.4.1. □

В следващото твърдение доказваме общо свойство за затвореност относно композиция на класа $\mathbf{RO}$.

Твърдение 5.4.5. За естествени числа l, m, n, p нека F е рудиментарен оператор от тип (l, n) и $G_1, \ldots, G_l$ са рудиментарни оператори от тип $(m, p+1)$. Тогава $(m, n+p)$-операторът H, дефиниран с равенството

$$H(\vec{f})(\vec{x}, \vec{y}) = F(\lambda t.G_1(\vec{f})(t, \vec{y}), \ldots, \lambda t.G_l(\vec{f})(t, \vec{y}))(\vec{x})$$

за $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^m, \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \vec{y} \in \mathbb{N}^p$, също е рудиментарен.

Доказателство. Индукция по F. Ако F е рудиментарен съгласно клауза 1 на дефиниция 5.4.1, то $H(\vec{f})(\vec{x}, \vec{y}) = a(\vec{x}, \vec{y})$ за някоя функция $a \in \mathcal{M}^2$, така че H е рудиментарен от твърдение 5.4.2. Нека F е рудиментарен от клауза 2 на дефиниция 5.4.1, т.е. $n = 1$ и $F(\vec{g}) = g_i$ за някое $i \in \{1, \ldots, l\}$. Тогава

$$H(\vec{f})(x, \vec{y}) = \lambda t.G_i(\vec{f})(t, \vec{y})(x) = G_i(\vec{f})(x, \vec{y})$$

за $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^m, x \in \mathbb{N}, \vec{y} \in \mathbb{N}^p$ и следователно H съвпада с G_i, така че H е рудиментарен. По-нататък, нека F е рудиментарен от клауза 3 на дефиниция 5.4.1, т.е. за $\vec{g} \in \mathcal{T}_1^l$ и $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ имаме

$$F(\vec{g})(\vec{x}) = F_0(\vec{g})(F_1(\vec{g})(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{g})(\vec{x}))$$

за рудиментарен (l, k)-оператор F_0 и рудиментарни оператори $F_1, \ldots, F_k$ от тип (l, n), които изпълняват индуктивната хипотеза. Това означава, че $(m, k+p)$-операторът H_0, дефиниран с

$$H_0(\vec{f})(\vec{z}, \vec{y}) = F_0(\lambda t.G_1(\vec{f})(t, \vec{y}), \ldots, \lambda t.G_l(\vec{f})(t, \vec{y}))(\vec{z})$$

за $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^m, \vec{z} \in \mathbb{N}^k, \vec{y} \in \mathbb{N}^p$, е рудиментарен и операторите $H_1, \ldots, H_k$ от тип $(m, n+p)$, дефинирани с

$$H_i(\vec{f})(\vec{x}, \vec{y}) = F_i(\lambda t.G_1(\vec{f})(t, \vec{y}), \ldots, \lambda t.G_l(\vec{f})(t, \vec{y}))(\vec{x}) \quad (i = 1, \ldots, k)$$

за $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^m, \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \vec{y} \in \mathbb{N}^p$, са рудиментарни. Но за $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^m, \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \vec{y} \in \mathbb{N}^p$ имаме

$$\begin{aligned}
&H(\vec{f})(\vec{x}, \vec{y}) = F(\lambda t.G_1(\vec{f})(t, \vec{y}), \ldots, \lambda t.G_l(\vec{f})(t, \vec{y}))(\vec{x}) \\
&= F_0(\lambda t.G_1(\vec{f})(t, \vec{y}), \ldots, \lambda t.G_l(\vec{f})(t, \vec{y}))(F_1(\lambda t.G_1(\vec{f})(t, \vec{y}), \ldots, \lambda t.G_l(\vec{f})(t, \vec{y}))(\vec{x}), \\
&\qquad \ldots, F_k(\lambda t.G_1(\vec{f})(t, \vec{y}), \ldots, \lambda t.G_l(\vec{f})(t, \vec{y}))(\vec{x})) \\
&\qquad\qquad = H_0(\vec{f})(H_1(\vec{f})(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, H_k(\vec{f})(\vec{x}, \vec{y}), \vec{y}).
\end{aligned}$$

Следователно H е рудиментарен от клаузи 1 и 3 на дефиниция 5.4.1. Накрая нека F е рудиментарен от клауза 4 на дефиниция 5.4.1, т.е. $n > 0$ и

$$F(\vec{g})(y, \vec{x}) = \mu_{z \leq y}[F_0(\vec{g})(z, \vec{x}) = 0]$$

за $\vec{g} \in \mathcal{T}_1^l, y \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{N}^{n-1}$, и индуктивната хипотеза е изпълнена за F_0, т.е. $(m, n+p)$-операторът H_0, дефиниран с

$$H_0(\vec{f})(z, \vec{x}, \vec{y}) = F_0(\lambda t.G_1(\vec{f})(t, \vec{y}), \ldots, \lambda t.G_l(\vec{f})(t, \vec{y}))(z, \vec{x})$$

за $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^m, z \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{N}^{n-1}, \vec{y} \in \mathbb{N}^p$, е рудиментарен. Имаме

$$\begin{aligned}
H(\vec{f})(y, \vec{x}, \vec{y}) &= F(\lambda t.G_1(\vec{f})(t, \vec{y}), \ldots, \lambda t.G_l(\vec{f})(t, \vec{y}))(y, \vec{x}) \\
&= \mu_{z \leq y}[F_0(\lambda t.G_1(\vec{f})(t, \vec{y}), \ldots, \lambda t.G_l(\vec{f})(t, \vec{y}))(z, \vec{x}) = 0] \\
&= \mu_{z \leq y}[H_0(\vec{f})(z, \vec{x}, \vec{y}) = 0].
\end{aligned}$$

Така H е рудиментарен от клауза 4 на дефиниция 5.4.1. □

Следствие 5.4.6. Класът $\mathbf{RO}$ е затворен относно композиция на оператори.

Доказателство. От твърдение 5.4.5 при $p = 0$. □

Да означим с $\mathbf{RO_1}$ класът на обикновените рудиментарни оператори. От твърдение 5.4.3 следва, разбира се, включването $\mathbf{O}_{\mathcal{M}^2} \subseteq \mathbf{RO_1}$. При това включването е собствено, т.е. $\mathbf{O}_{\mathcal{M}^2} \neq \mathbf{RO}_1$, както отбелязохме по-горе.

Пример 5.4.7. Класът $\mathbf{RO_1}$ е подходящ клас от оператори в смисъла на дефиниция 4.7.1.

Доказателство. Трябва да покажем, че са изпълнени петте условия в дефиниция 4.7.1. Условие 1 е тривиално, тъй като $\mathbf{RO_1}$ по дефиниция се състои от обикновени оператори. Условие 2 следва от клауза 2 на дефиниция 5.4.1. Операторът в условие 3 е рудиментарен от клаузи 2 и 3 на дефиниция 5.4.1. Условие 4 получаваме от следствие 5.4.6. Остава да докажем условие 5. Нека k е естествено число и F е рудиментарен $(k+1,1)$-оператор. Дефинираме $(k,1)$-оператор G с равенството

$$G(\vec{f})(x) = F(\vec{f}, \widehat{x})(x)$$

за $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^k, x \in \mathbb{N}$. Тук $\widehat{x}$ е унарната константа със стойност x. Целта е да покажем, че G е рудиментарен. Нека дефинираме $(k,2)$-оператор G' с равенството

$$G'(\vec{f})(x,y) = F(\vec{f}, \widehat{y})(x)$$

за $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^k, x, y \in \mathbb{N}$. Твърдим, че G' е рудиментарен. Действително,

$$G'(\vec{f})(x,y) = F(\lambda t.G_1(\vec{f})(t,y), \dots, \lambda t.G_k(\vec{f})(t,y), \lambda t.G_{k+1}(\vec{f})(t,y))(x),$$

където за $i \in \{1,\dots,k\}$ имаме $G_i(\vec{f})(t,y) = f_i(t)$ и $G_{k+1}(\vec{f})(t,y) = y$. От клаузи 1, 2 и 3 на дефиниция 5.4.1 получаваме, че операторите $G_1,\dots,G_k$ са рудиментарни. Операторът G_{k+1} също е рудиментарен от клауза 1 на дефиниция 5.4.1. Прилагаме твърдение 5.4.5 и получаваме, че G' е рудиментарен. Но тогава G също е рудиментарен, тъй като имаме равенството

$$G(\vec{f})(x) = G'(\vec{f})(x,x) = G'(\vec{f})(I_1^1(x), I_1^1(x))$$

и можем да приложим клаузи 1 и 3 на дефиниция 5.4.1. □

За да можем да използваме класа $\mathbf{RO}_1$ като втора компонента на приемлива двойка, ще трябва да докажем теорема за равномерност за $\mathbf{RO}$. Подобни субрекурсивни варианти на теоремата за равномерност са доказани от Скордев в статията [24]. Разсъжденията по-нататък почти изцяло се основават на тези от [24].

За естествени числа m, n един (m,n)-оператор F ще наричаме *монотонно растящ*, ако $F(\vec{f})(\vec{x}) \leq F(\vec{g})(\vec{y})$ за всички $\vec{f}, \vec{g} \in \mathcal{T}_1^m, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{N}^n$, такива че g_l мажорира f_l за $l \in \{1,\dots,m\}$ и $x_k \leq y_k$ за $k \in \{1,\dots,n\}$.

Бележка 5.4.8. Максимумът на крайно множество от естествени числа се повишава (или не се променя), ако повишим някой от елементите на множеството или добавим нови елементи.

Лема 5.4.9. За естествени числа m, n и произволен рудиментарен (m,n)-оператор F съществува монотонно растящ рудиментарен $(1,n)$-оператор G, такъв че $F(\vec{f})(\vec{x}) \leq G(f)(\vec{x})$ за произволни $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^m, f \in \mathcal{T}_1, \vec{x} \in \mathbb{N}^n$, такива че f мажорира $f_1,\dots,f_m$.

Доказателство. Индукция по F. Нека F е рудиментарен от клауза 1 на дефиниция 5.4.1. Тогава F е константен оператор. Ако $F(\vec{f})(x,y) = x \dot{-} y$, то взимаме $G(f)(x,y) = x$. В другите случаи F е монотонно растящ и така можем да вземем $G(f)(\vec{x}) = F(\vec{f})(\vec{x})$. Сега нека F е $(m,1)$-операторът, дефиниран с $F(f_1,\dots,f_m)(x) = f_i(x)$ за някое $i \in \{1,\dots,m\}$ (клауза 2 на 5.4.1). Тогава взимаме $G(f)(x) = \max_{y\le x} f(y)$. От твърдение 5.4.4 имаме $G \in \mathbf{RO}$, а от бележка 5.4.8 G е монотонно растящ. Очевидно

$$F(\vec{f})(x) = f_i(x) \le f(x) \le \max_{y\le x} f(y) = G(f)(x)$$

за всички $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^m, f \in \mathcal{T}_1, x \in \mathbb{N}$, такива че f мажорира $f_1,\dots,f_m$. Понататък, нека F е рудиментарен съгласно клауза 3 на 5.4.1, т.е. F е дефиниран с

$$F(\vec{f})(\vec{x}) = F_0(\vec{f})(F_1(\vec{f})(\vec{x}),\dots,F_k(\vec{f})(\vec{x}))$$

за рудиментарен (m,k)-оператор F_0 и рудиментарни оператори $F_1,\dots,F_k$ от тип (m,n). От индуктивната хипотеза съществуват $(1,k)$-оператор G_0 и $(1,n)$-оператори $G_1,\dots,G_k$,, всичките монотонно растящи и рудиментарни, такива че $F_0(\vec{f})(\vec{y}) \le G_0(f)(\vec{y})$ и $F_l(\vec{f})(\vec{x}) \le G_l(f)(\vec{x})$ за всички $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^m, f \in \mathcal{T}_1, \vec{x} \in \mathbb{N}^n, \vec{y} \in \mathbb{N}^k$ и $l \in \{1,\dots,k\}$, такива че f мажорира $f_1,\dots,f_m$. В такъв случай дефинираме $(1,n)$-оператор G с

$$G(f)(\vec{x}) = G_0(f)(G_1(f)(\vec{x}),\dots,G_k(f)(\vec{x})).$$

Ясно е, че G е рудиментарен (клауза 3 на дефиниция 5.4.1). Също G е монотонно растящ, тъй като $G_0,G_1,\dots,G_k$ са такива. За всички $\vec{f} \in \mathcal{T}_1^m, f \in \mathcal{T}_1, \vec{x} \in \mathbb{N}^n$, такива че f мажорира $f_1,\dots,f_m$, имаме

$$\begin{aligned} F(\vec{f})(\vec{x}) &= F_0(\vec{f})(F_1(\vec{f})(\vec{x}),\dots,F_k(\vec{f})(\vec{x})) \\ &\le G_0(f)(F_1(\vec{f})(\vec{x}),\dots,F_k(\vec{f})(\vec{x})) \\ &\le G_0(f)(G_1(f)(\vec{x}),\dots,G_k(f)(\vec{x})) = G(f)(\vec{x}). \end{aligned}$$

Накрая нека F е дефиниран от клауза 4 на 5.4.1, т.е.

$$F(\vec{f})(y,\vec{x}) = \mu_{z\le y}[F_0(\vec{f})(z,\vec{x}) = 0]$$

за рудиментарен (m,n)-оператор F_0. В този случай не е нужна индуктивната хипотеза. Дефинираме $G(f)(y,\vec{x}) = y+1$. Очевидно G е рудиментарен (от твърдение 5.4.2), монотонно растящ и $F(\vec{f})(y,\vec{x}) \le G(f)(y,\vec{x})$. □

Следва самата теорема за равномерност за $\mathbf{RO}$. Всъщност ще докажем нейна малко по-силна версия.

Теорема 5.4.10. Нека $m, n \in \mathbb{N}$ и F е рудиментарен (m, n)-оператор. Тогава съществува монотонно растящ рудиментарен $(1, n)$-оператор Ω, който определя равномерна граница за F (в смисъл на дефиниция 4.2.12).

Доказателство. Индукция по F. Ако F е рудиментарен от клауза 1 на дефиниция 5.4.1, то F не зависи от своите аргументи, така че можем да вземем $\Omega(f)(\vec{x}) = 0$. Ако F е $(m, 1)$-операторът, дефиниран с $F(\vec{f})(x) = f_i(x)$, то можем да вземем $\Omega(f)(x) = x$ (Ω е очевидно монотонно растящ и също рудиментарен от клауза 1 на дефиниция 5.4.1). Наистина, ако $g_1(t) = h_1(t), \ldots, g_m(t) = h_m(t)$ за всички $t \leq \Omega(f)(x) = x$, то разбира се $g_i(x) = h_i(x)$, така че $F(\vec{g})(x) = g_i(x) = h_i(x) = F(\vec{h})(x)$. Сега нека F е дефиниран с $F(\vec{f})(\vec{x}) = F_0(\vec{f})(F_1(\vec{f})(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{f})(\vec{x}))$ и от индуктивната хипотеза да изберем монотонно растящ рудиментарен $(1, k)$-оператор Ω_0, който определя равномерна граница за F_0 и $(1, n)$-оператори $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, всичките рудиментарни и монотонно растящи, такива че Ω_l определя равномерна граница за F_l за $l \in \{1, \ldots, k\}$. По-нататък използваме лема 5.4.9 и избираме рудиментарни монотонно растящи $(1, n)$-оператори $G_1, \ldots, G_k$, такива че $F_l(\vec{g})(\vec{x}) \leq G_l(f)(\vec{x})$ за всички $l \in \{1, \ldots, k\}, \vec{g} \in \mathcal{T}_1^m, f \in \mathcal{T}_1, \vec{x} \in \mathbb{N}^n$, такива че f мажорира $g_1, \ldots, g_m$. Дефинираме

$$\Omega(f)(\vec{x}) = \max(\Omega_0(f)(G_1(f)(\vec{x}), \ldots, G_k(f)(\vec{x})), \Omega_1(f)(\vec{x}), \ldots, \Omega_k(f)(\vec{x}))$$

и ще покажем, че Ω притежава нужните свойства. Първо, Ω е рудиментарен поради клауза 3 на дефиниция 5.4.1 и твърдение 5.4.2, приложено за функцията максимум на $k+1$ аргумента. Второ, Ω е монотонно растящ, което следва от бележка 5.4.8 и от факта, че всички оператори, използвани в дефиницията на Ω, са монотонно растящи. Сега да фиксираме $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$, монотонно растяща функция $f \in \mathcal{T}_1$ и функции $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{T}_1$, които се мажорират от f, и да предположим, че $g_1(t) = h_1(t), \ldots, g_m(t) = h_m(t)$ за всички $t \leq \Omega(f)(\vec{x})$. Тогава за $l \in \{1, \ldots, k\}$, като използваме неравенството $\Omega_l(f)(\vec{x}) \leq \Omega(f)(\vec{x})$ и факта, че Ω_l определя равномерна граница за F_l, заключаваме, че е в сила равенството $F_l(\vec{g})(\vec{x}) = F_l(\vec{h})(\vec{x})$. Също е вярно, че

$$\Omega_0(f)(F_1(\vec{g})(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{g})(\vec{x})) \leq \Omega_0(f)(G_1(f)(\vec{x}), \ldots, G_k(f)(\vec{x})),$$

тъй като Ω_0 е монотонно растящ. Разбира се, това влече

$$\Omega_0(f)(F_1(\vec{g})(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{g})(\vec{x})) \leq \Omega(f)(\vec{x})$$

и тъй като Ω_0 определя равномерна граница за F_0,

$$F_0(\vec{g})(F_1(\vec{g})(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{g})(\vec{x})) = F_0(\vec{h})(F_1(\vec{g})(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{g})(\vec{x})).$$

Сега имаме
$$F(\vec{g})(\vec{x}) = F_0(\vec{g})(F_1(\vec{g})(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{g})(\vec{x})) =$$
$$F_0(\vec{h})(F_1(\vec{g})(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{g})(\vec{x})) = F_0(\vec{h})(F_1(\vec{h})(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{h})(\vec{x})) = F(\vec{h})(\vec{x}).$$
Накрая, нека F е дефиниран с $F(\vec{f})(y, \vec{x}) = \mu_{z \leq y}[F_0(\vec{f})(z, \vec{x}) = 0]$ и от индуктивната хипотеза да изберем монотонно растящ рудиментарен $(1, n)$-оператор Ω_0, който определя равномерна граница за F_0. Дефинираме
$$\Omega(f)(y, \vec{x}) = \max_{z \leq y} \Omega_0(f)(z, \vec{x}).$$
Тогава Ω е рудиментарен от твърдение 5.4.9 и монотонно растящ поради бележка 5.4.8 и факта, че Ω_0 е монотонно растящ. Фиксираме естествени числа $y, \vec{x}$, монотонно растяща функция $f \in \mathcal{T}_1$ и функции $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{T}_1$, които се мажорират от f, и да предположим, че $g_1(t) = h_1(t), \ldots, g_m(t) = h_m(t)$ за всички $t \leq \Omega(f)(y, \vec{x})$. От $\Omega_0(f)(z, \vec{x}) \leq \Omega(f)(y, \vec{x})$ за всички $z \leq y$ и факта, че Ω_0 определя равномерна граница за F_0 имаме $F_0(\vec{g})(z, \vec{x}) = F_0(\vec{h})(z, \vec{x})$ за всички $z \leq y$. Следователно
$$F(\vec{g})(y, \vec{x}) = \mu_{z \leq y}[F_0(\vec{g})(z, \vec{x}) = 0] = \mu_{z \leq y}[F_0(\vec{h})(z, \vec{x}) = 0] = F(\vec{h})(y, \vec{x}). \quad \square$$

Разбира се, рудиментарните оператори са изчислими и следователно непрекъснати. Ще дадем скица на по-подробно доказателство. Разсъжденията са много подобни на тези в теоремата за равномерност.

Твърдение 5.4.11. Всеки рудиментарен оператор е непрекъснат.

Доказателство. Използваме дефиницията за непрекъснатост 4.2.8. С индукция по рудиментарния оператор F показваме, че F е непрекъснат. Ако F е рудиментарен от клауза 1 на дефиниция 5.4.1, то F не зависи от своите аргументи и за произволни $\vec{f}, \vec{x}$ взимаме $u = 0$. Ако F е дефиниран с $F(\vec{f})(x) = f_i(x)$, то при дадени $\vec{f}, x$ взимаме $u = x$. Нека F е дефиниран с $F(\vec{f})(\vec{x}) = F_0(\vec{f})(F_1(\vec{f})(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{f})(\vec{x}))$. Да фиксираме $\vec{f}, \vec{x}$. От индуктивната хипотеза да изберем естествени числа $u_1, \ldots, u_k$, съответни на $F_1, \ldots, F_k$ при същия избор на $\vec{f}, \vec{x}$. Също да изберем естествено число u_0, съответно на F_0 при $\vec{f}, \vec{y}$, където $\vec{y} = (F_1(\vec{f})(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{f})(\vec{x}))$. Тогава взимаме u да бъде най-голямото от числата $u_0, u_1, \ldots, u_k$. Накрая, нека F е дефиниран с $F(\vec{f})(y, \vec{x}) = \mu_{z \leq y}[F_0(\vec{f})(z, \vec{x}) = 0]$. При фиксирани $\vec{f}, y, \vec{x}$ да изберем от индуктивната хипотеза за всяко $z \leq y$ естествено число u_z, съответно на F_0 при $\vec{f}, z, \vec{x}$. Тогава взимаме u да бъде най-голямото от числата u_z при $z \leq y$. $\square$

След предварителната работа можем да докажем най-важната теорема в тази секция.

Теорема 5.4.12. Наредената двойка $(\mathcal{M}^2, \mathbf{RO_1})$ е приемлива в смисъл на дефиниция 5.1.1.

Доказателство. Ще трябва да проверим деветте условия в 5.1.1. Условия 1, 2 тривиално се удовлетворяват от $\mathcal{M}^2$. Условие 3 следва от твърдение 5.4.11 и факта, че $\mathbf{RO_1}$ се състои от обикновени оператори. Условия 4, 5, 6 могат да се докажат на практика по същия начин, както в доказателството на твърдение 5.4.3. Условие 7 следва от 5.4.6. Условие 9 е в сила от 5.4.10. Остава да проверим само условие 8. Ще докажем с индукция по F малко по-силното твърдение, че функцията

$$b = \lambda\vec{s}\vec{x}.F(\lambda t.a_1(\vec{s},t),\ldots,\lambda t.a_m(\vec{s},t))(\vec{x})$$

принадлежи на $\mathcal{M}^2$ за всички естествени числа l,m,n, функции $a_1,\ldots,a_m \in \mathcal{T}_{l+1} \cap \mathcal{M}^2$ и (m,n)-оператор $F \in \mathbf{RO}$. Нека F е рудиментарен от клауза 1 на дефиниция 5.4.1. В този случай $b(\vec{s},\vec{x}) = a(\vec{x})$ (без значение кои са функциите $a_1,\ldots,a_m$), където a е изходна функция, функцията произведение или отсечената разлика, така че $a \in \mathcal{M}^2$. Тогава също $b \in \mathcal{M}^2$ (тъй като b се получава от a със суперпозиция на проекции). Нека F е $(m,1)$-операторът, дефиниран с $F(\vec{f})(x) = f_i(x)$. За всички функции $a_1,\ldots,a_m \in \mathcal{T}_{l+1} \cap \mathcal{M}^2$, $b(\vec{s},x) = a_i(\vec{s},x)$, т.е. $b = a_i$, така че $b \in \mathcal{M}^2$. По-нататък, нека F е дефиниран с

$$F(\vec{f})(\vec{x}) = F_0(\vec{f})(F_1(\vec{f})(\vec{x}),\ldots,F_k(\vec{f})(\vec{x}))$$

и от индуктивната хипотеза съответните функции $b_0 \in \mathcal{T}_{l+k}, b_1,\ldots,b_k \in \mathcal{T}_{l+n}$ принадлежат на $\mathcal{M}^2$. Тогава е лесно да се види, че

$$b(\vec{s},\vec{x}) = b_0(\vec{s}, b_1(\vec{s},\vec{x}),\ldots,b_k(\vec{s},\vec{x})),$$

така че $b \in \mathcal{M}^2$, тъй като $\mathcal{M}^2$ съдържа проекциите и е затворен относно суперпозиция. Накрая, нека F е дефиниран с

$$F(\vec{f})(y,\vec{x}) = \mu_{z\le y}[F_0(\vec{f})(z,\vec{x}) = 0]$$

и от индуктивната хипотеза съответната функция $b_0 \in \mathcal{T}_{l+n}$ принадлежи на $\mathcal{M}^2$. Тогава

$$b(\vec{s},y,\vec{x}) = \mu_{z\le y}[b_0(\vec{s},z,\vec{x}) = 0],$$

така че $b \in \mathcal{M}^2$, тъй като $\mathcal{M}^2$ е затворен относно ограничена минимизация (по $l+1$-та променлива). □

Разбира се, равномерната $\mathbf{RO_1}$-изчислимост на реална функция е еквивалентна с равномерната $\mathbf{RO}$-изчислимост, тъй като изчислителните системи за реални функции се състоят от обикновени оператори. От следствието в края на секция 5.2 получаваме

Следствие 5.4.13. Следните са еквивалентни за реална функция θ:

- θ е равномерно $\mathbf{RO}$-изчислима,
- θ е равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима в стила на Тент и Циглер,
- θ е равномерно $\mathbf{O}_{\mathcal{M}^2}$-изчислима (равномерно $\mathcal{M}^2$-изчислима).

Аналогично, условната $\mathbf{RO_1}$-изчислимост на реална функция е еквивалентна с условната $\mathbf{RO}$-изчислимост, тъй като в дефиниция 4.7.12 участват само обикновени оператори. От следствието в края на секция 5.3 получаваме

Следствие 5.4.14. Следните са еквивалентни за реална функция θ:

- θ е условно $\mathbf{RO}$-изчислима,
- θ е условно $\mathcal{M}^2$-изчислима в стила на Тент и Циглер,
- θ е условно $\mathbf{O}_{\mathcal{M}^2}$-изчислима (условно $\mathcal{M}^2$-изчислима).

Глава 6

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

6.1 Резюме на получените резултати

В заключение ще опишем накратко съдържанието на дисертацията, като акцентираме върху собствения научен принос на автора.

Най-общо в дисертацията се разглежда относителна изчислимост на реални числа и реални функции. Сложността на различните представяния на тези обекти се оценява относно класовете в йерархията на Гжегорчик $\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \ldots$ и още два класа $\mathcal{M}^2$ и $\mathcal{L}^2$, такива че $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{L}^2 \subseteq \mathcal{E}^2$. Дефинициите на тези класове и техните свойства, които са съществени за дисертацията, са описани в глава 2. Изложението е подробно, като се дават доказателства на почти всички твърдения. Специално внимание заслужава теорема 2.4.6, в която се разглежда определен тип рекурсия със заместване в параметрите, за която е добре известно, че не извежда извън класа на примитивно рекурсивните функции. Авторът дава собствено доказателство на тази теорема и също определя сложността на конструкцията по отношение на класовете на Гжегорчик.

В глава 3, секция 3.1 се въвежда система от имена за реалните числа, която се базира на представяне чрез редици на Коши. Дефинира се относителна изчислимост на реално число като съответна изчислимост на компонентите на негово име. Направен е преглед на вече известни резултати за алгебричните свойства на множеството от реалните числа, изчислими относно приемлив клас от функции. В следващата секция 3.2 са представени два метода за доказателство на субрекурсивна изчислимост на реални константи – общ метод на Скордев и модифициран метод на автора.

Един от основните приноси на автора в дисертацията е сравняването на сложността на представянията на реални числа чрез въведените имена и чрез прости верижни дроби. На това са посветени следващите секции до края на глава 3. В секция 3.3 се описват общи факти за верижни дроби и се въвежда относителна изчислимост на реални числа по отношение на представянето им чрез верижна дроб. В секция 3.4 авторът съществено обобщава една теорема от своята дипломна работа [7], като доказва, че при $n \geq 2$ едно реално число е $\mathcal{E}^n$-изчислимо, стига графиката на неговата верижна дроб да е $\mathcal{E}^n$-релация. Това му позволява да даде пример за реално число, което е $\mathcal{E}^2$-изчислимо, но неговата верижна дроб не е примитивно рекурсивна. Следващите три секции са посветени на обратен проблем. По-точно, търсят се допълнителни свойства на реалните числа, които комбинирани с $\mathcal{E}^n$-изчислимост за $n \geq 2$ да влекат, че верижната дроб на числото е в $\mathcal{E}^n$. Авторът намира две такива свойства.

Първото свойство е относителна ирационалност, базирана на понятие на Петер. В секция 3.5 авторът уточнява доказателство от статията [16] на Леман и получава, че верижната дроб на едно реално число е в $\mathcal{E}^{n+1}$ при $n \geq 2$, стига то да е $\mathcal{E}^{n+1}$-изчислимо и $\mathcal{E}^n$-ирационално. След това той намира приложение на този резултат в секция 3.6. За целта авторът доказва, че едно реално число е $\mathcal{E}^2$-ирационално тогава и само тогава, когато то има крайна мярка на ирационалност (т.е. не е число на Лиувил). Така всички ирационални алгебрични реални числа и числото π имат верижна дроб в $\mathcal{E}^3$.

В секция 3.7 е посочено второто свойство, а именно ограниченост в растежа на коефициентите на верижната дроб. Авторът доказва, че ако едно реално число е $\mathcal{E}^{n+1}$-изчислимо и верижната му дроб се мажорира от функция в $\mathcal{E}^n$, то тази верижна дроб е в $\mathcal{E}^{n+1}$.

В следващата глава 4 започва втората част от дисертацията, посветена на относителна изчислимост на реални функции. В секция 4.1 се дава определение за изчислителна система за реална функция и съответно за равномерна изчислимост на реална функция относно клас от оператори. В секция 4.2 се дефинира важният клас на $\mathcal{F}$-субституционните оператори за клас от функции $\mathcal{F}$. Доказват се подробно някои техни свойства за композиция, а също и твърдение за запазване на полиномиален растеж след прилоение на $\mathcal{F}$-субституционен оператор за клас от функции $\mathcal{F}$, в който всяка функция е ограничена от полином. Дискутира се понятието непрекъснатост на оператор и се доказва, че $\mathcal{F}$-субституционните оператори притежават усилена форма на непрекъснатост. Това позволява да се дадат примери за изчислими оператори, които не са $\mathcal{F}$-субституционни. В края на секция 4.2 е доказана теорема за равномерност за класа на $\mathcal{F}$-субституционните оператори при подходящи условия за класа от функции $\mathcal{F}$. Авторът няма съществен научен принос в тази секция.

В следващата секция 4.3 се дефинира понятието равномерна $\mathcal{F}$-изчислимост на реална функция. Дават се голям брой примери. Доказва се равномерна $\mathcal{F}$-изчислимост на коренуването с четен показател. Доказва се съществуването на $\mathcal{F}$-изчислим регулатор на непрекъснатост за равномерно $\mathcal{F}$-изчислимите реални функции. За тази цел авторът модифицира доказателство от статията [21] на Шефердсън, базирано на теоремата за равномерност. По-нататък се показва, че равномерно $\mathcal{F}$-изчислимите реални функции са ограничени от полином, стига всяка функция във $\mathcal{F}$ да е ограничена от полином. В края на секция 4.3 се формулират основните резултати от [30], които свързват равномерната $\mathcal{M}^2$-изчислимост с елементарните функции на анализа. Отбелязва се, че за удобен клас от функции $\mathcal{F}$ тези реални функции запазват $\mathcal{F}$-изчислимостта на реалните числа.

При разглеждане на коренуването с нечетен показател възниква въпросът при какви условия равномерната $\mathcal{F}$-изчислимост се запазва при определени разширения на реални функции. В секция 4.4 са доказани три леми, свързани с този проблем. Втората от тях е лема 4.4.2, в която се разглежда едноточково разширение на реална функция, и тя е научен принос на автора.

В следващата секция 4.5 авторът прилага вече получените резултати за сложността на логаритмичната и експоненциалната реални функции и получава два нови метода, базирани на методите от секция 3.2, за доказателство на субрекурсивна изчислимост на реални константи, които са представени с безкрайни произведения.

Равномерната $\mathcal{M}^2$-изчислимост е достатъчна за изчисляването на елементарните функции на анализа, но ограничени до компактни подмножества на своите дефиниционни области. Затова Скордев предлага нов вид относителна изчислимост на реални функции, която разглеждаме в секция 4.6 – условната $\mathcal{F}$-изчислимост. Тя е обобщение на равномерната $\mathcal{F}$-изчислимост, при което съществено се усложнява изчислителната процедура и се дава възможност тя да зависи от естествен параметър, получен чрез търсене от определен вид. Научният принос на автора в тази секция е теорема 4.6.5, според която при неограничителни предпоставки за класа $\mathcal{F}$ условната $\mathcal{F}$-изчислимост се запазва при композиция на реални функции. Всички елементарни функции на анализа са условно $\mathcal{M}^2$-изчислими върху целите си дефиниционни области. Следват още две теореми, без доказателство, които свързват условната и равномерната $\mathcal{F}$-изчислимости. В пример 4.6.10 авторът разглежда по-подробно една реална функция, предложена от Скордев, която е изчислима, но не е условно $\mathcal{F}$-изчислима относно никой клас от функции $\mathcal{F}$. Но рестрикцията на въпросната функция до ненулевите числа в нейната дефиниционна област е условно $\mathcal{M}^2$-изчислима и не е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима относно никой клас от функции $\mathcal{F}$. В последната секция 4.7 се обобщават резултатите от секция 4.6 до подходящи класове от оператори, т.е. такива класове, които удовлетворяват определен запас от субституционни свойства (подобно на класа на $\mathcal{F}$-субституционните оператори). В нея авторът и проф. Скордев имат равностоен научен принос.

В последната глава 5 се изследва връзката между въведените понятия равномерна и условна изчислимост на реална функция относно клас от оператори и други две понятия за относителна изчислимост на реални функции от статията [31] на Тент и Циглер. Еквивалентността на равномерните версии на тези понятия е доказана от Скордев в негова характеризационна теорема. Но условната изчислимост и неравномерната изчислимост на Тент и Циглер съществено се отличават. Целта в тази глава е да се намери друга версия на неравномерна изчислимост на реална функция в духа на Тент и Циглер, за която да може да се обобщи характеризационната теорема. Авторът постига тази цел в секция 5.3 – дефиниция 5.3.3 и теорема 5.3.4 са негов собствен научен принос. За да докаже теорема 5.3.4 авторът използва резултати на Скордев от топологичен характер относно условната изчислимост, които са подробно описани в началото на секция 5.3. В последната секция 5.4 авторът дефинира класа на рудиментарните оператори на базата на операцията ограничена минимизация. След това се доказват общи свойства на този клас, включително теорема за равномерност. Целта на автора е да илюстрира понятията и резултатите от предходните секции.

6.2 Декларация за оригиналност

Авторът декларира, че настоящата дисертация е оригинален научен труд. Предходни резултати и в частност резултати, които са описани и/или публикувани от други учени, са надлежно цитирани в библиографията.

Библиография

[1] Марченков, С. С., Елементарные рекурсивные функции, Изд. Моск. центра непр. мат. образ., Москва, 2003.

[2] Скордев, Д., Лична кореспонденция, 2010.

[3] Bennett, J. H., On Spectra, Doctoral Dissertation, Princeton University, Princeton, NJ, 1962.

[4] Calude, C., Super-exponential non primitive recursive, but rudimentary, Information Processing Letters, 25 (1987) 311–315.

[5] Escardó, M. H., Effective and sequential definition by cases on the reals via infinite signed-digit numerals, Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 13 (1998) 53–68.

[6] Finch, S. R., Mathematical constants, Encyclopedia of Mathematics and its Applications (94), Cambridge University Press, 2003.

[7] Georgiev, I., Subrecursive Computability in Analysis, MSc Thesis, Sofia University, 2009.

[8] Georgiev, I., Continued fractions of primitive recursive real numbers, Math. Log. Quart., 61(issue 4–5) (2015) 288–306.

[9] Georgiev, I., Skordev, D., Conditional computability of real functions with respect to a class of operators, Annals of Pure and Applied Logic, 164 (2013) 550–565, doi: 10.1016/j.apal.2012.11.004.

[10] Grzegorczyk, A., Some Classes of Recursive Functions, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 4, Warsaw, 1953.

[11] Grzegorczyk, A., Computable functionals, Fund. Math., 42 (1955) 168–202.

[12] Hata, M., Improvement in the irrationality measures of π and π^2, Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci., 68 (1992) 283–286.

[13] Khinchin, A. Ya., Continued Fractions, Dover Publications, New York, 1997.

[14] Ko, Ker-I, Complexity Theory of Real Functions, Progress in Theoretical Computer Science, Birkhäuser, Boston, 1991.

[15] Lacombe, D., Extension de la notion de fonction récursive aux fonctions d'une ou plusieurs variables réelles, C. R. Acad. Sci. Paris, 240 (1955) 2478–2480, 241 (1955) 13–14, 151–153.

[16] Lehman, R. S., On primitive recursive real numbers, Fundamenta mathematicae, 49 (1961) 105–118.

[17] Paris, J. B., Wilkie, A. J., Woods, A. R., Provability of the pigeonhole principle and the existence of infinitely many primes, J. Symbolic Logic, 53 (1988) 1235–1244.

[18] Pour-El, M. B., Richards, J. I., Computability in Analysis and Physics, Springer, Berlin, 1989.

[19] Rogers, H. Jr., Theory of Recursive Functions and Effective Computability, McGraw-Hill, New York, 1967.

[20] Rose, H. E., Subrecursion: Functions and Hierarchies, Clarendon Press, Oxford, 1984.

[21] Shepherdson, J. C., On the definition of computable function of a real variable, Z. Math. Logik Grundlag. Math., 22 (1976) 391–402.

[22] Skolem, Th., Proof of some theorems on recursively enumerable sets. The Notre Dame Journal of Formal Logic, 3 (1962) 65–74.

[23] Skordev, D., Computability of real numbers by using a given class of functions in the set of natural numbers, Math. Log. Quart., 48 (suppl. 1) (2002) 91–106.

[24] Skordev, D., Some subrecursive versions of Grzegorczyk's Uniformity Theorem, Math. Log. Quart., 50 (2004) 520–524.

[25] Skordev, D., $\mathcal{E}^2$-computability of e, π and other famous constants, Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 202 (2008) 37–47.

[26] Skordev, D., On the subrecursive computability of several famous constants, Journal of Universal Computer Science, 14 (2008) 861–875.

[27] Skordev, D., Uniform computability of real functions, in: 120 Years Faculty of Mathematics and Informatics, St. Kliment Ohridski University of Sofia, Proceedings, St. Kliment Ohridski Press, Sofia (2011) 179–185.

[28] Skordev, D., On some computability notions for real functions, Computability, 2 (2013) 67–73, doi: 10.3233/COM-13018.

[29] Skordev, D., Georgiev, I., On a relative computability notion for real functions, in: B. Löwe, D. Normann, I. Soskov, A. Soskova (Eds.), Models of Computation in Context, 7th Conference on Computability in Europe, Proceedings, CiE 2011, Sofia, Bulgaria, June 27 – July 2, 2011, in: Lecture Notes in Comput. Sci., 6735 (2011) 270–279.

[30] Skordev, D., Weiermann, A., Georgiev, I., $\mathcal{M}^2$-computable real numbers, Journal of Logic and Computation, 22 (issue 4) (2012) 899–925.

[31] Tent, K., Ziegler M., Computable functions of reals, Münster J. Math., 3 (2010) 43–66.

[32] Turing, A., On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proceedings of the London Mathematical Society, 42 (1936) 230–265.

[33] Weihrauch, K., Computable Analysis, An Introduction, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2000.