Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика
Катедра Математическа логика и приложенията ѝ

Универсални Левенщайн автомати. Построяване и свойства

Дипломна работа на Петър Николаев Митанкин
ф. № М-21387

Ръководител катедра:
проф. дмн Ив. Сосков

Научен ръководител:
н.с. I ст. д-р Ст. Михов

— София, 2005 г. —

Съдържание

1. Левенщайн разстояния. Свойства.

Нека Σ е крайно множество(азбука).
Дефиниция 1 $d_L^\epsilon : \Sigma^* \times \Sigma^* \to N$
Нека $v, w, v', w' \in \Sigma^*$ и $a, b \in \Sigma$.
1) $v = \epsilon$ или $w = \epsilon$
$d_L^\epsilon(v, w) \stackrel{def}{=} max(|v|, |w|)$
2) $|v| \geq 1$ и $|w| \geq 1$
Нека $v = av'$ и $w = bw'$.

$$\begin{aligned} d_L^\epsilon(v, w) \stackrel{def}{=} \quad min(\quad & if(a = b, d_L^\epsilon(v', w'), \infty), \\ & 1 + d_L^\epsilon(v', bw'), \\ & 1 + d_L^\epsilon(av', w'), \\ & 1 + d_L^\epsilon(v', w') \quad) \end{aligned}$$

Функцията d_L^ϵ ще наричаме Левенщайн разстояние. $d_L^\epsilon(v, w)$ ще наричаме Левенщайн разстояние между думите v и w. Левенщайн разстоянието между думите v и w е минималния брой елементарни операции, с които от v можем да получим w. Елементарни операции са изтриване на символ, вмъкване на символ и замяна на един символ с друг.

Дефиниция $2'$
$\hookrightarrow: \Sigma^* \times N \to \Sigma^*$
Нека $k \in N$, $x_1, x_2, ..., x_k \in \Sigma$ и $t \in N$.

$$x_1 x_2 ... x_k \hookrightarrow t \stackrel{def}{=} \begin{cases} \epsilon, & \text{ако } t \geq k \\ x_{t+1} x_{t+2} ... x_k & \text{иначе} \end{cases}$$

Ако към елементарните операции, с които v се трансформира до w, добавим транспозиция на два съседни символа, получаваме разширено с транспозиция Левенщайн разстояние.

Дефиниция 2 $d_L^t : \Sigma^* \times \Sigma^* \to N$
Нека $v, w, v', w' \in \Sigma^*$ и $a, b, a_1, b_1 \in \Sigma$.
1) $v = \epsilon$ или $w = \epsilon$
$d_L^t(v, w) \stackrel{def}{=} max(|v|, |w|)$
2) $|v| \geq 1$ и $|w| \geq 1$
Нека $v = av'$ и $w = bw'$.

$$\begin{aligned} d_L^t(v, w) \stackrel{def}{=} \quad min(\quad & if(a = b, d_L^t(v', w'), \infty), \\ & 1 + d_L^t(v', bw'), \\ & 1 + d_L^t(av', w'), \\ & 1 + d_L^t(v', w'), \\ & if(a_1 < v' \,\&\, b_1 < w' \,\&\, a = b_1 \,\&\, a_1 = b, 1 + d_L^t(v \hookrightarrow 2, w \hookrightarrow 2), \infty) \quad) \end{aligned}$$

($c < d \Leftrightarrow c$ е префикс на d.)

Функцията d_L^t ще наричаме разширено с транспозиция Левенщайн разстояние. $d_L^t(v,w)$ ще наричаме разширено с транспозиция Левенщайн разстояние между думите v и w.

Ако към елементарните операции добавим слепване на два съседни символа (merge) и разделяне на един символ на други два (split), получаваме разширено с merge и split Левенщайн разстояние.

Дефиниция 3 $d_L^{ms} : \Sigma^* \times \Sigma^* \to N$
Нека $v, w, v', w' \in \Sigma^*$ и $a, b \in \Sigma$.
1) $v = \epsilon$ или $w = \epsilon$
$d_L^{ms}(v,w) \stackrel{def}{=} max(|v|,|w|)$
2) $|v| \geq 1$ и $|w| \geq 1$
Нека $v = av'$ и $w = bw'$.

$$
\begin{aligned}
d_L^{ms}(v,w) \stackrel{def}{=} \quad min(\quad & if(a = b, d_L^{ms}(v',w'), \infty),\\
& 1 + d_L^{ms}(v', bw'),\\
& 1 + d_L^{ms}(av', w'),\\
& 1 + d_L^{ms}(v', w'),\\
& if(|w| \geq 2, 1 + d_L^{ms}(v', w \hookrightarrow 2), \infty),\\
& if(|v| \geq 2, 1 + d_L^{ms}(v \hookrightarrow 2, w'), \infty) \quad)
\end{aligned}
$$

Функцията d_L^{ms} ще наричаме разширено с merge и split Левенщайн разстояние. $d_L^{ms}(v,w)$ ще наричаме разширено с merge и split Левенщайн разстояние между думите v и w.

Означения Ще използваме метаозначения, които имат аргументи. От контекста ще бъде ясно кога използваме означение и кога метаозначение.
Пример: *Нека* $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. *Тогава* d_L^χ ...
d_L^χ означава d_L^ϵ, d_L^t или d_L^{ms}.

Твърдение 1 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$ и $v, w \in \Sigma^*$. Тогава $d_L^\chi(v,w) = 0 \Leftrightarrow v = w$.

Доказателство
$\Leftarrow$) Нека $v = w = x$ и $|x| = k$. С индукция по k ще докажем, че $d_L^\chi(x,x) = 0$.
1) $k = 0$
$d_L^\chi(x,x) = d_L^\chi(\epsilon,\epsilon) = 0$
2) Индукционно предположение: $\forall x \in \Sigma^*(|x| = k \Rightarrow d_L^\chi(x,x) = 0)$. Нека $a \in \Sigma$, $x \in \Sigma^*$ и $|x| = k$. Ще докажем, че $d_L^\chi(ax,ax) = 0$.

$$
\begin{aligned}
d_L^\chi(ax,ax) = \quad min(\quad & if(a = a, d_L^\chi(x,x), \infty),\\
& ... \ ) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
min(\quad & if(a = a, 0, \infty),\\
& ... \ ) = 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$) С индукция по $|v|$ ще докажем, че $\forall v, w \in \Sigma^*(d_L^\chi(v,w) = 0 \Rightarrow v = w)$

1) $v = \epsilon$. Нека $d_L^\chi(v, w) = 0$. Ще докажем, че $w = \epsilon$. $d_L^\chi(v, w) = max(|v|, |w|) = 0$. Следователно $w = \epsilon$.

2) Индукционно предположение: $\forall v, w \in \Sigma^*(|v| \leq i \;\&\; d_L^\chi(v, w) = 0 \Rightarrow v = w)$

Нека $a \in \Sigma$ и $|v| \leq i$. Ще докажем, че $d_L^\chi(av, w) = 0 \Rightarrow av = w$. Нека $d_L^\chi(av, w) = 0$. От дефиницията на d_L^χ следва, че $|w| \geq 1$. Нека $b \in \Sigma$, $w' \in \Sigma^*$ и $w = bw'$. От дефиницията на d_L^χ следва, че $a = b$ и $d_L^\chi(v, w') = 0$. От индукционното предположение следва, че $v = w'$. Следователено $av = w$.

Твърдение 2 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$ и $v, w \in \Sigma^*$. Тогава $d_L^\chi(v, w) = d_L^\chi(w, v)$.

Доказателство С индукция по построението на $d_L^\chi(v, w)$ доказваме, че $d_L^\chi(v, w) = d_L^\chi(w, v)$.

1) $v = \epsilon$ или $w = \epsilon$

$d_L^\chi(v, w) = max(|v|, |w|) = max(|w|, |v|) = d_L^\chi(w, v)$

2) $|v| \geq 1$ и $|w| \geq 1$

Нека $a, b \in \Sigma$, $v', w' \in \Sigma^*$, $v = av'$ и $w = aw'$.

2.1) $\chi = \epsilon$

Индукционно предположение:

$d_L^\epsilon(v', w') = d_L^\epsilon(w', v') \;\&\; d_L^\epsilon(v', bw') = d_L^\epsilon(bw', v') \;\&\; d_L^\epsilon(av', w') = d_L^\epsilon(w', av')$

$$\begin{aligned} d_L^\epsilon(v, w) = \quad min(\quad & if(a = b, d_L^\epsilon(v', w'), \infty), \\ & 1 + d_L^\epsilon(v', bw'), \\ & 1 + d_L^\epsilon(av', w'), \\ & 1 + d_L^\epsilon(v', w') \quad) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} min(\quad & if(b = a, d_L^\epsilon(w', v'), \infty), \\ & 1 + d_L^\epsilon(bw', v'), \\ & 1 + d_L^\epsilon(w', av'), \\ & 1 + d_L^\epsilon(w', v') \quad) = d_L^\epsilon(w, v) \end{aligned}$$

2.2) $\chi = t$

Индукционно предположение:

$d_L^t(v', w') = d_L^t(w', v') \;\&\; d_L^t(v', bw') = d_L^t(bw', v') \;\&\; d_L^t(av', w') = d_L^t(w', av') \;\&$
$d_L^t(v \hookrightarrow 2, w \hookrightarrow 2) = d_L^t(w \hookrightarrow 2, v \hookrightarrow 2)$

Нека $a_1, b_1 \in \Sigma$.

$$\begin{aligned} d_L^t(v, w) = \quad min(\quad & if(a = b, d_L^t(v', w'), \infty), \\ & 1 + d_L^t(v', bw'), \\ & 1 + d_L^t(av', w'), \\ & 1 + d_L^t(v', w'), \\ & if(a_1 < v' \;\&\; b_1 < w' \;\&\; a = b_1 \;\&\; a_1 = b, 1 + d_L^t(v \hookrightarrow 2, w \hookrightarrow 2), \infty) \quad) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} min(\quad & if(b = a, d_L^t(w', v'), \infty), \\ & 1 + d_L^t(bw', v'), \\ & 1 + d_L^t(w', av'), \\ & 1 + d_L^t(w', v'), \\ & if(a_1 < v' \;\&\; b_1 < w' \;\&\; b_1 = a \;\&\; b = a_1, 1 + d_L^t(w \hookrightarrow 2, v \hookrightarrow 2), \infty) \quad) = d_L^t(w, v) \end{aligned}$$

2.3) $\chi = ms$

Индукционно предположение:
$d_L^{ms}(v', w') = d_L^{ms}(w', v') \& d_L^{ms}(v', bw') = d_L^{ms}(bw', v') \& d_L^{ms}(av', w') = d_L^{ms}(w', av') \&$
$d_L^{ms}(v', w \hookrightarrow 2) = d_L^{ms}(w \hookrightarrow 2, v')$ & $d_L^{ms}(v \hookrightarrow 2, w') = d_L^{ms}(w', v \hookrightarrow 2)$

$$
\begin{aligned}
d_L^{ms}(v,w) = \quad min(\quad & if(a = b, d_L^{ms}(v', w'), \infty), \\
& 1 + d_L^{ms}(v', bw'), \\
& 1 + d_L^{ms}(av', w'), \\
& 1 + d_L^{ms}(v', w'), \\
& if(|w| \geq 2, 1 + d_L^{ms}(v', w \hookrightarrow 2), \infty), \\
& if(|v| \geq 2, 1 + d_L^{ms}(v \hookrightarrow 2, w'), \infty) \;\;) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
min(\quad & if(b = a, d_L^{ms}(w', v'), \infty), \\
& 1 + d_L^{ms}(bw', v'), \\
& 1 + d_L^{ms}(w', av'), \\
& 1 + d_L^{ms}(w', v'), \\
& if(|w| \geq 2, 1 + d_L^{ms}(w \hookrightarrow 2, v'), \infty), \\
& if(|v| \geq 2, 1 + d_L^{ms}(w', v \hookrightarrow 2), \infty) \;\;) = d_L^{ms}(w, v)
\end{aligned}
$$

Дефиниция 4 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$.
$L_{Lev}^{\chi} : N \times \Sigma^* \to P(\Sigma^*)$
$L_{Lev}^{\chi}(n, w) \stackrel{def}{=} \{v | d_L^{\chi}(v, w) \leq n\}$
Дефиниция на L_{Lev}^{ϵ}, L_{Lev}^{t} и L_{Lev}^{ms} се дава в [SMFSCLA].

Твърдение 3 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $a \in \Sigma$ и $v, w \in \Sigma^*$. Тогава $d_L^{\chi}(v, w) = k \Rightarrow d_L^{\chi}(av, w) \leq k + 1$.

Доказателство Нека $d_L^{\chi}(v, w) = k$.
1) $w = \epsilon$
$d_L^{\chi}(av, w) = d_L^{\chi}(av, \epsilon) = k + 1$
2) $|w| \geq 1$
От дефиницията на d_L^{χ} следва, че $d_L^{\chi}(av, w) \leq 1 + d_L^{\chi}(v, w) = k + 1$.

Твърдение 4 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $a, w_1 \in \Sigma$ и $v, w \in \Sigma^*$. Тогава $d_L^{\chi}(v, w) = k \Rightarrow d_L^{\chi}(av, w_1 w) \leq k + 1$.

Доказателство Нека $d_L^{\chi}(v, w) = k$. От дефиницията на d_L^{χ} следва, че $d_L^{\chi}(av, w_1 w) \leq 1 + d_L^{ms}(v, w) = k + 1$.

Твърдение 5 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w_1 \in \Sigma$ и $v, w \in \Sigma^*$. Тогава $d_L^{\chi}(v, w) = k \Rightarrow d_L^{\chi}(v, w_1 w) \leq k + 1$.

Доказателство *Твърдение* 5 следва непосредствено от *Твърдение* 3 и *Твърдение* 2.

Твърдение 6 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w_1 \in \Sigma$ и $v, w \in \Sigma^*$. Тогава $d_L^\chi(v,w) = k \Rightarrow d_L^\chi(w_1 v, w_1 w) \leq k$.

Доказателство Нека $d_L^\chi(v,w) = k$. От дефиницията на d_L^χ следва, че $d_L^\chi(w_1 v, w_1 w) \leq d_L^{ms}(v,w) = k$.

Твърдение 7 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$, $w = w_1 w_2 ... w_p$, $p \geq 1$ и $n > 0$. Тогава

$$
\begin{aligned}
L_{Lev}^\chi(n,w) \supseteq \quad & \Sigma.L_{Lev}^\chi(n-1,w) \bigcup \\
& \Sigma.L_{Lev}^\chi(n-1,w_2 w_3 ... w_p) \bigcup \\
& L_{Lev}^\chi(n-1,w_2 w_3 ... w_p) \bigcup \\
& w_1.L_{Lev}^\chi(n,w_2 w_3 ... w_p).
\end{aligned}
$$

Доказателство От твърдения 3, 4, 5 и 6 следва съответно, че
$L_{Lev}^\chi(n,w) \supseteq \Sigma.L_{Lev}^\chi(n-1,w)$,
$L_{Lev}^\chi(n,w) \supseteq \Sigma.L_{Lev}^\chi(n-1,w_2 w_3 ... w_p)$,
$L_{Lev}^\chi(n,w) \supseteq L_{Lev}^\chi(n-1,w_2 w_3 ... w_p)$ и
$L_{Lev}^\chi(n,w) \supseteq w_1.L_{Lev}^\chi(n,w_2 w_3 ... w_p)$.
Следователно

$$
\begin{aligned}
L_{Lev}^\chi(n,w) \supseteq \quad & \Sigma.L_{Lev}^\chi(n-1,w) \bigcup \\
& \Sigma.L_{Lev}^\chi(n-1,w_2 w_3 ... w_p) \bigcup \\
& L_{Lev}^\chi(n-1,w_2 w_3 ... w_p) \bigcup \\
& w_1.L_{Lev}^\chi(n,w_2 w_3 ... w_p).
\end{aligned}
$$

Дефиниция 5 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$.
$R^\chi : N^+ \times \Sigma^+ \rightarrow P(\Sigma^*)$
Нека $w \in \Sigma^*$, $w = w_1 w_2 ... w_p$, $p \geq 1$ и $n \geq 1$.
1) $\chi = \epsilon$

$$
\begin{aligned}
R^\epsilon(n,w) \stackrel{def}{=} \quad & \Sigma.L_{Lev}^\epsilon(n-1,w) \bigcup \\
& \Sigma.L_{Lev}^\epsilon(n-1,w_2 w_3 ... w_p) \bigcup \\
& L_{Lev}^\epsilon(n-1,w_2 w_3 ... w_p) \bigcup \\
& w_1.L_{Lev}^\epsilon(n,w_2 w_3 ... w_p)
\end{aligned}
$$

2) $\chi = t$

$$
\begin{aligned}
R^t(n,w) \stackrel{def}{=} \quad & \Sigma.L_{Lev}^t(n-1,w) \bigcup \\
& \Sigma.L_{Lev}^t(n-1,w_2 w_3 ... w_p) \bigcup \\
& L_{Lev}^t(n-1,w_2 w_3 ... w_p) \bigcup \\
& w_1.L_{Lev}^t(n,w_2 w_3 ... w_p) \bigcup \\
& if(|w| \geq 2, w_2 w_1.L_{Lev}^t(n-1,w_3 ... w_p), \phi).
\end{aligned}
$$

3) $\chi = ms$

$$\begin{array}{rl} R^{ms}(n,w) \stackrel{def}{=} & \Sigma.L^{ms}_{Lev}(n-1,w) \bigcup \\ & \Sigma.L^{ms}_{Lev}(n-1,w_2w_3...w_p) \bigcup \\ & L^{ms}_{Lev}(n-1,w_2w_3...w_p) \bigcup \\ & w_1.L^{ms}_{Lev}(n,w_2w_3...w_p) \bigcup \\ & \Sigma.\Sigma.L^{ms}_{Lev}(n-1,w_2w_3...w_p) \bigcup \\ & if(|w| \geq 2, \Sigma.L^{ms}_{Lev}(n-1,w \hookrightarrow 2), \phi). \end{array}$$

Твърдение 8 Нека $w \in \Sigma^*$, $w = w_1w_2...w_p$, $p \geq 1$ и $n \geq 1$. Тогава $L^{\chi}_{Lev}(n,w) = R^{\chi}(n,w)$.

Доказателство
$\supseteq$)
1) $\chi = \epsilon$
От *Твърдение* 7 следва, че $L^{\epsilon}_{Lev}(n,w) \supseteq R^{\epsilon}(n,w)$.
2) $\chi = t$
Ще докажем, че
$(*^t)$ $|w| \geq 2 \Rightarrow L^t_{Lev}(n,w) \supseteq w_2w_1.L^t_{Lev}(n-1,w_3...w_p)$.
Нека $|w| \geq 2$ и $v \in L^t_{Lev}(n-1,w_3...w_p)$. Следователно $d^t_L(v,w_3...w_p) \leq n-1$. От дефиницията на d^t_L следва, че $d^t_L(w_2w_1v,w_1w_2w_3...w_p) \leq 1 + d^t_L(v,w_3...w_p) \leq n$. От $(*^t)$ и *Твърдение* 7 следва, че $L^t_{Lev}(n,w) \supseteq R^t(n,w)$.
3) $\chi = ms$
3.1) Ще докажем, че
$(*^{ms}_1)$ $L^{ms}_{Lev}(n,w) \supseteq \Sigma.\Sigma.L^{ms}_{Lev}(n-1,w_2...w_p)$.
Нека $v \in L^{ms}_{Lev}(n-1,w_2...w_p)$ и $a,b \in \Sigma$. Следователно $d^{ms}_L(v,w_2...w_p) \leq n-1$. От дефиницията на d^{ms}_L следва, че $d^{ms}_L(abv,w_1w_2...w_p) \leq 1+d^{ms}_L(v,w_2...w_p) \leq n$.
3.2) Ще докажем, че
$(*^{ms}_2)$ $|w| \geq 2 \Rightarrow L^{ms}_{Lev}(n,w) \supseteq \Sigma.L^{ms}_{Lev}(n-1,w_3...w_p)$.
Нека $|w| \geq 2$, $v \in L^{ms}_{Lev}(n-1,w_3...w_p)$ и $a \in \Sigma$. Следователно $d^{ms}_L(v,w_3...w_p) \leq n-1$. От дефиницията на d^{ms}_L следва, че $d^{ms}_L(av,w_1w_2w_3...w_p) \leq 1+d^{ms}_L(v,w_3...w_p) \leq n$. От $(*^{ms}_1)$, $(*^{ms}_2)$ и *Твърдение* 7 следва, че $L^{ms}_{Lev}(n,w) \supseteq R^{ms}(n,w)$.
Следователно $L^{\chi}_{Lev}(n,w) \supseteq R^{\chi}(n,w)$.
$\subseteq$) Нека $v \in L^{\chi}_{Lev}(n,w)$ и $d^{\chi}_L(v,w) = k \leq n$.
1) $v = \epsilon$
$d^{\chi}_L(v,w) = |w| = k$
$d^{\chi}_L(v,w_2...w_p) = |w_2...w_p| = k-1 \leq n-1$
Следователно $v \in L^{\chi}_{Lev}(n-1,w_2...w_p)$.
2) $|v| \geq 1$
Нека $|v| = t$ и $v = v_1v_2...v_t$. Следователно

$$\begin{array}{rll} d^{\chi}_L(v,w) = & min(& if(v_1 = w_1, d^{\chi}_L(v_2...v_t,w_2...w_p),\infty), \\ & & 1 + d^{\chi}_L(v_2...v_t,w), \\ & & 1 + d^{\chi}_L(v,w_2...w_p), \\ & & 1 + d^{\chi}_L(v_2...v_t,w_2...w_p), \\ & & ...) = k \end{array}$$

2.1) $v_1 = w_1 \,\&\, d_L^\chi(v_2...v_t, w_2...w_p) = k \le n$
Следователно $v \in w_1.L^\chi_{Lev}(n, w_2...w_p)$.
2.2) $d_L^\chi(v_2...v_t, w) = k-1 \le n-1$
Следователно $v \in \Sigma.L^\chi_{Lev}(n-1, w)$.
2.3) $d_L^\chi(v, w_2...w_p) = k-1 \le n-1$
Следователно $v \in L^\chi_{Lev}(n-1, w_2...w_p)$.
2.4) $d_L^\chi(v_2...v_t, w_2...w_p) = k-1 \le n-1$
Следователно $v \in \Sigma.L^\chi_{Lev}(n-1, w_2...w_p)$.
Следователно $L^\epsilon_{Lev}(n, w) \subseteq R^\epsilon(n, w)$.
2.5) $\chi = t$ и $|w| \ge 2 \,\&\, |v| \ge 2 \,\&\, v_1 = w_2 \,\&\, v_2 = w_1 \,\&\, d_L^t(v \hookrightarrow 2, w \hookrightarrow 2) = k-1 \le n-1$
Следователно $v \in \Sigma.\Sigma.L^t_{Lev}(n-1, w_2...w_p)$.
Следователно $L^t_{Lev}(n, w) \subseteq R^t(n, w)$.
2.6) $\chi = ms$ и $|w| \ge 2 \,\&\, d_L^{ms}(v_2...v_t, w_3...w_p) = k-1 \le n-1$
Следователно $v \in \Sigma.L^{ms}_{Lev}(n-1, w \hookrightarrow 2)$.
2.7) $\chi = ms$ и $|v| \ge 2 \,\&\, d_L^{ms}(v_3...v_t, w_2...w_p) = k-1 \le n-1$
Следователно $v \in \Sigma.\Sigma.L^{ms}_{Lev}(n-1, w_2...w_p)$.
Следователно $L^{ms}_{Lev}(n, w) \subseteq R^{ms}(n, w)$.
Следователно $L^\chi_{Lev}(n, w) \subseteq R^\chi(n, w)$.

2. Недетерминирани крайни автомати за Левенщайн разстояния при фиксирана дума.

Означения С изрази от вида $i^{\#e}$, $i_t^{\#e}$ и $i_s^{\#e}$ ще означаваме съответно $<< i, 0 >, e >$, $<< i, 1 >, e >$ и $<< i, 2 >, e >$.

Дефиниция 6 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$ и $n \in N$. Ще дефинираме недетерминирания краен автомат $A_n^{ND,\chi}(w)$.

$$A_n^{ND,\chi}(w) \stackrel{def}{=} < \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi^*}, \delta_n^{ND,\chi} >$$

Нека $|w| = p$ и $w = w_1 w_2 ... w_p$.
1) $\chi = \epsilon$
$Q_n^{ND,\epsilon} \stackrel{def}{=} \{i^{\#e} | 0 \le i \le p \,\&\, 0 \le e \le n\}$
$I^{ND,\epsilon} \stackrel{def}{=} \{0^{\#0}\}$
$F_n^{ND,\epsilon^*} \stackrel{def}{=} \{p^{\#e} | 0 \le e \le n\}$
Нека $a \in \Sigma \bigcup \{\epsilon\}$ и $q_1, q_2 \in Q_n^{ND,\epsilon}$.

$$\begin{array}{l} < q_1, a, q_2 > \in \delta_n^{ND,\epsilon} \Leftrightarrow_{def} \\ q_1 = i^{\#e} \,\&\, q_1 = i^{\#e+1} \,\&\, a \in \Sigma \text{ или} \\ q_1 = i^{\#e} \,\&\, q_1 = i + 1^{\#e+1} \text{ или} \\ q_1 = i^{\#e} \,\&\, q_1 = i + 1^{\#e} \,\&\, a = w_{i+1} \end{array}$$

2) $\chi = t$

$Q_n^{ND,t} \stackrel{def}{=} Q_n^{ND,\epsilon} \bigcup \{i_t^{\#e} | 0 \leq i \leq p-2 \,\&\, 1 \leq e \leq n\}$
$I^{ND,t} \stackrel{def}{=} \{0^{\#0}\}$
$F_n^{ND,t*} \stackrel{def}{=} F_n^{ND,\epsilon*}$
Нека $a \in \Sigma \bigcup \{\epsilon\}$ и $q_1, q_2 \in Q_n^{ND,t}$.

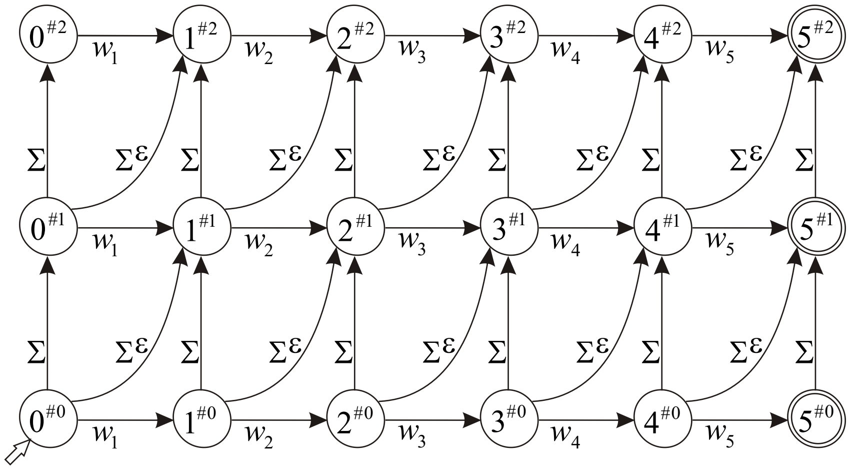
$$
\begin{array}{l}
< q_1, a, q_2 > \in \delta_n^{ND,t} \Leftrightarrow_{def} \\
< q_1, a, q_2 > \in \delta_n^{ND,\epsilon} \text{ или} \\
q_1 = i^{\#e} \,\&\, q_2 = i_t^{\#e+1} \,\&\, a = w_{i+2} \text{ или} \\
q_1 = i_t^{\#e} \,\&\, q_2 = i+2^{\#e} \,\&\, a = w_{i+1}
\end{array}
$$

3) $\chi = ms$
$Q_n^{ND,ms} \stackrel{def}{=} Q_n^{ND,\epsilon} \bigcup \{i_s^{\#e} | 0 \leq i \leq p-1 \,\&\, 1 \leq e \leq n\}$
$I^{ND,ms} \stackrel{def}{=} \{0^{\#0}\}$
$F_n^{ND,ms*} \stackrel{def}{=} F_n^{ND,\epsilon*}$
Нека $a \in \Sigma \bigcup \{\epsilon\}$ и $q_1, q_2 \in Q_n^{ND,ms}$.

$$
\begin{array}{l}
< q_1, a, q_2 > \in \delta_n^{ND,ms} \Leftrightarrow_{def} \\
< q_1, a, q_2 > \in \delta_n^{ND,\epsilon} \text{ или} \\
q_1 = i^{\#e} \,\&\, q_2 = i+2^{\#e+1} \,\&\, a \in \Sigma \text{ или} \\
q_1 = i^{\#e} \,\&\, q_2 = i+1_s^{\#e} \,\&\, a \in \Sigma \text{ или} \\
q_1 = i_s^{\#e} \,\&\, q_2 = i+1^{\#e} \,\&\, a \in \Sigma
\end{array}
$$

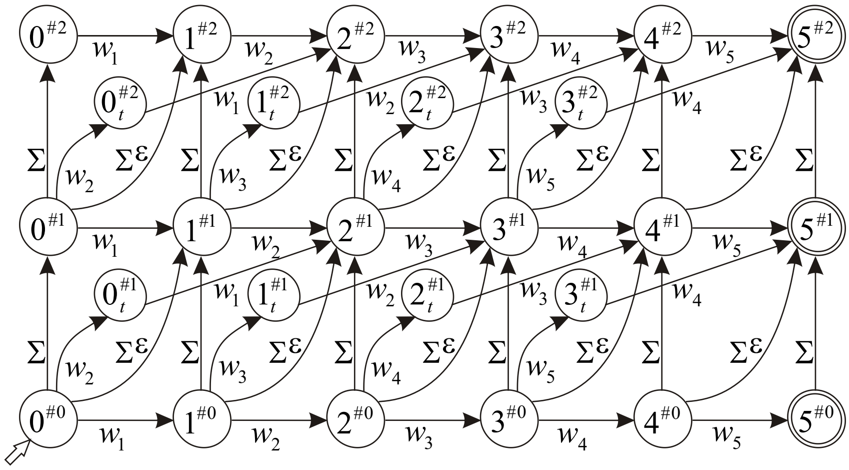
Описание на $A_n^{ND,\epsilon}$ е дадено в [MSFASLD].

Забележка $Q_n^{ND,\chi}$, F_n^{ND,χ^*} и $\delta_n^{ND,\chi}$ зависят от думата w. Когато ще използваме тези означения, от контекста ще е ясно коя е думата w.

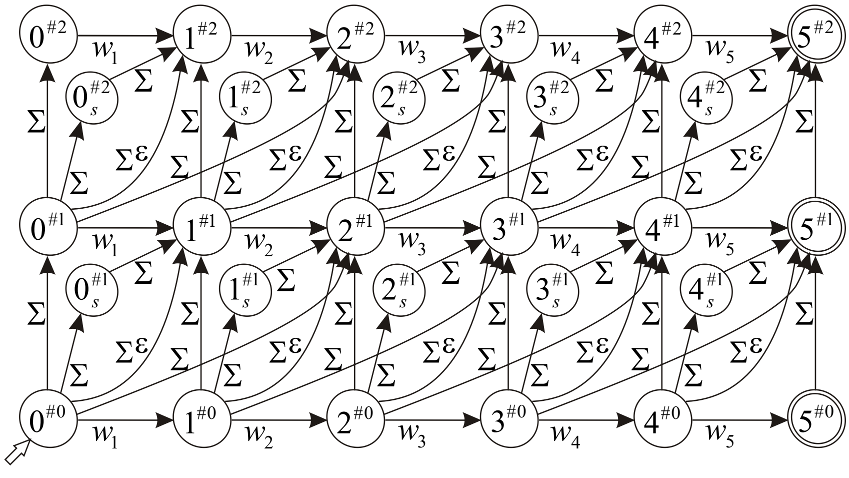


Фиг. 1 $A_2^{ND,\epsilon}(w_1 w_2 ... w_5)$
(С Σ^ϵ означаваме $\Sigma \bigcup \{\epsilon\}$.)

Преходите в автомата $A_n^{ND,\chi}(w)$ съотвестват на дефиницията на R^χ: в $A_n^{ND,\epsilon}$ преходите от вида $< i^{\#e}, a, i^{\#e+1} >$ $(a \in \Sigma)$ съответстват на $\Sigma.L^{\epsilon}_{Lev}(n-1, w)$. Преходите от вида $< i^{\#e}, a, i+1^{\#e+1} >$ $(a \in \Sigma)$ - на $\Sigma.L^{\epsilon}_{Lev}(n-1, w_2w_3...w_p)$. Преходите от вида $< i^{\#e}, \epsilon, i^{\#e+1} >$ - на $L^{\epsilon}_{Lev}(n-1, w_2w_3...w_p)$. И преходите от вида $< i^{\#e}, w_i, i+1^{\#e} >$ - на $w_1.L^{\epsilon}_{Lev}(n, w_2w_3...w_p)$. Ще докажем, че $L(A_n^{ND,\chi}(w)) = L^{\epsilon}_{Lev}(n, w)$.



Фиг. 2 $A_2^{ND,t}(w_1w_2...w_5)$



Фиг. 3 $A_2^{ND,ms}(w_1w_2...w_5)$

Твърдение 9 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $n \in N$ и $w \in \Sigma^*$. Нека $i^{\#e} \in Q_n^{ND,\chi}$. Тогава $L(i^{\#e}) = L^{\chi}_{Lev}(n-e, w_{i+1}...w_p)$.

$(L(\pi) = \{w | \exists \pi' \in F_n^{ND,\chi}(<\pi, w, \pi'> \in \delta_n^{ND,\chi^*})\})$

Твърденията $L(i^{\#e}) = L_{Lev}^{\epsilon}(n-e, w_{i+1}...w_p)$, $L(i^{\#e}) = L_{Lev}^{t}(n-e, w_{i+1}...w_p)$ и $L(i^{\#e}) = L_{Lev}^{ms}(n-e, w_{i+1}...w_p)$ са формулирани в [SMFSCLA].

Доказателство Индукция по i.

1) $i = p$

$L(p^{\#e}) = \{x | x \in \Sigma^* \,\&\, |x| \leq n-e\} = L_{Lev}^{\chi}(n-e, \epsilon)$

2) $0 \leq i \leq p-1$

Индукционно предположение:

(ИП$_1$) $\forall j \geq 1 \forall e (L(i+j^{\#e}) = L_{Lev}^{\chi}(n-e, w_{i+j+1}...w_p))$

Ще докажем, че $L(i^{\#e}) = L_{Lev}^{\chi}(n-e, w_{i+1}...w_p)$.

Доказателство: с индукция по e.

2.1) $e = n$

$L(i^{\#n}) = w_{i+1}.L(i+1^{\#n}) =_{\text{ИП}_1} w_{i+1}.L_{Lev}^{\chi}(0, w_{i+2}...w_p) = w_{i+1}...w_p = L_{Lev}^{\chi}(0, w_{i+1}...w_p) = L_{Lev}^{\chi}(n-e, w_{i+1}...w_p)$

2.2) $0 \leq e \leq n-1$

Индукционно предположение:

(ИП$_2$) $L(i^{\#e+1}) = L_{Lev}^{\chi}(n-e-1, w_{i+1}...w_p)$

2.2.1) $\chi = \epsilon$

$L(i^{\#e}) = \Sigma.L(i^{\#e+1}) \bigcup \Sigma.L(i+1^{\#e+1}) \bigcup L(i+1^{\#e+1}) \bigcup w_{i+1}.L(i+1^{\#e}) =_{\text{ИП}_{1,2}}$

$$\begin{aligned}
&\Sigma.L_{Lev}^{\epsilon}(n-e-1, w_{i+1}...w_p) \bigcup \\
&\Sigma.L_{Lev}^{\epsilon}(n-e-1, w_{i+2}...w_p) \bigcup \\
&L_{Lev}^{\epsilon}(n-e-1, w_{i+2}...w_p) \bigcup \\
&w_{i+1}.L_{Lev}^{\epsilon}(n-e, w_{i+2}...w_p) = \\
&R^{\epsilon}(n-e, w_{i+1}...w_p) =_{\textit{Твърдение 8}} \\
&L_{Lev}^{\epsilon}(n-e, w_{i+1}...w_p)
\end{aligned}$$

2.2.2) $\chi = t$

$L(i^{\#e}) = \Sigma.L(i^{\#e+1}) \bigcup \Sigma.L(i+1^{\#e+1}) \bigcup L(i+1^{\#e+1}) \bigcup w_{i+1}.L(i+1^{\#e}) \bigcup if(i \leq p-2, w_{i+2}w_{i+1}.L(i+1^{\#e+1}), \phi) =_{\text{ИП}_{1,2}}$

$$\begin{aligned}
&\Sigma.L_{Lev}^{t}(n-e-1, w_{i+1}...w_p) \bigcup \\
&\Sigma.L_{Lev}^{t}(n-e-1, w_{i+2}...w_p) \bigcup \\
&L_{Lev}^{t}(n-e-1, w_{i+2}...w_p) \bigcup \\
&w_{i+1}.L_{Lev}^{t}(n-e, w_{i+2}...w_p) \bigcup \\
&if(|w_{i+1}...w_p| \geq 2, w_{i+2}w_{i+1}.L_{Lev}^{t}(n-e-1, w_{i+3}...w_p), \phi) = \\
&R^{t}(n-e, w_{i+1}...w_p) =_{\textit{Твърдение 8}} \\
&L_{Lev}^{t}(n-e, w_{i+1}...w_p)
\end{aligned}$$

2.2.3) $\chi = ms$

$L(i^{\#e}) = \Sigma.L(i^{\#e+1}) \bigcup \Sigma.L(i+1^{\#e+1}) \bigcup L(i+1^{\#e+1}) \bigcup w_{i+1}.L(i+1^{\#e}) \bigcup$
$\Sigma.\Sigma.L(i+1^{\#e+1}) \bigcup if(i \leq p-2, \Sigma.L(i+2^{\#e+1}), \phi) =_{\text{ИП}_{1,2}}$

$$\begin{array}{l}
\Sigma.L^{ms}_{Lev}(n-e-1, w_{i+1}...w_p) \bigcup \\
\Sigma.L^{ms}_{Lev}(n-e-1, w_{i+2}...w_p) \bigcup \\
L^{ms}_{Lev}(n-e-1, w_{i+2}...w_p) \bigcup \\
w_{i+1}.L^{ms}_{Lev}(n-e, w_{i+2}...w_p) \bigcup \\
\Sigma.\Sigma.L^{ms}_{Lev}(n-e-1, w_{i+2}...w_p) \bigcup \\
if(|w_{i+1}...w_p| \geq 2, \Sigma.L^{ms}_{Lev}(n-e-1, w_{i+3}...w_p), \phi) = \\
R^{ms}(n-e, w_{i+1}...w_p) =_{\textit{Твърдение 8}} \\
L^{ms}_{Lev}(n-e, w_{i+1}...w_p)
\end{array}$$

Следствие Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$ и $n \in N$. От *Твърдение* 9 следва, че $L(A^{ND,\chi}_n(w)) = L(0^{\#0}) = L^{\chi}_{Lev}(n, w)$.

3. Детерминирани крайни автомати за Левенщайн разстояния при фиксирана дума.

Ще покажем един възможен начим за детерминизация на $A^{ND,\chi}_n$.

Дефиниция 7 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$.
$Q^{ND,\epsilon} \stackrel{def}{=} \{i^{\#e} | i, e \in Z\}$
$Q^{ND,t} \stackrel{def}{=} Q^{ND,\epsilon} \bigcup \{i^{\#e}_t | i, e \in Z\}$
$Q^{ND,ms} \stackrel{def}{=} Q^{ND,\epsilon} \bigcup \{i^{\#e}_s | i, e \in Z\}$
Нека $n \in N$. Ще дефинираме $\delta^{D,\chi}_e : Q^{ND,\chi} \times \{0,1\}^* \to P(Q^{ND,\chi})$.
Нека $b \in \{0,1\}^*$, $k \in N$ и $b = b_1 b_2 ... b_k$.
1) $\chi = \epsilon$

$$\delta^{D,\epsilon}_e(i^{\#e}, b) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \{i+1^{\#e}\}, & \text{ако } 1 < b \\ \{i^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}\}, & \text{ако } b = 0^k \,\&\, b \neq \epsilon \,\&\, e < n \\ \{i^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}, i+j^{\#e+j-1}\}, & \text{ако } 0 < b \,\&\, j = \mu z[b_z = 1] \\ \{i^{\#e+1}\}, & \text{ако } b = \epsilon \,\&\, e < n \\ \phi & \text{иначе} \end{cases}$$

С $\mu z[A]$ означаваме най-малкото z, за което е изпълнено A.

2) $\chi = t$
2.1)

$$\delta^{D,t}_e(i^{\#e}, b) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \{i+1^{\#e}\}, & \text{ако } 1 < b \\ \{i^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}, i+2^{\#e+1}, i^{\#e+1}_t\}, & \text{ако } 01 < b \\ \{i^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}, i+j^{\#e+j-1}\}, & \text{ако } 00 < b \,\&\, j = \mu z[b_z = 1] \\ \{i^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}\}, & \text{ако } b = 0^k \,\&\, b \neq \epsilon \,\&\, e < n \\ \{i^{\#e+1}\}, & \text{ако } b = \epsilon \,\&\, e < n \\ \phi & \text{иначе} \end{cases}$$

2.2)

$$\delta_e^{D,t}(i_t^{\#e},b) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \{i+2^{\#e}\}, & \text{ако } 1<b \\ \phi, & \text{иначе} \end{cases}$$

3) $\chi = ms$

3.1)

$$\delta_e^{D,ms}(i^{\#e},b) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \{i+1^{\#e}\}, & \text{ако } 1<b \\ \{i^{\#e+1}, i_s^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}, i+2^{\#e+1}\}, & \text{ако } 00<b \vee 01<b \\ \{i^{\#e+1}, i_s^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}\}, & \text{ако } 0=b\,\&\,e<n \\ \{i^{\#e+1}\}, & \text{ако } \epsilon=b\,\&\,e<n \\ \phi & \text{иначе} \end{cases}$$

3.2) $\delta_e^{D,ms}(i_s^{\#e},b) \stackrel{def}{=} \{i+1^{\#e}\}$

Функцията $\delta_e^{D,\chi}$ ще наричаме функция на елементарните преходи.

Дефиниция 8 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$ и $n \in N$.
Нека $A_n^{ND,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi^*}, \delta_n^{ND,\chi} >$.

Ще дефинираме $w_{[\,]} : Q_n^{ND,\chi} \to \Sigma^*$.

Нека $w = w_1 w_2 ... w_p$. Нека $\pi \in Q_n^{ND,\chi}$.

1) $\pi = i^{\#e} \in Q_n^{ND,\chi}$

$w_{[i^{\#e}]} = w_{i+1} w_{i+2} ... w_{i+k}$, като $k = min(n-e+1, p-i)$

2) $\pi = i_t^{\#e} \in Q_n^{ND,t}$

$w_{[i_t^{\#e}]} = w_{[i^{\#e}]}$

3) $\pi = i_s^{\#e} \in Q_n^{ND,ms}$

$w_{[i_s^{\#e}]} = w_{[i^{\#e}]}$

Думата $w_{[\pi]}$ ще наричаме релевантна относно π поддума на w([SMFSCLA]).

Дефиниция 9 $\beta : \Sigma \times \Sigma^* \to \{0,1\}^*$

$\beta(x, w_1 w_2 ... w_p) = b_1 b_2 ... b_p$, като $b_i = 1 \Leftrightarrow x = w_i$

$\beta(x, w_1 w_2 ... w_p)$ ще наричаме характеристичен вектор на думата $w_1 w_2 ... w_p$ относно x.

Дефиниция 10 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$ и $n \in N$.
Нека $A_n^{ND,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi^*}, \delta_n^{ND,\chi} >$.

Ще дефинираме $\delta_e^{D,\chi} : Q_n^{ND,\chi} \times \Sigma \to P(Q_n^{ND,\chi})$.

$\delta_e^{D,\chi}(\pi, x) \stackrel{def}{=} \delta_e^{D,\chi}(\pi, \beta(x, w_{[\pi]}))$

Дефиниции на $\delta_e^{D,\epsilon}$, $\delta_e^{D,t}$ и $\delta_e^{D,ms}$ са дадени в [SMFSCLA].

Дефиниция 11 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$.

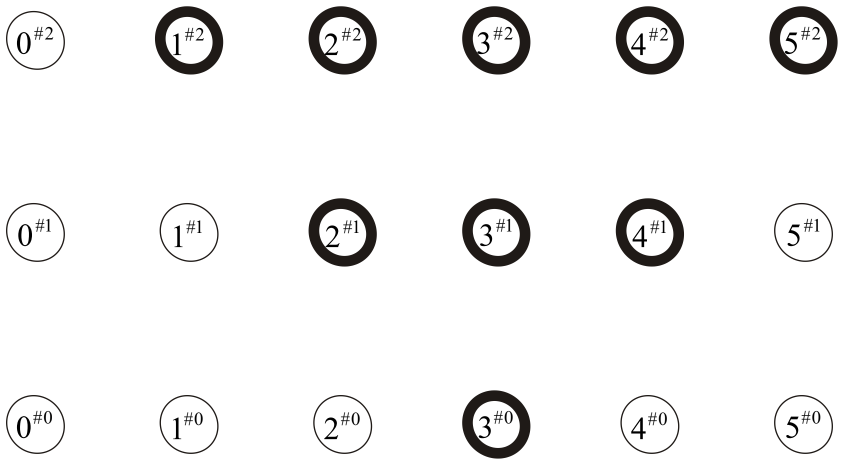
Ще дефинираме $<_s^\chi \subseteq Q^{ND,\epsilon} \times Q^{ND,\chi}$.

1) $\chi = \epsilon$
$i^{\#e} <_s^\epsilon j^{\#f} \overset{def}{\Leftrightarrow} f > e \,\&\, |j-i| \leq f-e$
2) $\chi = t$
$i^{\#e} <_s^t j^{\#f} \overset{def}{\Leftrightarrow} i^{\#e} <_s^\epsilon j^{\#f}$
$i^{\#e} <_s^t j_t^{\#f} \overset{def}{\Leftrightarrow} f > e \,\&\, |j+1-i| \leq f-e$
3) $\chi = ms$
$i^{\#e} <_s^{ms} j^{\#f} \overset{def}{\Leftrightarrow} i^{\#e} <_s^\epsilon j^{\#f}$
$i^{\#e} <_s^{ms} j_s^{\#f} \overset{def}{\Leftrightarrow} i^{\#e} <_s^\epsilon j^{\#f}$

Релацията $<_s^\chi$ е дефинирана по такъв начин, че (*) $\pi_1 <_s^\chi \pi_2 \Rightarrow L(\pi_1) \supset L(\pi_2)$. Затова, когато детерминизираме $A_n^{ND,\chi}$, за всяко състояние A на получения детерминиран автомат ще бъде изпънено, че (*) $\forall q_1, q_2 \in A(q_1 \not<_s^\chi q_2)$. Като имаме пред вид, че $q' \in \delta_e^{D,\chi}(q,x) \Rightarrow < q,x,q' > \in \delta_n^{ND,\chi^*}$, че $q_1 \leq_s^\chi q_2 \,\&\, < q_2, x, q_2' > \in \delta_n^{ND,\chi^*} \Rightarrow \exists q_1' \in \delta_e^{D,\chi}(q_1,x)(q_1' \leq_s^\chi q_2')$ и (*), можем да дефинираме функцията на преходите $\delta_n^{D,\chi}$ за детерминирания автомат: $\delta_n^{D,\chi}(A,x) = \bigsqcup_{q\in A} \delta_e^{D,\chi}(q,x)$, където $\bigsqcup B$ премахва от $\bigcup B$ всяко π, за което в $\bigcup B$ съществува q, така че $q <_s^\chi \pi$.

Забележка $\pi_1 <_s^\chi \pi_2$ съответства на π_1 *subsumes* π_2 от [SMFSCLA]. Не дефинираме случай, в който $i_t^{\#e} <_s^\chi \pi$ или $i_s^{\#e} <_s^\chi \pi$, защото при всяка "достатъчно хубава"дефиниция на $i_t^{\#e} <_s^\chi \pi$ и $i_s^{\#e} <_s^\chi \pi$ ще е вярно, че $i_t^{\#e} <_s^\chi \pi \Rightarrow i+1^{\#e} <_s^\chi \pi$ и $i_s^{\#e} <_s^\chi \pi \Rightarrow i^{\#e} <_s^\chi \pi$. Като се има пред вид, че $i_t^{\#e} \in \delta_e^{D,t}(A,x) \Rightarrow i+1^{\#e} \in \delta_e^{D,t}(A,x)$, $i_s^{\#e} \in \delta_e^{D,t}(A,x) \Rightarrow i^{\#e} \in \delta_e^{D,t}(A,x)$ и дефиницията на $\bigsqcup$, лесно се вижда, че при всяка "достатъчно хубава"дефиниция на $i_t^{\#e} <_s^\chi \pi$ и $i_s^{\#e} <_s^\chi \pi$ автоматите $A_n^{D,\chi}$ и $A_n^{\forall,\chi}$ няма да се променят.

На фиг. 4 е изобразено множеството $\{\pi | \pi \in Q_2^{ND,\epsilon} \,\&\, 3^{\#0} \leq_s^\epsilon \pi\}$, когато $A_2^{ND,\epsilon}(w_1 w_2 ... w_5) = < \Sigma, Q_2^{ND,\epsilon}, I^{ND,\epsilon}, F_2^{ND,\epsilon^*}, \delta_2^{ND,\epsilon} >$.



Фиг. 4 $A_2^{ND,\epsilon}(w_1w_2...w_5) =< \Sigma, Q_2^{ND,\epsilon}, I^{ND,\epsilon}, F_2^{ND,\epsilon^*}, \delta_2^{ND,\epsilon} >$, изобразено е множеството $\{\pi|\pi \in Q_2^{ND,\epsilon} \,\&\, 3^{\#0} \leq_s^\epsilon \pi\}$

Твърдение 10 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Тогава $\leq_s^\chi$ е частична наредба.

Доказателство

1) Рефлексивност

Нека $\pi \in Q^{ND,\epsilon}$. Следователно $\pi = \pi$ и $\pi \leq_s^\chi \pi$.

2) Антисиметричност

Нека $\pi_1 \leq_s^\chi \pi_2 \& \pi_2 \leq_s^\chi \pi_1$. Допускаме, че $\pi_1 \neq \pi_2$. Следователно $\pi_1 <_s^\chi \pi_2$ и $\pi_2 <_s^\chi \pi_1$. От дефиницията на $<_s^\chi$ следва, че $\pi_1 \in Q^{ND,\epsilon}$ и $\pi_2 \in Q^{ND,\epsilon}$. Нека $\pi_1 = i^{\#e}$ и $\pi_2 = j^{\#f}$. Следователно $f < e \,\&\, e < f$. Противоречие. Следователно $\pi_1 = \pi_2$.

3) Транзитивност

Нека $\pi_1 \leq_s^\chi \pi_2 \,\&\, \pi_2 \leq_s^\chi \pi_3$.

3.1) $\pi_1 = \pi_2$ или $\pi_2 = \pi_3$

Следователно $\pi_1 \leq_s^\chi \pi_3$.

3.2) $\pi_1 <_s^\chi \pi_2$ и $\pi_2 <_s^\chi \pi_3$

От дефиницията на $<_s^\chi$ следва, че $\pi_1 \in Q^{ND,\epsilon}$ и $\pi_2 \in Q^{ND,\epsilon}$. Нека $\pi_3 = i^{\#e}$ и $\pi_2 = j^{\#f}$.

3.2.1) $\pi_3 = k^{\#t}$ или $\pi_3 = k_s^{\#t}$

$i^{\#e} <_s^\chi j^{\#f} <_s^\chi k_{(s)}^{\#t}$. Следователно $e < f < t$, $|i-j| \leq f-e$ и $|j-k| \leq t-f$. Следователно $|i-j|+|j-k| \leq (f-e)+(t-f)$. Следователно $|i-j+j-k| \leq t-e$. Следователно $|i-k| \leq t-e$. Следователно $i^{\#e} <_s^\chi k_{(s)}^{\#t}$ и $\pi_1 <_s^\chi \pi_3$.

3.2.2) $\pi_3 = k_t^{\#t}$

$i^{\#e} <_s^t j^{\#f} <_s^t k_t^{\#t}$. Следователно $e < f < t$, $|i-j| \leq f-e$ и $|k+1-j| \leq t-f$. Следователно $|j-i| + |k+1-j| \leq (f-e)+(t-f)$. Следователно $|k+1-i| \leq t-e$. Следователно $i^{\#e} <_s^t k_t^{\#t}$ и $\pi_1 <_s^\chi \pi_3$.

Дефиниция 12 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$ и $n \in N$.
Нека $A_n^{ND,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi^*}, \delta_n^{ND,\chi} >$.

$\bigsqcup : P(P(Q_n^{ND,\chi})) \rightarrow P(Q_n^{ND,\chi})$

$\bigsqcup A \stackrel{def}{=} \{\pi | \pi \in \bigcup A \,\&\, \neg\exists\pi' \in \bigcup A(\pi' <_s^\chi \pi)\}$

$\bigsqcup$ се дефинира в [SMFSCLA].

Твърдение 11 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$, $|w| = p$ и $n \in N$. Тогава
$L(A_n^{ND,\chi}(w)) = L(< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi}, \delta_n^{ND,\chi} >)$, като $F_n^{ND,\chi} = \{i^{\#e} | p - i \leq n - e\}$.

Доказателство Нека $i^{\#e}$ е такова, че $p - i \leq n - e$. От дефиницията на $\delta_n^{ND,\chi}$ следва, че

$< i^{\#e}, \epsilon, i + 1^{\#e+1} > \in \delta_n^{ND,\chi}$,

$< i + 1^{\#e+1}, \epsilon, i + 2^{\#e+2} > \in \delta_n^{ND,\chi}$,

...

$< p - 1^{\#e+p-i-1}, \epsilon, p^{\#e+p-i} > \in \delta_n^{ND,\chi}$.

Следователно $< i^{\#e}, \epsilon, p^{\#e+p-i} > \in \delta_n^{ND,\chi^*}$.

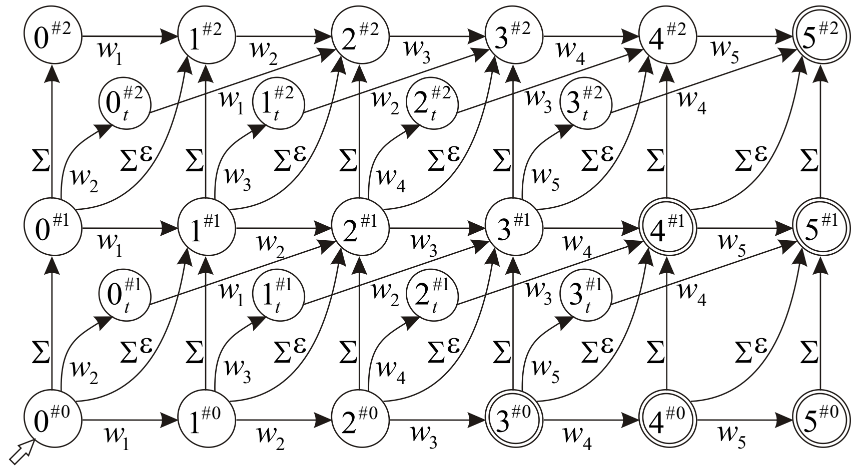
Следователно $L(A_n^{ND,\chi}(w)) \supseteq L(< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi}, \delta_n^{ND,\chi} >)$.

$F_n^{ND,\chi^*} \subseteq F_n^{ND,\chi}$.

Следователно $L(A_n^{ND,\chi}(w)) \subseteq L(< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi}, \delta_n^{ND,\chi} >)$.

Следователно $L(A_n^{ND,\chi}(w)) = L(< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi}, \delta_n^{ND,\chi} >)$.

Оттук нататък ще считаме, че $A_n^{ND,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi}, \delta_n^{ND,\chi} >$.



Фиг. 5 $A_2^{ND,t}(w_1 w_2 ... w_5) =< \Sigma, Q_2^{ND,t}, I^{ND,t}, F_2^{ND,t}, \delta_2^{ND,t} >$

Дефиниция 13 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$ и $n \in N$.
Нека $A_n^{ND,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi}, \delta_n^{ND,\chi} >$.
Нека $M \subseteq Q_n^{ND,\chi}$ и $\pi \in Q_n^{ND,\epsilon}$. M ще наричаме множество с основно

състояние π, ако $\forall \pi' \in M(\pi \leq_s^\chi \pi')$ & $\forall \pi_1, \pi_2 \in M(\pi_1 \not<_s^\chi \pi_2)$.

Дефиниция 14 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$ и $n \in N$. Ще дефинираме детерминирания краен автомат $A_n^{D,\chi}(w)$.

$$A_n^{D,\chi}(w) \stackrel{def}{=} < \Sigma, Q_n^{D,\chi}, I^{D,\chi}, F_n^{D,\chi}, \delta_n^{D,\chi} >$$

Нека $|w| = p$ и $w = w_1 w_2 ... w_p$.
$\rho : [0, p] \to P(P(Q_n^{ND,\chi}))$
$\rho(i) \stackrel{def}{=} \{M | M$ е множество с основно състояние $i^{\#0}\}$

$$Q_n^{D,\chi} \stackrel{def}{=} (\bigcup_{0 \leq i \leq p} \rho(i)) \backslash \{\phi\}$$

$I^{D,\chi} \stackrel{def}{=} \{0^{\#0}\}$
$F_n^{D,\chi} \stackrel{def}{=} \{M | M \in Q_n^{D,\chi}$ & $\exists \pi \in M(\pi \in F_n^{ND,\chi})\}$
$\delta_n^{D,\chi} : Q_n^{D,\chi} \times \Sigma \not\to Q_n^{D,\chi}$

$$\delta_n^{D,\chi}(M, x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \bigsqcup_{\pi \in M} \delta_e^{D,\chi}(\pi, x), & \text{ако} \bigcup_{\pi \in M} \delta_e^{D,\chi}(\pi, x) \neq \phi \\ \neg ! & \text{иначе} \end{cases}$$

Крайните автомати $A_n^{D,\epsilon}(w)$, $A_n^{D,t}(w)$ и $A_n^{D,ms}(w)$ са дефинирани в [SMF-SCLA].

Коректност на дефиницията
1) Ще докажем, че

$$\text{M} \in \rho(i) \,\&\, 0 \leq i \leq p-1 \,\&\, x \in \Sigma \Rightarrow \forall \pi \in M(\delta_e^{D,\chi}(\pi, x) \in \rho(i+1))$$

Нека $M \in \rho(i)$, $0 \leq i \leq p-1$ и $x \in \Sigma$. Нека $\pi \in M$. Ще докажем, че $\delta_e^{D,\chi}(\pi, x) \in \rho(i+1)$.

1.1) $\chi = \epsilon$

Нека $\pi = j^{\#f}$. Следователно $i^{\#0} \leq_s^\epsilon j^{\#f}$ и $|j - i| \leq f$.

1.1.1) $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x) = \{j + 1^{\#f}\}$

$|j + 1 - (i+1)| \leq f$. Следователно $i + 1^{\#0} \leq_s^\epsilon j + 1^{\#f}$. Следователно $\delta_n^{D,\epsilon}(\pi, x) \in \rho(i+1)$.

1.1.2) $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}, j + 1^{\#f+1}, j + z^{\#f+z-1}\}$ за някое $z > 1$

Очевидно $\forall \pi_1, \pi_2 \in \delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x)(\pi_1 \not<_s^\epsilon \pi_2)$. От $|j - i| \leq f$ следва, че $|j - (i+1)| \leq f + 1$, $|j + 1 - (i+1)| \leq f + 1$ и $|j + z - (i+1)| \leq f + z - 1$. Следователно $i + 1^{\#0} \leq_s^\epsilon j^{\#f+1}$, $i + 1^{\#0} \leq_s^\epsilon j + 1^{\#f+1}$ и $i + 1^{\#0} \leq_s^\epsilon j + z^{\#f+z-1}$. Следователно $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x) \in \rho(i+1)$.

1.1.3) $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}, j+1^{\#f+1}\}$ или $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}\}$ или $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x) = \phi$

Очевидно $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x) \in \rho(i+1)$.

1.2) $\chi = t$

1.2.1) $\pi = j^{\#f}$

Следователно $i^{\#0} \leq_s^t j^{\#f}$ и $|j-i| \leq f$.

1.2.1.1) $\delta_e^{D,t}(\pi, x) = \{j + 1^{\#f}\}$

$|j + 1 - (i+1)| \leq f$. Следователно $i + 1^{\#0} \leq_s^t j + 1^{\#f}$. Следователно $\delta_e^{D,t}(\pi, x) \in \rho(i+1)$.

1.2.1.2) $\delta_e^{D,t}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}, j+1^{\#f+1}, j+2^{\#f+1}, j_t^{\#f+1}\}$

Следователно $\forall \pi' \in \delta_e^{D,t}(\pi, x)(\pi' = k_{(t)}^{\#l} \Rightarrow l = f+1)$. Следователно $\forall \pi_1, \pi_2 \in \delta_e^{D,t}(\pi, x)(\pi_1 \not<_s^t \pi_2)$. От $|j-i| \leq f$ следва, че $|j-(i+1)| \leq f+1$, $|j+1-(i+1)| \leq f+1$, $|j+2-(i+1)| \leq f+1$ и $|j+1-i| \leq f+1$. Следователно $i+1^{\#0} \leq_s^t j^{\#f+1}$, $i+1^{\#0} \leq_s^t j+1^{\#f+1}$, $i+1^{\#0} \leq_s^t j+2^{\#f+1}$ и $i+1^{\#0} \leq_s^t j_t^{\#f+1}$.

Следователно $\delta_e^{D,t}(\pi, x) \in \rho(i+1)$.

1.2.1.3) $\delta_e^{D,t}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}, j+1^{\#f+1}, j+z^{\#f+z-1}\}$ за някое $z > 2$

Очевидно $\forall \pi_1, \pi_2 \in \delta_e^{D,t}(\pi, x)(\pi_1 \not<_s^t \pi_2)$. От $|j-i| \leq f$ следва, че $|j+z-(i+1)| \leq f+z-1$. Следователно $\delta_e^{D,t}(\pi, x) \in \rho(i+1)$.

1.2.1.4) $\delta_e^{D,t}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}, j+1^{\#f+1}\}$ или $\delta_e^{D,t}(\pi, x) = \phi$

Очевидно $\delta_e^{D,t}(\pi, x) \in \rho(i+1)$.

1.2.2) $\pi = j_t^{\#f}$.

Следователно $i^{\#0} \leq_s^t j_t^{\#f}$ и $|j+1-i| \leq f$.

1.2.2.1) $\delta_e^{D,t}(\pi, x) = \{j + 2^{\#f}\}$

$|j + 2 - (i+1)| \leq f$. Следователно $i + 1^{\#0} \leq_s^t j + 2^{\#f}$. Следователно $\delta_e^{D,t}(\pi, x) \in \rho(i+1)$.

1.2.2.2) $\delta_e^{D,t}(\pi, x) = \phi$

Очевидно $\phi \in \rho(i+1)$.

1.3) $\chi = ms$

1.3.1) $\pi = j^{\#f}$

Следователно $i^{\#0} \leq_s^{ms} j^{\#f}$ и $|j-i| \leq f$.

1.3.1.1) $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) = \{j + 1^{\#f}\}$

$|j + 1 - (i+1)| \leq f$ Следователно $i + 1^{\#0} \leq_s^{ms} j + 1^{\#f}$. Следователно $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) \in \rho(i+1)$.

1.3.1.2) $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}, j_s^{\#f+1}, j+1^{\#f+1}, j+2^{\#f+1}\}$

Следователно $\forall \pi' \in \delta_e^{D,ms}(\pi, x)(\pi' = k_{(s)}^{\#l} \Rightarrow l = f+1)$. Следователно $\forall \pi_1, \pi_2 \in \delta_e^{D,ms}(\pi, x)(\pi_1 \not<_s^{ms} \pi_2)$. От $|j-i| \leq f$ следва, че $|j-(i+1)| \leq f+1$, $|j+1-(i+1)| \leq f+1$ и $|j+2-(i+1)| \leq f+1$. Следователно $i+1^{\#0} \leq_s^{ms} j_{(s)}^{\#f+1}$, $i+1^{\#0} \leq_s^{ms} j+1^{\#f+1}$ и $i+1^{\#0} \leq_s^{ms} j+2^{\#f+1}$. Следователно $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) \in \rho(i+1)$.

1.3.1.3) $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}, j_s^{\#f+1}, j+1^{\#f+1}\}$ или $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}\}$ или $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) = \phi$

Очевидно $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) \in \rho(i+1)$.

1.3.2) $\pi = j_s^{\#f}$.

Следователно $i^{\#0} \leq_s^{ms} j_s^{\#f}$ и $|j-i| \leq f$. $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) = \{j + 1^{\#f}\}$. $|j+1-(i+1)| \leq f$. Следователно $i + 1^{\#0} \leq_s^{ms} j + 1^{\#f}$. Следователно $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) \in \rho(i+1)$.

2) Ще докажем, че

M е множество с основно състояние $p^{\#e}$ & $0 \leq e \leq n-1$ & $x \in \Sigma \Rightarrow$
$\forall \pi \in M(\delta_e^{D,\chi}(\pi, x)$ е множество с основно състояние $p^{\#e+1})$

Нека M е множество с основно състояние $p^{\#e}$, $0 \leq e \leq n-1$ и $x \in \Sigma$. Нека $\pi \in M$. Ще докажем, че $\delta_e^{D,\chi}(\pi, x)$ е множество с основно състояние $p^{\#e+1}$.

2.1) $\chi = \epsilon$

Нека $\pi = j^{\#f}$. Следователно $p^{\#e} \leq_s^{\epsilon} j^{\#f}$, $|j-p| \leq f-e$ и $f \geq e$.

2.1.1) $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x) = \{j+1^{\#f}\}$

От $|j-p| \leq f-e$ следва, че $|j+1-p| \leq f-(e+1)$. Следователно $p^{\#e+1} \leq_s^{\epsilon} j+1^{\#f}$. Следователно $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x)$ е множество с основно състояние $p^{\#e+1}$.

2.1.2) $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}, j+1^{\#f+1}, j+z^{\#f+z-1}\}$ за някое $z > 1$

Очевидно $\forall \pi_1, \pi_2 \in \delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x)(\pi_1 \not<_s^{\epsilon} \pi_2)$. От $|j-p| \leq f-e$ следва, че $|j-p| \leq f+1-(e+1)$, $|j+1-p| \leq f+1-(e+1)$ и $|j+z-p| \leq f+z-1-(e+1)$. Следователно $p^{\#e+1} \leq_s^{\epsilon} j^{\#f+1}$, $p^{\#e+1} \leq_s^{\epsilon} j+1^{\#f+1}$ и $p^{\#e+1} \leq_s^{\epsilon} j+z^{\#f+z-1}$. Следователно $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x)$ е множество с основно състояние $p^{\#e+1}$.

2.1.3) $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}, j+1^{\#f+1}\}$ или $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}\}$ или $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x) = \phi$

Очевидно $\delta_e^{D,\epsilon}(\pi, x)$ е множество с основно състояние $p^{\#e+1}$.

2.2) $\chi = t$

2.2.1) $\pi = j^{\#f}$

Следователно $p^{\#e} \leq_s^t j^{\#f}$, $|j-p| \leq f-e$ и $f \geq e$.

2.2.1.1) $\delta_e^{D,t}(\pi, x) = \{j+1^{\#f}\}$

От $|j-p| \leq f-e$ следва, че $|j+1-p| \leq f-(e+1)$. Следователно $p^{\#e+1} \leq_s^t j+1^{\#f}$. Следователно $\delta_e^{D,t}(\pi, x)$ е множество с основно състояние $p^{\#e+1}$.

2.2.1.2) $\delta_e^{D,t}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}, j+1^{\#f+1}, j+2^{\#f+1}, j_t^{\#f+1}\}$

Следователно $\forall \pi' \in \delta_e^{D,t}(\pi, x)(\pi' = k_{(t)}^{\#l} \Rightarrow l = f+1)$. Следователно $\forall \pi_1, \pi_2 \in \delta_e^{D,t}(\pi, x)(\pi_1 \not<_s^t \pi_2)$. От $|j-p| \leq f-e$ следва, че $|j-p| \leq f+1-(e+1)$, $|j+1-p| \leq f+1-(e+1)$, $|j+2-p| \leq f+1-(e+1)$ и $|j+1-p| \leq f+1-(e+1)$. Следователно $p^{\#e+1} \leq_s^t j^{\#f+1}$, $p^{\#e+1} \leq_s^t j+1^{\#f+1}$,
$p^{\#e+1} \leq_s^t j+2^{\#f+1}$ и $p^{\#e+1} \leq_s^t j_t^{\#f+1}$.
Следователно $\delta_e^{D,t}(\pi, x)$ е множество с основно състояние $p^{\#e+1}$.

2.2.1.3) $\delta_e^{D,t}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}, j+1^{\#f+1}, j+z^{\#f+z-1}\}$ за някое $z > 2$

Очевидно $\forall \pi_1, \pi_2 \in \delta_e^{D,t}(\pi, x)(\pi_1 \not<_s^t \pi_2)$. От $|j-p| \leq f-e$ следва, че $|j+z-p| \leq f+z-1-(e+1)$.
Следователно $\delta_e^{D,t}(\pi, x)$ е множество с основно състояние $p^{\#e+1}$.

2.2.1.4) $\delta_e^{D,t}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}, j+1^{\#f+1}\}$ или $\delta_e^{D,t}(\pi, x) = \phi$

Очевидно $\delta_e^{D,t}(\pi, x)$ е множество с основно състояние $p^{\#e+1}$.

2.2.2) $\pi = j_t^{\#f}$.

Следователно $p^{\#e} \leq_s^t j_t^{\#f}$, $|j+1-p| \leq f-e$ и $f \geq e$.

2.2.2.1) $\delta_e^{D,t}(\pi, x) = \{j+2^{\#f}\}$

От $|j+1-p| \leq f-e$ следва, че $|j+2-p| \leq f-(e+1)$. Следователно $p^{\#e+1} \leq_s^t j+2^{\#f}$.
Следователно $\delta_e^{D,t}(\pi, x)$ е множество с основно състояние $p^{\#e+1}$.

2.2.2.2) $\delta_e^{D,t}(\pi, x) = \phi$

Очевидно ϕ е множество с основно състояние $p^{\#e+1}$.

2.3) $\chi = ms$

2.3.1) $\pi = j^{\#f}$

Следователно $p^{\#e} \leq_s^{ms} j^{\#f}$ и $|j-p| \leq f-e$ и $f \geq e$.

2.3.1.1) $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) = \{j+1^{\#f}\}$

От $|j-p| \leq f-e$ следва, че $|j+1-p| \leq f-(e+1)$. Следователно $p^{\#e+1} \leq_s^{ms} j+1^{\#f}$. Следователно $\delta_e^{D,ms}(\pi, x)$ е множество с основно състояние $p^{\#e+1}$.

2.3.1.2) $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}, j_s^{\#f+1}, j+1^{\#f+1}, j+2^{\#f+1}\}$

Следователно $\forall \pi' \in \delta_e^{D,ms}(\pi, x)(\pi' = k_{(s)}^{\#l} \Rightarrow l = f+1)$. Следователно $\forall \pi_1, \pi_2 \in \delta_e^{D,ms}(\pi, x)(\pi_1 \not<_s^{ms} \pi_2)$. От $|j-p| \leq f-e$ следва, че $|j-p| \leq f+1-(e+1)$, $|j+1-p| \leq f+1-(e+1)$ и $|j+2-p| \leq f+1-(e+1)$. Следователно $p^{\#e+1} \leq_s^{ms} j_{(s)}^{\#f+1}$, $p^{\#e+1} \leq_s^{ms} j+1^{\#f+1}$ и $p^{\#e+1} \leq_s^{ms} j+2^{\#f+1}$. Следователно $\delta_e^{D,ms}(\pi, x)$ е множество с основно състояние $p^{\#e+1}$.

2.3.1.3) $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}, j_s^{\#f+1}, j+1^{\#f+1}\}$ или $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) = \{j^{\#f+1}\}$ или $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) = \phi$

Очевидно $\delta_e^{D,ms}(\pi, x)$ е множество с основно състояние $p^{\#e+1}$.

2.3.2) $\pi = j_s^{\#f}$

Следователно $p^{\#e} \leq_s^{ms} j_s^{\#f}$, $|j-p| \leq f-e$ и $f \geq e$ и $\delta_e^{D,ms}(\pi, x) = \{j+1^{\#f}\}$. От $|j-p| \leq f-e$ следва, че $|j+1-p| \leq f-(e+1)$. Следователно $p^{\#e+1} \leq_s^{ms} j+1^{\#f}$.

Следователно $\delta_e^{D,ms}(\pi, x)$ е множество с основно състояние $p^{\#e+1}$.

3) Ще докажем, че

M е множество с основно състояние $p^{\#n} \Rightarrow \delta_e^{D,\chi}(M, x) = \phi$.

Нека M е множество с основно състояние $p^{\#n}$. Следователно $M = \phi$ или $M = \{p^{\#n}\}$. Следователно $\delta_e^{D,\chi}(M, x) = \phi$.

4) Ще докажем, че

$A \subseteq \{M | M$ е множество с основно състояние $i^{\#e}\} \Rightarrow$

$\bigsqcup A$ е множество с основно състояние $i^{\#e}$.

Нека $A \subseteq \{M | M$ е множество с основно състояние $i^{\#e}\}$.

От дефиницията на $\bigsqcup$ следва, че $\bigsqcup A \subseteq \bigcup A$. Следователно $\forall \pi \in \bigsqcup A(i^{\#e} \leq_s^{\chi} \pi)$. От дефиницията на $\bigsqcup$ следва, че $\forall \pi_1, \pi_2 \in \bigsqcup A(\pi_1 \not<_s^{\chi} \pi_2)$. Следователно $\bigsqcup A$ е множество с основно състояние $i^{\#e}$.

От 1), 2), 3) и 4) следва, че $\delta_n^{D,\chi}$ е коректно дефинирана функция. Следователно $A_n^{D,\chi}(w)$ е коректно дефиниран детерминиран краен автомат.

Твърденията, от които следва коректността на $\delta_n^{D,\epsilon}$, $\delta_n^{D,t}$ и $\delta_n^{D,ms}$, са дефинирани в [SMFSCLA].

Твърдение 12 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$, $|w| = p$ и $n \in N$. Нека $A_n^{ND,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi}, \delta_n^{ND,\chi} >$. Тогава $i^{\#e} \in F_n^{ND,\chi} \& \pi \leq_s^{\chi} i^{\#e} \Rightarrow \pi \in F_n^{ND,\chi}$.

Доказателство Нека $i^{\#e} \in F_n^{ND,\chi}$ и $\pi = j^{\#f} \leq_s^{\chi} i^{\#e}$. Следователно $|j-i| \leq e-f$ и $p-i \leq n-e$. Следователно $p-j \leq n-f-(e-f-(i-j))$. Следователно $p-j \leq n-f$. Следователно $\pi \in F_n^{ND,\chi}$.

Твърдение 13 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$, $|w| = p$ и $n \in N$. Нека $A_n^{ND,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi}, \delta_n^{ND,\chi} >$. Нека $x \in \Sigma$, $s \in N$ и

$\xi_0 = j^{\#f}_{(s)}$. Нека $\xi_1, \xi_2 ... \xi_s, \eta'_2 \in Q^{ND,\chi}_n$. Тогава

$j < p$ &

$< \xi_0, \epsilon, \xi_1 >\in \delta^{ND,\chi}_n$ & $< \xi_1, \epsilon, \xi_2 >\in \delta^{ND,\chi}_n$ & ... & $< \xi_{s-1}, \epsilon, \xi_s >\in \delta^{ND,\chi}_n$ &

$< \xi_s, x, \eta'_2 >\in \delta^{ND,\chi}_n \Rightarrow$

$j + 1^{\#f} \leq^{\chi}_s \eta'_2$.

Доказателство

Нека $j < p$, $< j^{\#f}_{(s)}, \epsilon, \xi_1 >\in \delta^{ND,\chi}_n$, $< \xi_1, \epsilon, \xi_2 >\in \delta^{ND,\chi}_n$,..., $< \xi_{s-1}, \epsilon, \xi_s >\in \delta^{ND,\chi}_n$ и $< \xi_s, x, \eta'_2 >\in \delta^{ND,\chi}_n$

1.1) $\chi = \epsilon$

$\xi_0 = j^{\#f}$

От дефиницията на $\delta^{ND,\epsilon}_n$ следва, че $\eta'_2 \in \{j+s^{\#f+1+s}, j+1+s^{\#f+1+s}, j+1+s^{\#f+s}\}$. Следователно $j + 1^{\#f} \leq^{\epsilon}_s \eta'_2$.

1.2) $\chi = t$

$\xi_0 = j^{\#f}$

От дефиницията на $\delta^{ND,t}_n$ следва, че $\eta'_2 \in \{j+s^{\#f+1+s}, j+1+s^{\#f+1+s}, j+1+s^{\#f+s}, j+s^{\#f+1+s}_t\}$. Следователно $j + 1^{\#f} \leq^{t}_s \eta'_2$

1.3) $\chi = ms$

1.3.1) $\xi_0 = j^{\#f}$

От дефиницията на $\delta^{ND,ms}_n$ следва, че $\eta'_2 \in \{j+s^{\#f+1+s}, j+1+s^{\#f+1+s}, j+1+s^{\#f+s}, j+s^{\#f+1+s}_s, j+2+s^{\#f+s}\}$. Следователно $j + 1^{\#f} \leq^{ms}_s \eta'_2$.

1.3.2) $\xi_0 = j^{\#f}_s$

От дефиницията на $\delta^{ND,ms}_n$ следва, че $s = 0$ и $\eta'_2 = j+1^{\#f}$. Следователно $j + 1^{\#f} \leq^{ms}_s \eta'_2$.

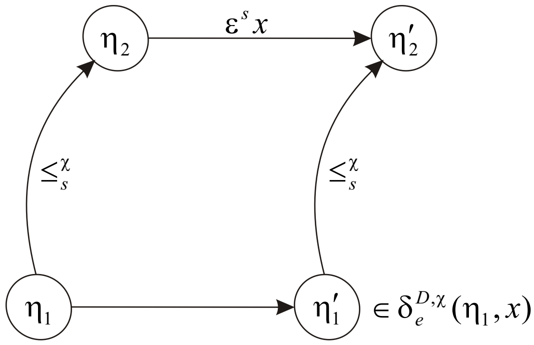
Твърдение 14 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$ и $n \in N$.
Нека $A^{ND,\chi}_n(w) =< \Sigma, Q^{ND,\chi}_n, I^{ND,\chi}, F^{ND,\chi}_n, \delta^{ND,\chi}_n >$.
Нека $\eta_1, \eta_2 \in Q^{ND,\chi}_n, x \in \Sigma, s \in N$ и $\xi_0 = \eta_2$. Нека $\xi_1, \xi_2 ... \xi_s, \eta'_2 \in Q^{ND,\chi}_n$. Тогава

$\eta_1 \leq^{\chi}_s \eta_2$ &

$< \xi_0, \epsilon, \xi_1 >\in \delta^{ND,\chi}_n$ & $< \xi_1, \epsilon, \xi_2 >\in \delta^{ND,\chi}_n$ & ... & $< \xi_{s-1}, \epsilon, \xi_s >\in \delta^{ND,\chi}_n$ &

$< \xi_s, x, \eta'_2 >\in \delta^{ND,\chi}_n \Rightarrow$

$\exists \eta'_1 \in \delta^{D,\chi}_e(\eta_1, x)(\eta'_1 \leq^{\chi}_s \eta'_2)$.



Фиг. 6

Забележка Като използваме *Твърдение* 14, лесно можем да докажем, че $\eta_1 \leq_s^\chi \eta_2 \Rightarrow L(\eta_1) \supset L(\eta_2)$.

Доказателство Нека $|w| = p$ и $\eta_1 = i^{\#e}$.

1) $\chi = \epsilon$

Нека $\eta_2 = j^{\#f}$.

1.1) $\delta_e^{D,\epsilon}(i^{\#e}, x) = \{i + 1^{\#e}\}$

1.1.1) $j < p$

От *Твърдение* 13 следва, че $j + 1^{\#f} \leq_s^\epsilon \eta_2'$. От $i^{\#e} \leq_s^\epsilon j^{\#f}$ следва, че $i + 1^{\#e} \leq_s^\epsilon j + 1^{\#f}$. Следователно $i + 1^{\#e} \leq_s^\epsilon \eta_2'$.

1.1.2) $j = p$

От дефиницията на $\delta_n^{ND,\epsilon}$ следва, че $f < n$, $\eta_2 = p^{\#f}$ и $\eta_2' = p^{\#f+1}$. Следователно $|p - i| \leq f - e$ и $f \geq e$. Следователно $|p - (i+1)| \leq (f+1) - e$. Следователно $i + 1^{\#e} \leq_s^\epsilon p^{\#f+1} = \eta_2'$.

1.2) $\delta_e^{D,\epsilon}(i^{\#e}, x) = \{i^{\#e+1}, i + 1^{\#e+1}, i + z^{\#e+z-1}\}$ и $0 < \beta(x, w_[i^{\#e}])$ и $z = \mu z'[\beta(x, w_[i^{\#e}])_{z'} = 1]$

1.2.1) $j < p$

От *Твърдение* 13 следва, че $j + 1^{\#f} \leq_s^\epsilon \eta_2'$. От $i^{\#e} \leq_s^\epsilon j^{\#f}$ следва, че $i + 1^{\#e} \leq_s^\epsilon j + 1^{\#f}$. Следователно $i + 1^{\#e} \leq_s^\epsilon \eta_2$. От $0 < \beta(x, w_[i^{\#e}])$ следва, че $i + 1^{\#e} \neq \eta_2'$. Следователно $i + 1^{\#e} <_s^\epsilon \eta_2'$.

От дефиницията на $\leq_s^\epsilon$ следва, че $\forall \gamma \in Q_n^{ND,\epsilon}(i + 1^{\#e} <_s^\epsilon \gamma \leq_s^\epsilon \eta_2' \& \neg\exists\pi(i + 1^{\#e} <_s^\epsilon \pi <_s^\epsilon \gamma) \Rightarrow \gamma \in \{i^{\#e+1}, i + 1^{\#e+1}, i + 2^{\#e+1}\})$.

1.2.1.1) $\exists \gamma \in Q_n^{ND,\epsilon}(i + 1^{\#e} <_s^\epsilon \gamma \leq_s^\epsilon \eta_2' \; \& \; \neg\exists\pi(i + 1^{\#e} <_s^\epsilon \pi <_s^\epsilon \gamma) \; \& \; \gamma \in \{i^{\#e+1}, i + 1^{\#e+1}\})$.

$\{i^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}\} \subset \delta_e^{D,\epsilon}(i^{\#e}, x)$. Следователно съществува $\gamma \in \delta_e^{D,\epsilon}(i^{\#e}, x)$, за което $\gamma \leq_s^\epsilon \eta_2'$.

1.2.1.2) $\forall \gamma \in Q_n^{ND,\epsilon}(i + 1 <_s^\epsilon \gamma \leq_s^\epsilon \eta_2' \; \& \; \neg\exists\pi(i + 1^{\#e} <_s^\epsilon \pi <_s^\epsilon \gamma) \Rightarrow \gamma \notin \{i^{\#e+1}, i + 1^{\#e+1}\})$.

Следователно $\forall \gamma \in Q_n^{ND,\epsilon}(i + 1 <_s^\epsilon \gamma \leq_s^\epsilon \eta_2' \; \& \; \neg\exists\pi(i + 1^{\#e} <_s^\epsilon \pi <_s^\epsilon \gamma) \Rightarrow \gamma = i + 2^{\#e+1})$. Следователно $\eta_2' = i + m^{e+m-1}$ за някое m, като $m > 1$ и $\beta(x, w_[i^{\#e}])_m = 1$. От $z = \mu z'[\beta(x, w_[i^{\#e}])_{z'} = 1]$ следва, че $z \leq m$. Следователно $i + z^{\#e+z-1} \leq_s^\epsilon \eta_2'$.

1.2.2) $j = p$

От дефиницията на $\delta_n^{ND,\epsilon}$ следва, че $f < n$, $\eta_2 = p^{\#f}$ и $\eta_2' = p^{\#f+1}$. От $i^{\#e} \leq_s^\epsilon p^{\#f}$ следва, че $i^{\#e+1} \leq_s^\epsilon p^{\#f+1}$.

1.3) $\delta_e^{D,\epsilon}(i^{\#e}, x) = \{i^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}\}$ и $\beta(x, w_[i^{\#e}]) = 0^k$ за някое $k > 0$.

Аналогично на 1.2) доказваме, че $\exists \eta_1' \in \delta_e^{D,\epsilon}(\eta_1, x)(\eta_1' \leq_s^\epsilon \eta_2')$.

1.4) $\delta_e^{D,\epsilon}(i^{\#e}, x) = \{i^{\#e+1}\}$ и $i = p$ и $e < n$.

1.4.1) $\eta_2 = p^{\#f}$ и $f < n$

Очевидно $i^{\#e+1} \leq_s^\epsilon p^{\#f+1} = \eta_2'$.

1.4.2) $\eta_1 <_s^\epsilon \eta_2$ и $\eta_2 = j^{\#f}$ и $j < p$

От *Твърдение* 13 следва, че $j + 1^{\#f} \leq_s^\epsilon \eta_2'$. От $p^{\#e} <_s^\epsilon j^{\#f}$ следва, че $|j - p| \leq f - e$ и $f > e$. Следователно $|j + 1 - p| \leq f - (e + 1)$. Следователно $p^{\#e+1} \leq_s^\epsilon j + 1^{\#f} \leq_s^\epsilon \eta_2'$.

1.5) $\delta_e^{D,\epsilon}(i^{\#e}, x) = \phi$

Очевидно $e = n$ и $\eta_1 = \eta_2$ и ($i = p$ или $0 = \beta(x, w_[i^{\#e}])$). Следователно $\neg\exists\eta_2'(< \xi_0, \epsilon, \xi_1 >\in \delta_n^{ND,\epsilon}$ & $< \xi_1, \epsilon, \xi_2 >\in \delta_n^{ND,\epsilon}$ & ... & $< \xi_{s-1}, \epsilon, \xi_s >\in \delta_n^{ND,\epsilon}$ & $< \xi_s, x, \eta_2' >$). Противоречие. (Този случай е невъзможен.)

2) $\chi = t$

2.1) $\eta_2 = j^{\#f}$

2.1.1) $\delta_e^{D,t}(i^{\#e}, x) = \{i + 1^{\#e}\}$

2.1.1.1) $j < p$

От *Твърдение* 13 следва, че $j + 1^{\#f} \leq_s^t \eta_2'$. От $i^{\#e} \leq_s^t j^{\#f}$ следва, че $i + 1^{\#e} \leq_s^t j + 1^{\#f}$. Следователно $i + 1^{\#e} \leq_s^t \eta_2'$.

2.1.1.2) $j = p$

От дефиницията на $\delta_n^{ND,t}$ следва, че $f < n$, $\eta_2 = p^{\#f}$ и $\eta_2' = p^{\#f+1}$. Следователно $|p - i| \leq f - e$ и $f \geq e$. Следователно $|p - (i + 1)| \leq (f + 1) - e$. Следователно $i + 1^{\#e} \leq_s^t p^{\#f+1} = \eta_2'$.

2.1.2) $\delta_e^{D,ms}(i^{\#e}, x) = \{i^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}, i+2^{\#e+1}, i_t^{\#e+1}\}$ и $01 < \beta(x, w_[i^{\#e}])$

2.1.2.1) $j < p$

От *Твърдение* 13 следва, че $j + 1^{\#f} \leq_s^t \eta_2'$. От $i^{\#e} \leq_s^t j^{\#f}$ следва, че $i+1^{\#e} \leq_s^t j+1^{\#f}$. От $01 < \beta(x, w_[i^{\#e}])$ следва, че $\eta_2' \neq i+1^{\#f}$. Следователно $i+1^{\#e} <_s^t \eta_2'$. Нека $\eta_1' \in Q_n^{ND,t}$ е такова, че $i+1 <_s^t \eta_1' \leq_s^t \eta_2'$ и $\neg\exists\pi(i+1^{\#e} <_s^t \pi <_s^t \eta_1')$ (очевидно такова η_1' съществува). От дефиницията на $<_s^t$ следва, че $\eta_1' \in \{i^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}, i+2^{\#e+1}, i_t^{\#e+1}\}$ ($\eta_1' \notin \{i-2_t^{\#e+1}, i-1_t^{\#e+1}\}$, защото в противен случай $s = 0$, $\eta_2 \in \{i - 2^{\#e}, i - 1^{\#e}\}$, $\eta_1 \not\leq_s^t \eta_2$, противоречие).

2.1.2.2) $j = p$

От дефиницията на $\delta_n^{ND,t}$ следва, че $f < n$, $\eta_2 = p^{\#f}$ и $\eta_2' = p^{\#f+1}$. От $i^{\#e} \leq_s^t p^{\#f}$ следва, че $i^{\#e+1} \leq_s^t p^{\#f+1}$.

2.1.3) $\delta_e^{D,t}(i^{\#e}, x) = \{i^{\#e+1}, i + 1^{\#e+1}, i + z^{\#e+z-1}\}$ и $00 < \beta(x, w_[i^{\#e}])$ и $z = \mu z'[\beta(x, w_[i^{\#e}])_{z'} = 1]$

Аналогично на 1.2) доказваме, че $\exists\eta_1' \in \delta_e^{D,t}(\eta_1, x)(\eta_1' \leq_s^t \eta_2')$.

2.1.4) $\delta_e^{D,t}(i^{\#e}, x) = \{i^{\#e+1}, i + 1^{\#e+1}\}$

Аналогично на 1.2) доказваме, че $\exists\eta_1' \in \delta_e^{D,t}(\eta_1, x)(\eta_1' \leq_s^t \eta_2')$.

2.1.5) $\delta_e^{D,t}(i^{\#e}, x) = \{i^{\#e+1}\}$ и $i = p$ и $e < n$.

Аналогично на 1.4) доказваме, че $\exists\eta_1' \in \delta_e^{D,t}(\eta_1, x)(\eta_1' \leq_s^t \eta_2')$.

2.1.6) $\delta_e^{D,ms}(i^{\#e}, x) = \phi$

Аналогично на 1.5) доказваме, че този случай е невъзможен.

2.2) $\eta_2 = j_t^{\#f}$.

От дефиницията на $\delta_n^{ND,t}$ следва, че $s = 0$ и $\eta_2' = j + 2^{\#f}$ и $1 < \beta(x, w_[j_t^{\#f}])$. От $i^{\#e} <_s^t j_t^{\#f}$ следва, че $|j+1-i| \leq f-e$ и $f > e$.

2.2.1) $\delta_e^{D,t}(i^{\#e}, x) = \{i + 1^{\#e}\}$

От $|j+1-i| \leq f-e$ следва, че $|j+2-(i+1)| \leq f-e$. Следователно $i + 1^{\#e} \leq_s^t j + 2^{\#f}$.

2.2.2) $\delta_e^{D,t}(i^{\#e}, x) = \{i^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}, i+2^{\#e+1}, i_t^{\#e+1}\}$

От $|j+1-i| \leq f-e$ следва, че $|j+2-i| \leq f-(e+1)$ $(j+1 < i)$ или $|j+2-(i+1)| \leq f-(e+1)$ $(i = j+1)$ или $|j+2-(i+2)| \leq f-(e+1)$ $(i < j+1)$. Следователно $i^{\#e+1} \leq_s^t j + 2^{\#f}$ или $i + 1^{\#e+1} \leq_s^t j + 2^{\#f}$ или $i + 2^{\#e+1} \leq_s^t j + 2^{\#f}$.

2.2.3) $\delta_e^{D,t}(i^{\#e}, x) = \{i^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}, i+z^{\#e+z-1}\}$ и $00 < \beta(x, w_[i^{\#e}])$ и $z = \mu z'[\beta(x, w_[i^{\#e}])_{z'} = 1]$

От $|j+1-i| \leq f-e$ следва, че $|j+2-(i+1)| \leq f-e$. Следователно $i+1^{\#e} <_s^t j+2^{\#f}$. Аналогично на случай 1.2) доказваме, че $\exists \eta_1' \in \delta_e^{D,t}(\eta_1, x)(\eta_1' \leq_s^t \eta_2')$.

2.2.4) $\delta_e^{D,t}(i^{\#e}, x) = \{i^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}\}$ и $\beta(x, w_[i^{\#e}]) = 0^k$ за някое $k > 0$

Аналогично на 2.2.2) доказваме, че $i^{\#e+1} \leq_s^t j + 2^{\#f}$ или $i + 1^{\#e+1} \leq_s^t j + 2^{\#f}$. (От $\beta(x, w_[i^{\#e}]) = 0^k$ и $1 < \beta(x, w_[j_t^{\#f}])$ следва, че $j + 1 \leq i$).

2.2.5) $\delta_e^{D,t}(i^{\#e}, x) = \{i^{\#e+1}\}$ и $i = p < n$

От $|j+1-i| \leq f-e$ следва, че $|j+2-i| \leq f-(e+1)$

2.2.6) $\delta_e^{D,t}(i^{\#e}, x) = \phi$

Очевидно този случай е невъзможен.

3) $\chi = ms$

Нека $\eta_2 = j_{(s)}^{\#f}$.

3.1) $\delta_e^{D,ms}(i^{\#e}, x) = \{i + 1^{\#e}\}$

3.1.1) $j < p$

От *Твърдение* 13 следва, че $j + 1^{\#f} \leq_s^{ms} \eta_2'$. От $i^{\#e} \leq_s^{ms} j_{(s)}^{\#f}$ следва, че $i + 1^{\#e} \leq_s^{ms} j + 1^{\#f}$. Следователно $i + 1^{\#e} \leq_s^{ms} \eta_2'$.

3.1.2) $j = p$

От дефиницията на $\delta_n^{ND,ms}$ следва, че $f < n$, $\eta_2 = p^{\#f}$ и $\eta_2' = p^{\#f+1}$. Следователно $|p - i| \leq f - e$ и $f \geq e$. Следователно $|p-(i+1)| \leq (f+1)-e$. Следователно $i + 1^{\#e} \leq_s^{ms} p^{\#f+1} = \eta_2'$.

3.2) $\delta_e^{D,ms}(i^{\#e}, x) = \{i^{\#e+1}, i_s^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}, i+2^{\#e+1}\}$ и $(00 < \beta(x, w_[i^{\#e}])$ или $01 < \beta(x, w_[i^{\#e}]))$

3.2.1) $j < p$

От *Твърдение* 13 следва, че $j + 1^{\#f} \leq_s^{ms} \eta_2'$. От $i^{\#e} \leq_s^{ms} j_{(s)}^{\#f}$ следва, че $i + 1^{\#e} \leq_s^{ms} j + 1^{\#f}$. От $00 < \beta(x, w_[i^{\#e}])$ или $01 < \beta(x, w_[i^{\#e}])$ следва, че $\eta_2' \neq i + 1^{\#f}$. Следователно $i + 1^{\#e} <_s^{ms} \eta_2'$. Нека $\eta_1' \in Q_n^{ND,ms}$ е такова, че $i + 1 <_s^{ms} \eta_1' \leq_s^{ms} \eta_2'$ и $\neg\exists\pi(i + 1^{\#e} <_s^{ms} \pi <_s^{ms} \eta_1')$ (очевидно такова η_1' съществува). От дефиницията на $<_s^{ms}$ следва, че $\eta_1' \in \{i^{\#e+1}, i_s^{\#e+1}, i + 1^{\#e+1}, i + 2^{\#e+1}\}$. ($\eta_1' \notin \{i - 1_s^{\#e+1}, i + 1_s^{\#e+1}\}$, защото в противен случай $s = 0$, $\eta_2 \in \{i - 1^{\#e}, i + 1^{\#e}\}$, $\eta_1 \not\leq_s^{ms} \eta_2$, противоречие).

3.2.2) $j = p$

От дефиницията на $\delta_n^{ND,ms}$ следва, че $f < n$, $\eta_2 = p^{\#f}$ и $\eta_2' = p^{\#f+1}$. От $i^{\#e} \leq_s^{ms} p^{\#f}$ следва, че $i^{\#e+1} \leq_s^{ms} p^{\#f+1}$.

3.3) $\delta_e^{D,ms}(i^{\#e}, x) = \{i^{\#e+1}, i_s^{\#e+1}, i+1^{\#e+1}\}$ и $0 < \beta(x, w_[i^{\#e}])$

Аналогично на 3.2) доказваме, че $\exists \eta_1' \in \delta_e^{D,ms}(\eta_1, x)(\eta_1' \leq_s^{ms} \eta_2')$.

3.4) $\delta_e^{D,ms}(i^{\#e}, x) = \{i^{\#e+1}\}$ и $i = p$ и $e < n$.

Аналогично на 1.4) доказваме, че $\exists \eta_1' \in \delta_e^{D,ms}(\eta_1, x)(\eta_1' \leq_s^{ms} \eta_2')$.

3.5) $\delta_e^{D,ms}(i^{\#e}, x) = \phi$

Аналогично на 1.5) доказваме, че този случай е невъзможен.

Твърдение 15 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$ и $n \in N$. Нека $A_n^{ND,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi}, \delta_n^{ND,\chi} >$. Нека $A_n^{D,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{D,\chi}, I^{D,\chi}, F_n^{D,\chi}, \delta_n^{D,\chi} >$. Тогава $L(A_n^{ND,\chi}(w)) \subseteq L(A_n^{D,\chi}(w))$.

Доказателство

$x_1...x_k \in L(A_n^{ND,\chi}(w))$

1) $x_1...x_k = \epsilon$.

Нека $\pi_0, \pi_1, ..., \pi_r \in Q_n^{ND,\chi}$, $r \in N$ са такива състояния, че $\pi_0 = 0^{\#0}$, $< \pi_0, \epsilon, \pi_1 > \in \delta_n^{ND,\chi}$, $< \pi_1, \epsilon, \pi_2 > \in \delta_n^{ND,\chi}$, ..., $< \pi_{r-1}, \epsilon, \pi_r > \in \delta_n^{ND,\chi}$ и $\pi_r \in F_n^{ND,\chi}$ (от $\epsilon \in L(A_n^{ND,\chi}(w))$ следва, че такива състояния съществуват). От дефиницията на $\delta_n^{ND,\chi}$ следва, че $\pi_i = i^{\#i}$ за $0 \leq i \leq r$. Следователно $r^{\#r} \in F_n^{ND,\chi}$. Очевидно $0^{\#0} \leq_s^\chi r^{\#r}$. От *Твърдение* 12 следва, че $0^{\#0} \in F_n^{ND,\chi}$. Следователно $\{0^{\#0}\} = I^{D,\chi} \in F_n^{D,\chi}$. Следователно $\epsilon = x_1...x_k \in L(A_n^{D,\chi}(w))$.

2) $x_1...x_k \neq \epsilon$.

Нека $\pi_0, \pi_1, ..., \pi_{r'} \in Q_n^{ND,\chi}$, $r' \in N$ са такива състояния, че $\pi_0 = 0^{\#0}$, $< \pi_0, p_1, \pi_1 > \in \delta_n^{ND,\chi}$, $< \pi_1, p_2, \pi_2 > \in \delta_n^{ND,\chi}$, ..., $< \pi_{r'-1}, p_{r'}, \pi_{r'} > \in \delta_n^{ND,\chi}$, $p_i \in \Sigma \bigcup \{\epsilon\}$ за $0 \leq i \leq r'$, $\pi_{r'} \in F_n^{ND,\chi}$ и $p_1 p_2 ... p_{r'} = x_1 x_2 ... x_k$ (от $x_1 x_2 ... x_k \in L(A_n^{ND,\chi}(w))$ следва, че такива състояния съществуват). Нека r е такова, че $r \leq r'$ и $p_r = x_k$ и $p_{r+1} = p_{r+2} = ... = p_{r'} = \epsilon$. Очевидно $\pi_r \leq_s^\chi \pi_{r'}$. От *Твърдение* 12 следва, че $\pi_r \in F_n^{ND,\chi}$. Нека $M_0 = \{0^{\#0}\}$ и $M_{i+1} = \delta_n^{D,\chi}(M_i, x_{i+1})$ за $i = 0, 1, ..., k-1$. Ще докажем, че $M_k \in F_n^{D,\chi}$. Нека $j_1 < j_2 < ... < j_k$ са такива, че $p_{j_1} p_{j_2} ... p_{j_k} = x_1 x_2 ... x_k$ и $p_{j_i} \in \Sigma$ за $1 \leq i \leq k$. Ще докажем чрез индукция по i, че за $1 \leq i \leq k$ е изпълнено, че $\exists \pi \in M_i (\pi \leq_s^\chi \pi_{j_i})$.

2.1) i = 1

$M_1 = \delta_n^{D,\chi}(\{0^{\#0}\}, x_1) = \delta_e^{D,\chi}(0^{\#0}, x_1)$

Нека $\eta_1 = \eta_2 = 0^{\#0}$ и $s = j_1 - 1$. Следователно $< 0^{\#0}, \epsilon, \pi_1 > \in \delta_n^{ND,\chi}$, $< \pi_1, \epsilon, \pi_2 > \in \delta_n^{ND,\chi}$, ..., $< \pi_{s-1}, \epsilon, \pi_s > \in \delta_n^{ND,\chi}$ и $< \pi_s, x_1, \pi_{j_1} > \in \delta_n^{ND,\chi}$. От *Твърдение* 14 следва, че $\exists \pi \in M_1 (\pi \leq_s^\chi \pi_{j_1})$.

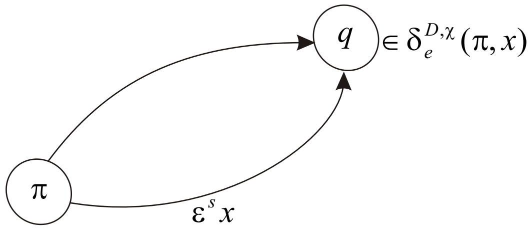
2.2) Допускаме, че $\exists \pi \in M_i (\pi \leq_s^\chi \pi_{j_i})$. Ще докажем, че $\exists \pi' \in M_{i+1} (\pi' \leq_s^\chi \pi_{j_{i+1}})$. Нека $\eta_1 \in M_i$ и $(\eta_1 \leq_s^\chi \pi_{j_i})$. Нека $\eta_2 = \pi_{j_i}$. Очевидно съществува $s \in N$ такова, че $< \eta_2, \epsilon, \pi_{j_i+1} >$, $< \pi_{j_i+1}, \epsilon, \pi_{j_i+2} >$, ..., $< \pi_{j_i+s-1}, \epsilon, \pi_{j_i+s} >$ $< \pi_{j_i+s}, x_{i+1}, \pi_{j_{i+1}} > \in \delta_n^{ND,\chi}$. Нека $\pi'' \in \delta_e^{D,\chi}(\eta_1, x_{i+1})$ е такова, че $\pi'' \leq_s^\chi \pi_{j_{i+1}}$ (от *Твърдение* 14 следва, че такова π'' съществува).

$$\pi'' \in \bigcup_{q \in M_i} \delta_e^{D,\chi}(q, x_{i+1})$$

$$M_{i+1} = \bigsqcup_{q \in M_i} \delta_e^{D,\chi}(q, x_{i+1})$$

Следователно $\exists \pi' \in M_{i+1}(\pi' \leq_s^\chi \pi'')$. Следователно $\exists \pi' \in M_{i+1}(\pi' \leq_s^\chi \pi_{j_{i+1}})$. Доказахме, че за $1 \leq i \leq k$ е изпълнено, че $\exists \pi \in M_i(\pi \leq_s^\chi \pi_{j_i})$. Следователно $\exists \pi \in M_k(\pi \leq_s^\chi \pi_{j_k})$. $\pi_{j_k} = \pi_r \in F_n^{ND,\chi}$. Следователно $\exists \pi \in M_k(\pi \in F_n^{ND,\chi})$. Следователно $M_k \in F_n^{D,\chi}$. Следователно $x_1x_2...x_k \in L(A_n^{D,\chi}(w))$.

Твърдение 16 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$ и $n \in N$. Нека $A_n^{ND,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi}, \delta_n^{ND,\chi} >$. Нека $\pi \in Q_n^{ND,\chi}$, $x \in \Sigma$ и $q \in \delta_e^{D,\chi}(\pi, x)$. Тогава $\exists s \in N \exists \eta_0\eta_1...\eta_s \in Q_n^{ND,\chi}(\eta_0 = \pi \;\&\; < \eta_0, \epsilon, \eta_1 > \in \delta_n^{ND,\chi} \;\&\; < \eta_1, \epsilon, \eta_2 > \in \delta_n^{ND,\chi} \;\&\; ... \;\&\; < \eta_{s-1}, \epsilon, \eta_s > \in \delta_n^{ND,\chi} \;\&\; < \eta_s, x, q > \in \delta_n^{ND,\chi}\;)$.



Фиг. 7

Доказателство *Твърдение* 16 следва непосредствено от дефинициите на $\delta_e^{D,\chi}$ и $\delta_n^{ND,\chi}$.

Твърдение 17 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$ и $n \in N$. Нека $A_n^{ND,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi}, \delta_n^{ND,\chi} >$. Нека $A_n^{D,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{D,\chi}, I^{D,\chi}, F_n^{D,\chi}, \delta_n^{D,\chi} >$. Тогава $L(A_n^{ND,\chi}(w)) \supseteq L(A_n^{D,\chi}(w))$.

Доказателство Нека $x_1x_2...x_k \in L(A_n^{D,\chi}(w))$. Нека $M_0 = \{0^{\#0}\}$ и $M_{i+1} = \delta_n^{D,\chi}(M_i, x_{i+1})$ за $0 \leq i \leq k-1$ и $M_k \in F_n^{D,\chi}$. Ще докажем чрез индукция по i, че за $0 \leq i \leq k$ е изпълнено, че $\forall \pi \in M_i(< 0^{\#0}, x_1x_2...x_i, \pi > \in \delta_n^{ND,\chi^*})$.

1) $i = 0$

$< 0^{\#0}, \epsilon, 0^{\#0} > \in \delta_n^{ND,\chi}$

2) Допускаме, че $\forall \pi \in M_i(< 0^{\#0}, x_1x_2...x_i, \pi > \in \delta_n^{ND,\chi^*})$ Ще докажем, че $\forall \pi' \in M_{i+1}(< 0^{\#0}, x_1x_2...x_{i+1}, \pi' > \in \delta_n^{ND,\chi^*})$.

$$M_{i+1} = \bigsqcup_{q \in M_i} \delta_e^{D,\chi}(q, x_{i+1}) \subseteq \bigcup_{q \in M_i} \delta_e^{D,\chi}(q, x_{i+1})$$

Нека $\pi' \in M_{i+1}$. Следователно $\exists q \in M_i(\pi' \in \delta_e^{D,\chi}(q, x_{i+1}))$. Нека q е такова, че $q \in M_i$ и $\pi' \in \delta_e^{D,\chi}(q, x_{i+1})$. Следователно $< 0^{\#0}, x_1x_2...x_i, q > \in \delta_n^{ND,\chi^*}$. От *Твърдение* 16 следва, че $< q, x_{i+1}, \pi' > \in \delta_n^{ND,\chi^*}$. Следователно $< 0^{\#0}, x_1x_2...x_{i+1}, \pi' > \in \delta_n^{ND,\chi^*}$.

Доказахме, че при $0 \leq i \leq k$ е изпълнено, че $\forall \pi \in M_i(< 0^{\#0}, x_1x_2...x_i, \pi >\in \delta_n^{ND,\chi^*})$. Нека π е такова, че $\pi \in M_k \bigcap F_n^{ND,\chi}$ ($M_k \in F_n^{D,\chi}$ и следователно такова π съществува). Следователнно $< 0^{\#0}, x_1x_2...x_k, \pi >\in \delta_n^{ND,\chi^*}$. Следователнно $x_1x_2...x_k \in L(A_n^{D,\chi}(w))$.

Следствие Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$ и $n \in N$. Нека $A_n^{ND,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{ND,\chi}, I^{ND,\chi}, F_n^{ND,\chi}, \delta_n^{ND,\chi} >$. Нека $A_n^{D,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{D,\chi}, I^{D,\chi}, F_n^{D,\chi}, \delta_n^{D,\chi} >$. От *Твърдение* 17 и *Твърдение* 15 следва, че $L_{Lev}^{\chi}(n, w) = L(A_n^{ND,\chi}(w)) = L(A_n^{D,\chi}(w))$.

В [SMFSCLA] също се доказва, че $L_{Lev}^{\chi}(n, w) = L(A_n^{D,\chi}(w))$.

Твърдение 18 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $n \in N$. Нека $b \in \{0,1\}^*$. Тогава
1) $\delta_e^{D,\chi}(i + t^{\#e}, b) = \{j + t_{(t|s)}^{\#f} | j_{(t|s)}^{\#f} \in \delta_e^{D,\chi}(i^{\#e}, b)\}$
2) $\delta_e^{D,\chi}(i + t_t^{\#e}, b) = \{j + t_{(t)}^{\#f} | j_{(t)}^{\#f} \in \delta_e^{D,\chi}(i_t^{\#e}, b)\}$
3) $\delta_e^{D,\chi}(i + t_s^{\#e}, b) = \{j + t_{(s)}^{\#f} | j_{(s)}^{\#f} \in \delta_e^{D,\chi}(i_s^{\#e}, b)\}$

Доказателство Твърдението следва непосредствено от дефиницията на $\delta_e^{D,\chi}$.

4. Универсални Левенщайн автомати.

Ще покажем, че за всяко $n \in N$ можем да построим краен детерминиран автомат $A_n^{\forall,\chi}$, така че:

1) състоянията на $A_n^{\forall,\chi}$ представляват крайни множества, като при $\chi = \epsilon$ елементите на некрайните състояния са от вида $I + i^{\#e}$, а на крайните - от вида $\mathrm{M} + j^{\#f}$ (при $\chi = t$ в състоянията участват и елементи от вида $I_t + i^{\#e}$ и $\mathrm{M}_t + j^{\#f}$, при $\chi = ms$ - от вида $I_s + i^{\#e}$ и $\mathrm{M}_s + j^{\#f}$);

2) всеки символ от входната азбука на $A_n^{\forall,\chi}$ представлява двоичен вектор, т.е. дума от езика $\{0,1\}^*$;

3) за всеки две думи $v_1v_2...v_k$ и w от Σ^* можем да посторим дума $b = b_1b_2...b_k$, така че $b_i \in \{0,1\}^*$ и $b \in L(A_n^{\forall,\chi}) \Leftrightarrow v \in L(A_n^{D,\chi}(w))$, т.е. $b \in L(A_n^{\forall,\chi}) \Leftrightarrow v \in L_{Lev}^{\chi}(n, w)$ (символът v_i ще нарираме съответен на думата b_i). Нека $q_0^{\forall}$, $q_1^{\forall}$, ..., $q_k^{\forall}$ са състоянията на $A_n^{\forall,\chi}$, през които минаваме с думата b, а q_0^D, q_1^D, ..., q_k^D са състоянията на $A_n^{D,\chi}(w)$, през които минаваме с думата v. Ще постоим $A_n^{\forall,\chi}$ така, че когато заместим параметрите I в $q_j^{\forall}$ с j, ако $q_j^{\forall}$ е некрайно, или параметрите M в $q_j^{\forall}$ с k, ако $q_j^{\forall}$ е крайно, да получаваме q_j^D и още: $q_j^{\forall}$ ще е кайно, само ако q_j^D е крайно.

Означения С изрази от вида $F(I)^{\#e}$, $F(I_t)^{\#e}$, $F(I_s)^{\#e}$, $F(M)^{\#e}$, $F(M_t)^{\#e}$ и $F(M_s)^{\#e}$ ще означаваме съответно $<< \lambda I.F(I), 0 >, e >$, $<< \lambda I.F(I), 1 >, e >$, $<< \lambda I.F(I), 2 >, e >$, $<< \lambda M.F(M), 3 >, e >$, $<< \lambda M.F(M), 4 >, e >$ и

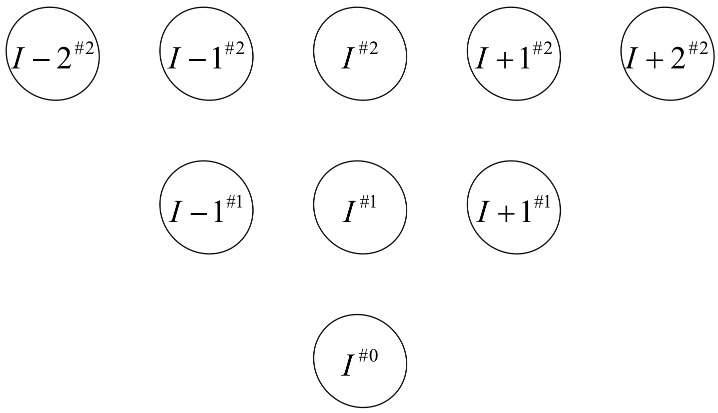
$<< \lambda M.F(M), 5 >, e >$.

Дефиниция 15 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $n \in N$. Ще дефинираме крайния автомат $A_n^{\forall,\chi}$.

$$A_n^{\forall,\chi} \stackrel{def}{=} < \Sigma_n^{\forall}, Q_n^{\forall,\chi}, I^{\forall,\chi}, F_n^{\forall,\chi}, \delta_n^{\forall,\chi} >$$

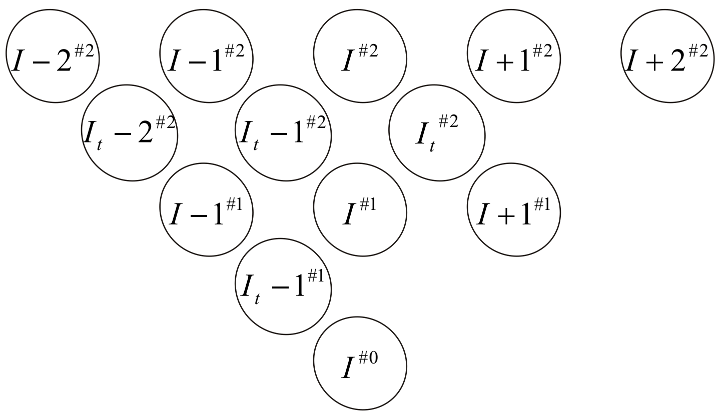
$\Sigma_n^{\forall} \stackrel{def}{=} \{x | x \in \{0,1\}^+ \;\&\; |x| \leq 2n+2\}$

Ще дефинираме I_s^{χ}.
1) $\chi = \epsilon$
$I_s^{\epsilon} \stackrel{def}{=} \{I + t^{\#k} \mid |t| \leq k \;\&\; -n \leq t \leq n \;\&\; 0 \leq k \leq n\}$



Фиг. 8 $\quad I_s^{\epsilon}, n = 2$

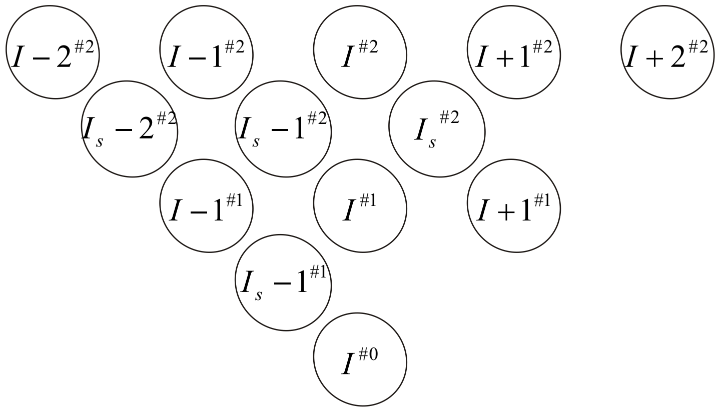
2) $\chi = t$
$I_s^{t} \stackrel{def}{=} I_s^{\epsilon} \bigcup \{I_t + t^{\#k} \mid |t+1| + 1 \leq k \;\&\; -n \leq t \leq n-2 \;\&\; 1 \leq k \leq n\}$



Фиг. 9 $\quad I_s^{t}, n = 2$

3) $\chi = ms$

$I_s^{ms} \stackrel{def}{=} I_s^{\epsilon} \bigcup \{I_s + t^{\#k} \mid |t+1| + 1 \le k \;\&\; -n \le t \le n-2 \;\&\; 1 \le k \le n\}$

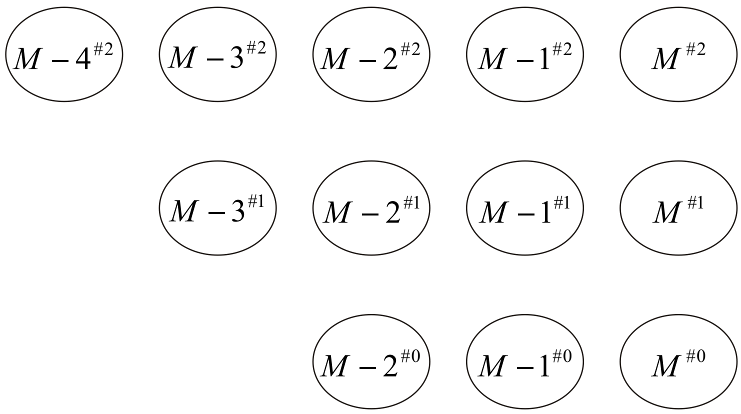


Фиг. 10 $I_s^{ms}, n = 2$

Ще дефинираме M_s^{χ}.

1) $\chi = \epsilon$

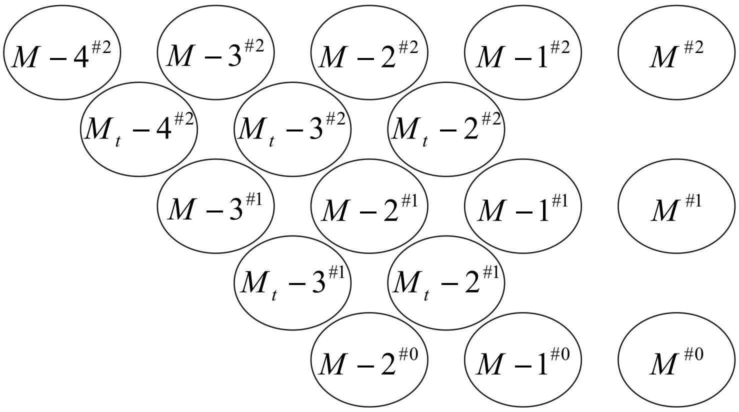
$M_s^{\epsilon} \stackrel{def}{=} \{M + t^{\#k} \mid k \ge -t - n \;\&\; -2n \le t \le 0 \;\&\; 0 \le k \le n\}$



Фиг. 11 $M_s^{\epsilon}, n = 2$

2) $\chi = t$

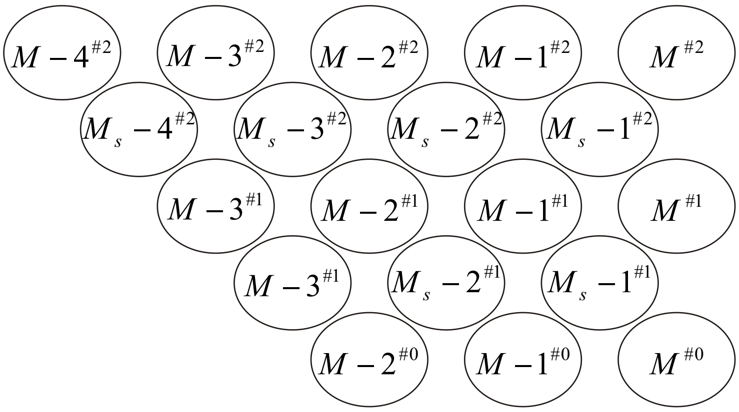
$M_s^{t} \stackrel{def}{=} M_s^{\epsilon} \bigcup \{M_t + t^{\#k} \mid k \ge -t - n \;\&\; -2n \le t \le -2 \;\&\; 1 \le k \le n\}$



Фиг. 12 $\quad M_s^t, n = 2$

3) $\chi = ms$

$M_s^{ms} \stackrel{def}{=} M_s^{\epsilon} \bigcup \{M_s + t^{\#k} \mid k \geq -t - n \,\&\, -2n \leq t \leq -1 \,\&\, 1 \leq k \leq n\}$



Фиг. 13 $\quad M_s^{ms}, n = 2$

Ше дефинираме $<_s^{\chi} \subseteq (I_s^{\chi} \bigcup M_s^{\chi}) \times (I_s^{\chi} \bigcup M_s^{\chi})$.

1) $\chi = \epsilon$

$I + i^{\#e} <_s^{\epsilon} I + j^{\#f} \stackrel{def}{\Leftrightarrow} i^{\#e} <_s^{\epsilon} j^{\#f}$

$M + i^{\#e} <_s^{\epsilon} M + j^{\#f} \stackrel{def}{\Leftrightarrow} i^{\#e} <_s^{\epsilon} j^{\#f}$

2) $\chi = t$

$I + i^{\#e} <_s^{t} I + j^{\#f} \stackrel{def}{\Leftrightarrow} i^{\#e} <_s^{t} j^{\#f}$

$I + i^{\#e} <_s^{t} I_t + j^{\#f} \stackrel{def}{\Leftrightarrow} i^{\#e} <_s^{t} j_t^{\#f}$

$M + i^{\#e} <_s^{t} M + j^{\#f} \stackrel{def}{\Leftrightarrow} i^{\#e} <_s^{t} j^{\#f}$

$M + i^{\#e} <_s^{t} M_t + j^{\#f} \stackrel{def}{\Leftrightarrow} i^{\#e} <_s^{t} j_t^{\#f}$

3) $\chi = ms$
$I + i^{\#e} <_s^{ms} I + j^{\#f} \overset{def}{\Leftrightarrow} i^{\#e} <_s^{ms} j^{\#f}$
$I + i^{\#e} <_s^{ms} I_s + j^{\#f} \overset{def}{\Leftrightarrow} i^{\#e} <_s^{ms} j_s^{\#f}$
$M + i^{\#e} <_s^{ms} M + j^{\#f} \overset{def}{\Leftrightarrow} i^{\#e} <_s^{ms} j^{\#f}$
$M + i^{\#e} <_s^{ms} M_s + j^{\#f} \overset{def}{\Leftrightarrow} i^{\#e} <_s^{ms} j_s^{\#f}$

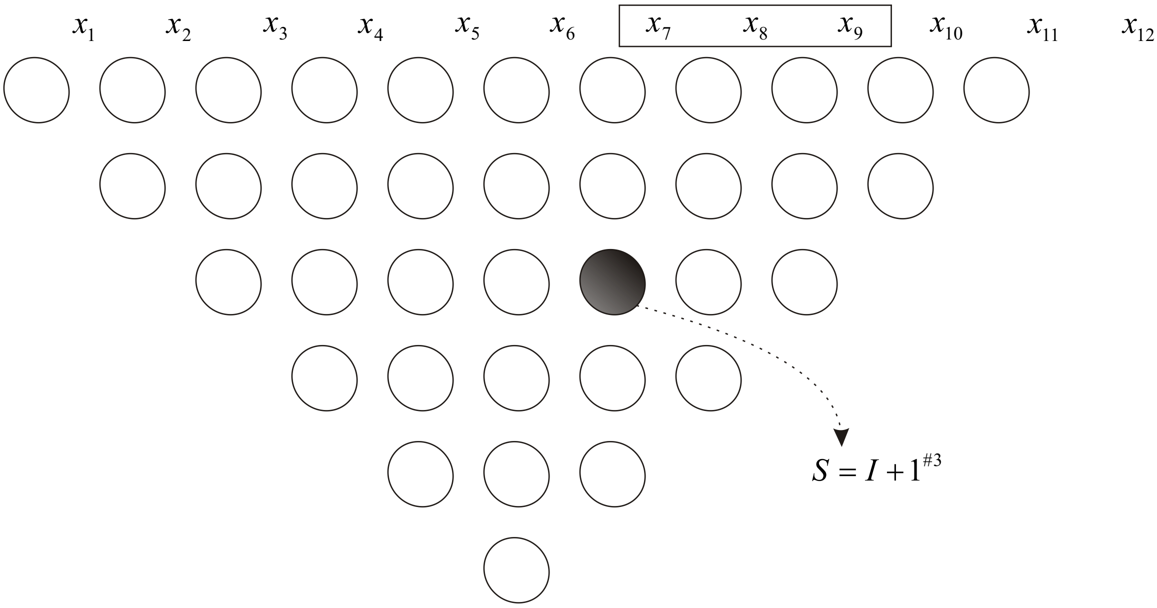
Ще дефинираме I^{χ}_{states} и M^{χ}_{states}.
$I^{\chi}_{states} \overset{def}{=} \{Q|Q \subseteq I^{\chi}_s \,\&\, \forall q_1, q_2 \in Q(q_1 \not<^{\chi}_s q_2)\} \backslash \{\phi\}$
$M^{\chi}_{states} \overset{def}{=} \{Q|Q \subseteq M^{\chi}_s \,\&\, \forall q_1, q_2 \in Q(q_1 \not<^{\chi}_s q_2) \,\&\, \exists q \in Q(q \leq^{\chi}_s M^{\#n}) \,\&\, \exists i \in [-n, 0] \forall q \in Q(M + i^{\#0} \leq^{\chi}_s q)\}$

$Q_n^{\forall,\chi} \overset{def}{=} I^{\chi}_{states} \bigcup M^{\chi}_{states}$
$I^{\forall,\chi} \overset{def}{=} \{I^{\#0}\}$
$F_n^{\forall,\chi} \overset{def}{=} M^{\chi}_{states}$

Ще дефинираме $r_n : (I^{\chi}_s \bigcup M^{\chi}_s) \times \Sigma_n^{\forall} \dashrightarrow \{0,1\}^*$. $r_n(S, x)$ представлява характеристичния вектор, който се определя от съответното на S състояние в $A_n^{ND,\chi}$ и съответния на x символ от Σ.
1) $S = I + i^{\#e}$ или $S = I_t + i^{\#e}$ или $S = I_s + i^{\#e}$

$$r_n(S, x_1 x_2 ... x_k) \overset{def}{=} \begin{cases} x_{n+i+1} x_{n+i+2} ... x_{n+i+h}, & \text{ако } h > 0 \\ \epsilon, & \text{ако } h = 0 \\ \neg!, & \text{ако } h < 0 \end{cases}$$

където $h = min(n - e + 1, k - n - i)$

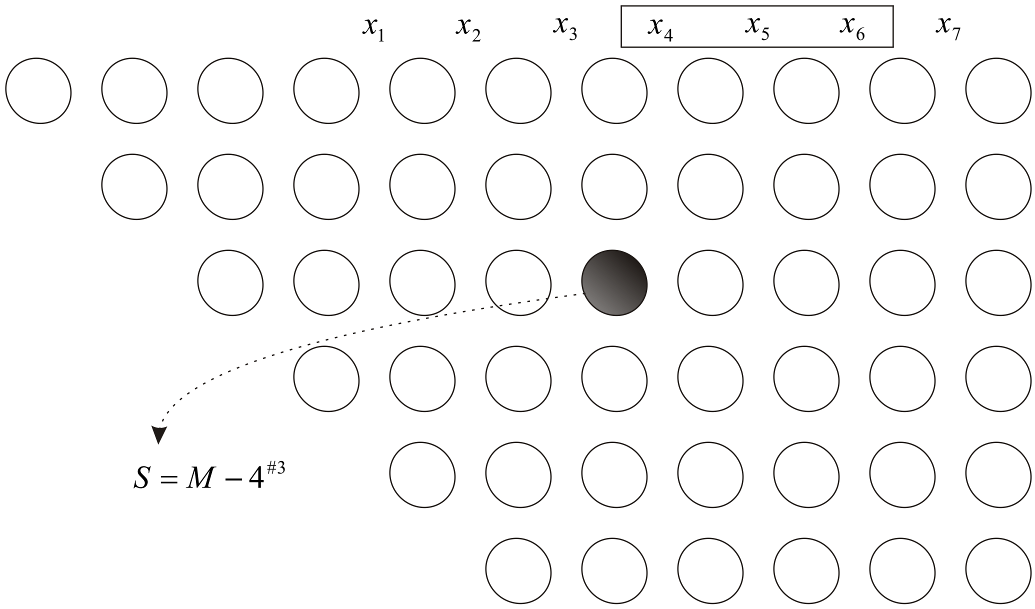


Фиг. 14 $\quad r_5(I + 1^{\#3}, x_1x_2...x_{12}) = x_7x_8x_9$

2) $S = M + i^{\#e}$ или $S = M_t + i^{\#e}$ или $S = M_s + i^{\#e}$

$$r_n(S, x_1x_2...x_k) \stackrel{def}{=} \begin{cases} x_{k+i+1}x_{k+i+2}...x_{k+i+h}, & \text{ако } h > 0 \\ \epsilon, & \text{ако } h = 0 \\ \neg!, & \text{ако } h < 0 \end{cases}$$

където $h = min(n - e + 1, -i)$



Фиг. 15 $\quad r_5(M - 4^{\#3}, x_1x_2...x_7) = x_4x_5x_6$

$P^\epsilon \overset{def}{=} \{I + i^{\#e}|i, e \in Z\} \bigcup \{M + i^{\#e}|i, e \in Z\}$
$P^t \overset{def}{=} P^\epsilon \bigcup \{I_t + i^{\#e}|i, e \in Z\} \bigcup \{M_t + i^{\#e}|i, e \in Z\}$
$P^{ms} \overset{def}{=} P^\epsilon \bigcup \{I_s + i^{\#e}|i, e \in Z\} \bigcup \{M_s + i^{\#e}|i, e \in Z\}$

Ще дефинираме $m_n : P^\chi \times N \to P^\chi$. Когато от някое некрайно състояние с дума $b_1b_2...b_k$ трябва да извършим преход в крайно състояние, функцията m_n ни служи, за да конвертираме елементите от вида $I + i^{\#e}$ във елементи от вида $\mathrm{M} + i^{\#e}$. И обратно - когато от крайно състояние трябва да отидем в некрайно, с функцията m_n конвертираме елементите от вида $M + i^{\#e}$ във елементи от вида $I + i^{\#e}$.

1) $\chi = \epsilon$

$$m_n(S,k) \overset{def}{=} \begin{cases} M + i + n + 1 - k^{\#e}, & \text{ако } S = I + i^{\#e} \\ I + i - n - 1 + k^{\#e}, & \text{ако } S = M + i^{\#e} \end{cases}$$

2) $\chi = t$

$$m_n(S,k) \overset{def}{=} \begin{cases} M + i + n + 1 - k^{\#e}, & \text{ако } S = I + i^{\#e} \\ I + i - n - 1 + k^{\#e}, & \text{ако } S = M + i^{\#e} \\ M_t + i + n + 1 - k^{\#e}, & \text{ако } S = I_t + i^{\#e} \\ I_t + i - n - 1 + k^{\#e}, & \text{ако } S = M_t + i^{\#e} \end{cases}$$

3) $\chi = ms$

$$m_n(S,k) \stackrel{def}{=} \begin{cases} M+i+n+1-k^{\#e}, & \text{ако } S = I+i^{\#e} \\ I+i-n-1+k^{\#e}, & \text{ако } S = M+i^{\#e} \\ M_s+i+n+1-k^{\#e}, & \text{ако } S = I_s+i^{\#e} \\ I_s+i-n-1+k^{\#e}, & \text{ако } S = M_s+i^{\#e} \end{cases}$$

Ще дефинираме $m_n : P(P^{\chi}) \times N \to P(P^{\chi})$.
$m_n(A,x) \stackrel{def}{=} \{m_n(a,x) | a \in A\}$

Ще дефинираме $f_n : (I_s^{\chi} \bigcup M_s^{\chi}) \times N \to \{true, false\}$. Нека A е някое некрайно състояние. Искаме да определим състоянието A', което достигаме от A със символа $b = b_1b_2...b_k$. Първо, като използваме A и b, намираме ново множество B, елементите на което са от вида $I + i^{\#e}$. B е кандидат да бъде тъсеното A'. Но, ако $f_n(S,k) = true$ за някой елемент S на B, то B не е подходящ кандидат и A$' = m_n(B,k)$. Ако за всеки елемент S на B е изпълнено, че $f_n(S,k) = false$, то B е подходящ кандидат и A$' = B$. В $A_n^{ND,\chi}(w)$ едно състояние $i^{\#e}$ е крайно, ако $e <= i - (|w| - n)$, т.е., ако е отдясно на диагонала $y = x - (|w| - n)$. В $A_n^{\forall,\chi}(w)$ съответният на $y = x - (|w| - n)$ диагонал за некрайно състояние се състои от елементите $I + k - 2n + t^{\#t}$ при $0 \leq t \leq n$, ако $k < 2n + 2$ (k е дължината на входния символ). В $A_n^{D,\chi}(w)$ не може да съществува некрайно състояние, което да има елемент отдясно на диагонала $y = x - (|w| - n)$. Аналогично в $A_n^{\forall,\chi}$ функцията на преходите $\delta_n^{\forall,\chi}$ няма да е дефинирана за некрайно състояние и символ $b_1b_2...b_k$, ако некрайното състояние има елемент от вида $I + i^{\#e}$ отдясно на диагонала $I + k - 2n + t^{\#t}$. (S е такъв елемент на кандидата B, само ако $f_n(S,k) = true$.) Изключение прави само началното състояние на $A_n^{\forall,\chi}$ $\{I^{\#0}\}$. То е некрайно, но в $A_n^{D,\chi}(w)$ съответното му $\{0^{\#0}\}$ може и да е крайно. За крайно състояние в $A_n^{\forall,\chi}$ съответният на $y = x - (|w| - n)$ диагонал се състои от елементите $M - n + t^{\#t}$ при $0 \leq t \leq n$ и в $A_n^{\forall,\chi}$ функцията на преходите $\delta_n^{\forall,\chi}$ няма да е дефинирана за крайно състояние, за което всичките му елементи от вида $M + i^{\#e}$ са отляво на диагонала $M - n + t^{\#t}$. (S е отляво на диагонала $M - n + t^{\#t}$, само ако $f_n(S,k) = true$.)

1) $S = I + i^{\#e}$ или $S = I_t + i^{\#e}$ или $S = I_s + i^{\#e}$

$$f_n(S,k) \stackrel{def}{=} \begin{cases} true, & \text{ако } k \leq 2n+1 \;\&\; e \leq i+2n+1-k \\ false & \text{иначе} \end{cases}$$

2) $S = M + i^{\#e}$ или $S = M_t + i^{\#e}$ или $S = M_s + i^{\#e}$

$$f_n(S,k) \stackrel{def}{=} \begin{cases} true, & \text{ако } e > i+n \\ false & \text{иначе} \end{cases}$$

Ще дефинираме $I^{\chi} : P(Q^{ND,\chi}) \to P(P^{\chi})$.
1) $\chi = \epsilon$
$I^{\epsilon}(A) \stackrel{def}{=} \{I + i - 1^{\#e} | i^{\#e} \in A\}$

2) $\chi = t$
$I^t(A) \stackrel{def}{=} \{I + i - 1^{\#e} | i^{\#e} \in A\} \bigcup \{I_t + i - 1^{\#e} | i_t^{\#e} \in A\}$
3) $\chi = ms$
$I^{ms}(A) \stackrel{def}{=} \{I + i - 1^{\#e} | i^{\#e} \in A\} \bigcup \{I_s + i - 1^{\#e} | i_s^{\#e} \in A\}$

Ще дефинираме $M^\chi : P(Q^{ND,\chi}) \rightarrow P(P^\chi)$.
1) $\chi = \epsilon$
$M^\epsilon(A) \stackrel{def}{=} \{M + i^{\#e} | i^{\#e} \in A\}$

2) $\chi = t$
$M^t(A) \stackrel{def}{=} \{M + i^{\#e} | i^{\#e} \in A\} \bigcup \{M_t + i^{\#e} | i_t^{\#e} \in A\}$
3) $\chi = ms$
$M^{ms}(A) \stackrel{def}{=} \{M + i^{\#e} | i^{\#e} \in A\} \bigcup \{M_s + i^{\#e} | i_s^{\#e} \in A\}$

Ще дефинираме $rm : I^\chi_{states} \bigcup M^\chi_{states} \rightarrow I^\epsilon_s \bigcup M^\epsilon_s$.

$$rm(A) \stackrel{def}{=} \begin{cases} I + i^{\#e}, & \text{ако } A \in I^\chi_{states} \ \& \ e - i = \mu z[z = e' - i' \ \& \ I + i'^{\#e'} \in A] \\ M + i^{\#e}, & \text{ако } A \in M^\chi_{states} \ \& \ e - i = \mu z[z = e' - i' \ \& \ M + i'^{\#e'} \in A] \end{cases}$$

Елементът на $rm(A)$ ще наричаме най-десен елемент на A. За да разберем дали трябва да конвертираме чрез функцията m_n кандидата B, който получаваме от някое състояние и входен символ $b_1 b_2 ... b_k$, е достатъчно да проверим стойността $f_n(rm(B), k)$, защото за всяко некрайно състояние A и всяко k е изпълнено, че $f_n(rm(A), k) = false \Leftrightarrow \forall S \in A(S$ е от вида $I + i^{\#e} \Rightarrow f_n(S, k) = false)$, а за всяко всяко крайно състояние C е изпълнено, че $f_n(rm(C), k) = true \Leftrightarrow \forall S \in C(S$ е от вида $M + i^{\#e} \Rightarrow f_n(S, k) = true)$, т.е. независимо от това дали елементите на кандидата B са от вида $I + i^{\#e}$ или са от вида М $+ i^{\#e}$, ако $f_n(rm(B), k) = true$, то B е неподходящ кандидат и, ако $f_n(rm(B), k) = false$, то B е подходящ кандидат.

Ще дефинираме $\delta_e^{\forall,\chi} : (I_s^\chi \bigcup M_s^\chi) \times \Sigma_n^\forall \multimap I^\chi_{states} \bigcup M^\chi_{states} \bigcup \{\phi\}$.
1) Нека $S = I + i^{\#e}$ или $S = I_t + i^{\#e}$ или $S = I_s + i^{\#e}$. Ще дефинираме $\delta_e^{\forall,\chi}(S, x)$.
1.1) $\neg ! r_n(S, x)$
$\neg ! \delta_e^{\forall,\chi}(S, x)$
1.2) $! r_n(S, x)$

$$\text{Нека } \delta_e^{\forall,\chi}(S, x) = \begin{cases} I^\chi(\delta_e^{D,\chi}(i^{\#e}, r_n(S, x))), & \text{ако } S = I + i^{\#e} \\ I^\chi(\delta_e^{D,\chi}(i_t^{\#e}, r_n(S, x))), & \text{ако } S = I_t + i^{\#e} \\ I^\chi(\delta_e^{D,\chi}(i_s^{\#e}, r_n(S, x))), & \text{ако } S = I_s + i^{\#e} \end{cases}$$

2) Нека $S = M + i^{\#e}$ или $S = M_t + i^{\#e}$ или $S = M_s + i^{\#e}$. Ще дефинираме $\delta_e^{\forall,\chi}(S, x)$.
2.1) $\neg ! r_n(S, x)$
$\neg ! \delta_e^{\forall,\chi}(S, x)$
2.2) $! r_n(S, x)$

Нека $\delta_e^{\forall,\chi}(S,x) = \begin{cases} M^{\chi}(\delta_e^{D,\chi}(i^{\#e}, r_n(S,x))), & \text{ако } S = M + i^{\#e} \\ M^{\chi}(\delta_e^{D,\chi}(i_t^{\#e}, r_n(S,x))), & \text{ако } S = M_t + i^{\#e} \\ M^{\chi}(\delta_e^{D,\chi}(i_s^{\#e}, r_n(S,x))), & \text{ако } S = M_s + i^{\#e} \end{cases}$

Ще дефинираме $\bigsqcup : P(P(I_s^{\chi})) \bigcup P(P(M_s^{\chi})) \to P(I_s^{\chi}) \bigcup P(M_s^{\chi})$.

$\bigsqcup A \stackrel{def}{=} \{\pi | \pi \in \bigcup A \,\&\, \neg\exists\pi' \in \bigcup A(\pi' <_s^{\chi} \pi)\}$

Ще дефинираме $\bigtriangledown_a : I_{states}^{\chi} \bigcup M_{states}^{\chi} \to P(N)$. Използваме тази функция, за да определим дали дължината на думата $b_1 b_2 ... b_k$ е подходяща, за да бъде дефинирана функцията на преходите $\delta_n^{\forall,\chi}$, т.е. ако $k \notin \bigtriangledown_a(Q)$, то $\neg!\delta_n^{\forall,\chi}(Q, b_1 b_2 ... b_k)$.

1) Нека $Q \in I_{states}^{\chi}$

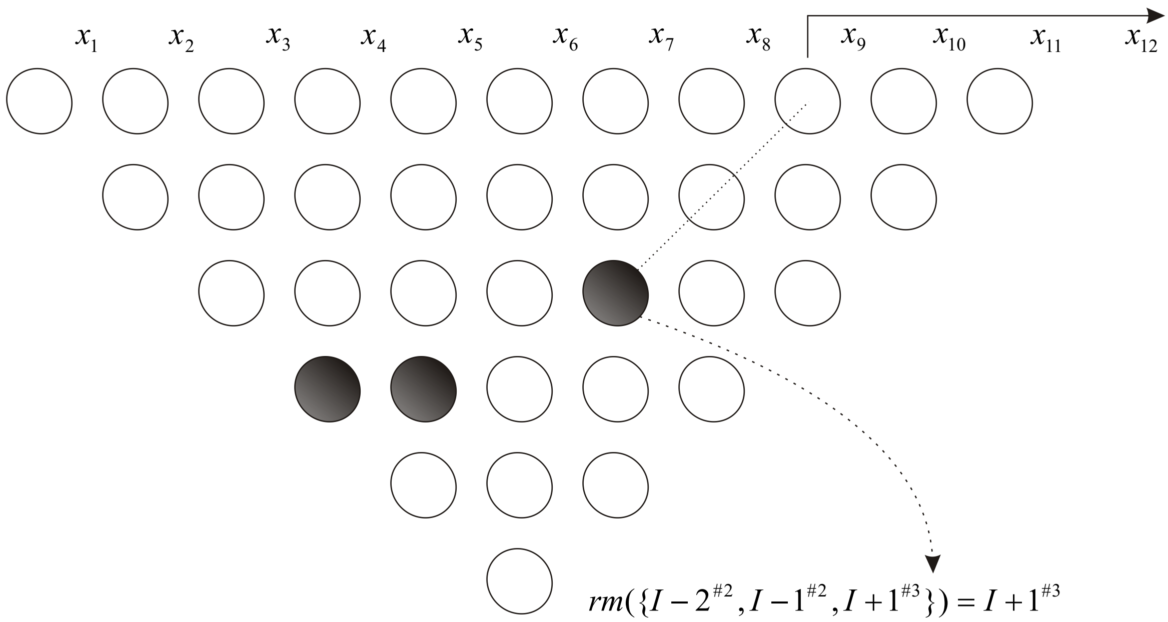
1.1) $Q = \{I^{\#0}\}$

$\bigtriangledown_a(Q) \stackrel{def}{=} \{k | n \leq k \leq 2n+2\}$

1.2) $Q \neq \{I^{\#0}\}$

Нека $rm(Q) = I + i^{\#e}$

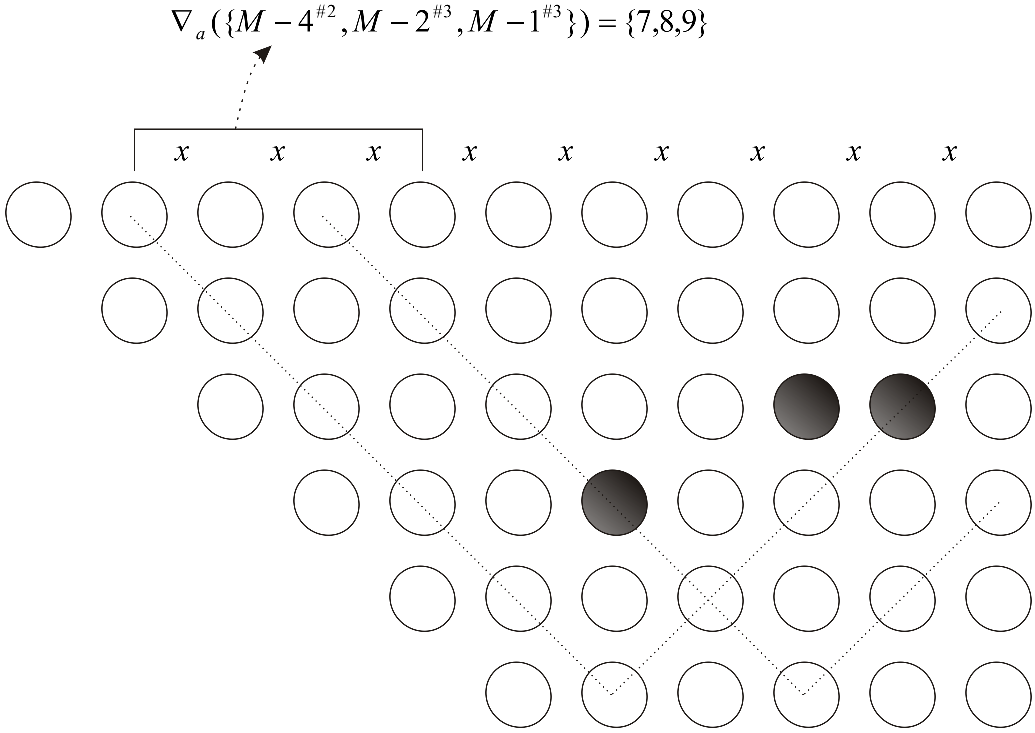
$\bigtriangledown_a(Q) \stackrel{def}{=} \{k | 2n + i - e + 1 \leq k \leq 2n+2\}$



Фиг. 16 $n = 5$, $\bigtriangledown_a(\{I - 2^{\#2}, I - 1^{\#2}, I + 1^{\#3}\}) = \{9, 10, 11, 12\}$
Дължината k на входния символ $x_1 x_2 ... x_k$ трябва да е такава, че всички елементи на състоянието, които са от вида $I + i^{\#e}$, да са отляво на диагонала $I + k - 2n + t^{\#t}$.

2) Нека $Q \in M_{states}^{\chi}$

$$\bigtriangledown_a(Q) \overset{def}{=} \{k \in N | \forall \pi \in Q(if(k < n, M^{\#n-k}, M + n - k^{\#0}) \leq_s^\chi \pi)\} \backslash \{0\}$$



Фиг. 17 $n = 5$, $\bigtriangledown_a(\{M - 4^{\#2}, M - 2^{\#3}, M - 1^{\#3}\}) = \{7, 8, 9\}$

Вече можем да дефинираме функцията на преходите $\delta_n^{\forall,\chi} : Q_n^{\forall,\chi} \times \Sigma_n^{\forall} \ominus\!\!\!\rightarrow Q_n^{\forall,\chi}$.

Нека $Q \in Q_n^{\forall,\chi}$ и $x \in \Sigma_n^{\forall}$.

1) $|x| \notin \bigtriangledown_a(Q)$

$\neg! \delta_n^{\forall,\chi}(Q, x)$

2) $|x| \in \bigtriangledown_a(Q)$

2.1) $\bigcup_{q \in Q} \delta_e^{\forall,\chi}(q, x) = \phi$

$\neg! \delta_n^{\forall,\chi}(Q, x)$

2.2) $\bigcup_{q \in Q} \delta_e^{\forall,\chi}(q, x) \neq \phi$

Нека $\Delta = \bigsqcup_{q \in Q} \delta_e^{\forall,\chi}(q, x)$.

$$\delta_n^{\forall,\chi}(Q, x) \overset{def}{=} \begin{cases} \Delta, & \text{ако } f_n(rm(\Delta)) = false \\ m_n(\Delta, |x|), & \text{ако } f_n(rm(\Delta)) = true \end{cases}$$

Оттук нататък ще считаме, че $I_{states}^{\chi} = \{A | \exists x \in \Sigma_n^{\forall^*}(\delta_n^{\forall,\chi^*}(\{I^{\#0}\}, x) = A) \,\&\, A \subseteq I_s^{\chi}\}$ и $M_{states}^{\chi} = \{A | \exists x \in \Sigma_n^{\forall^*}(\delta_n^{\forall,\chi^*}(\{I^{\#0}\}, x) = A) \,\&\, A \subseteq M_s^{\chi}\}$, т.е.

ще считаме, че $A_n^{\forall,\chi}$ няма недостижими от $\{I^{\#0}\}$ състояния.

Дефиниция на $A_n^{\forall,\epsilon}$ се дава в [MSFASLD].

Дефиниция 16 Нека $n \in N$ и $\$ \notin \Sigma$.
$w_{-n+1} \stackrel{def}{=} w_{-n+2} \stackrel{def}{=} ... \stackrel{def}{=} w_0 \stackrel{def}{=} \$$
$s_n : \Sigma^* \times N^+ \not\longrightarrow (\Sigma \bigcup \{\$\})^*$

$$s_n(w,i) \stackrel{def}{=} \begin{cases} w_{i-n}w_{i-n+1}...w_v, & \text{ако } v \geq i-n \\ \neg!, & \text{ако } v < i-n \end{cases}$$

където $v = min(|w|, i+n+1)$.
$h_n : \Sigma^* \times \Sigma^+ \not\longrightarrow \Sigma_n^{\forall^*}$

$$h_n(w, x_1x_2...x_t) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \beta(x_1, s_n(w,1))\beta(x_2, s_n(w,2))...\beta(x_t, s_n(w,t)), & \text{ако } t \leq |w|+n \\ \neg!, & \text{ако } t > |w|+n \end{cases}$$

Ще дадем пример за използването на $A_n^{\forall,\chi}$. Нека $w = abcabb$ и $x = dacab$. Искаме да знаем дали $x \in L_{Lev}^{\chi}(3,w)$. Намираме $b = h_3(w,x) = b_1b_2...b_5$. $b_1 = \beta(x_1, s_3(w,1)) = \beta(d, \$\$\$abcab) = 00000000$, $b_2 = \beta(x_2, s_3(w,2)) = \beta(a, \$\$abcabb) = 00100100$, $b_3 = \beta(x_3, s_3(w,3)) = \beta(c, \$abcabb) = 0001000$, $b_4 = \beta(x_4, s_3(w,4)) = \beta(a, abcabb) = 100100$ и $b_5 = \beta(x_5, s_3(w,5)) = \beta(b, bcabb) = 10011$. $x \in L_{Lev}^{\chi}(w,3) \Leftrightarrow b \in L(A_3^{\forall,\chi})$.

Твърдение 19 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $w \in \Sigma^*$, $x \in \Sigma^+$, $n \in N^+$ и $!h_n(w,x)$. Нека $b = h_n(w,x)$. Нека $|b| = |x| = t$. Нека

$$q_0^{\forall,\chi} = \{I^{\#0}\} \text{ и}$$
$$q_{i+1}^{\forall,\chi} = \begin{cases} \delta_n^{\forall,\chi}(q_i^{\forall,\chi}, b_{i+1}), & \text{ако } !q_i^{\forall,\chi} \ \& \ !\delta_n^{\forall,\chi}(q_i^{\forall,\chi}, b_{i+1}) \\ \neg! & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{за } 0 \leq i \leq t-1.$$

Нека $|w| = p$. Нека $s : [0,t] \to N$, като

$$s(i) \stackrel{def}{=} \begin{cases} p, & \text{ако } q_i^{\forall,\chi} \in F_n^{\forall,\chi} \\ i, & \text{ако } q_i^{\forall,\chi} \notin F_n^{\forall,\chi} \end{cases}$$

Нека $A_n^{D,\chi}(w) =< \Sigma, Q_n^{D,\chi}, I^{D,\chi}, F_n^{D,\chi}, \delta_n^{D,\chi} >$. Нека

$$q_0^{D,\chi} = \{0^{\#0}\} \text{ и}$$
$$q_{i+1}^{D,\chi} = \begin{cases} \delta_n^{D,\chi}(q_i^{D,\chi}, x_{i+1}), & \text{ако } !q_i^{D,\chi} \ \& \ !\delta_n^{D,\chi}(q_i^{D,\chi}, x_{i+1}) \\ \neg! & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{за } 0 \leq i \leq t-1.$$

Нека $d : (I_s^{\chi} \bigcup M_s^{\chi}) \times N \to Q^{ND,\chi}$, като
1) при $\chi = \epsilon$
$d(I + i^{\#e}, z) \stackrel{def}{=} z + i^{\#e}$ и
$d(M + i^{\#e}, z) \stackrel{def}{=} z + i^{\#e}$

2) при $\chi = t$

$d(I + i^{\#e}, z) \stackrel{def}{=} z + i^{\#e}$,

$d(M + i^{\#e}, z) \stackrel{def}{=} z + i^{\#e}$,

$d(I_t + i^{\#e}, z) \stackrel{def}{=} z + i_t^{\#e}$ и

$d(M_t + i^{\#e}, z) \stackrel{def}{=} z + i_t^{\#e}$

3) при $\chi = ms$

$d(I + i^{\#e}, z) \stackrel{def}{=} z + i^{\#e}$,

$d(M + i^{\#e}, z) \stackrel{def}{=} z + i^{\#e}$,

$d(I_s + i^{\#e}, z) \stackrel{def}{=} z + i_s^{\#e}$ и

$d(M_s + i^{\#e}, z) \stackrel{def}{=} z + i_s^{\#e}$.

Нека $d : P(I_s^\chi \bigcup M_s^\chi) \times N \to P(Q^{ND,\chi})$, като

$d(A, z) \stackrel{def}{=} \{d(\pi, z) | \pi \in A\}$.

Тогава

I) $!q_i^{\forall,\chi} \Leftrightarrow !q_i^{D,\chi}$ и

II) $\forall i \in [0, t](!q_i^{\forall,\chi} \,\&\, !q_i^{D,\chi} \Rightarrow d(q_i^{\forall,\chi}, s(i)) = q_i^{D,\chi})$ и

III) $\forall i \in [1, t](!q_i^{\forall,\chi} \,\&\, !q_i^{D,\chi} \Rightarrow (q_i^{\forall,\chi} \in F_n^{\forall,\chi} \Leftrightarrow q_i^{D,\chi} \in F_n^{D,\chi}))$.

Твърдение 19 е формулирано в [MSFASLD] за $\chi = \epsilon$.

Доказателство

II) индукция по i

1) $i = 0$

$s(0) = 0$. $d(q_0^{\forall,\chi}, s(0)) = \{0^{\#0}\} = q_0^{D,\chi}$

2) Допускаме, че $!q_i^{\forall,\chi} \,\&\, !q_i^{D,\chi} \Rightarrow d(q_i^{\forall,\chi}, s(i)) = q_i^{D,\chi}$. Ще докажем, че $!q_{i+1}^{\forall,\chi} \,\&\, !q_{i+1}^{D,\chi} \Rightarrow d(q_{i+1}^{\forall,\chi}, s(i+1)) = q_{i+1}^{D,\chi}$. Нека $!q_{i+1}^{\forall,\chi}$ и $!q_{i+1}^{D,\chi}$. Следователно $!q_i^{\forall,\chi}$ и $!q_i^{D,\chi}$. Следователно $d(q_i^{\forall,\chi}, s(i)) = q_i^{D,\chi}$.

Помощно твърдение Ако $q \in q_i^{\forall,\chi}$ и $\pi = d(q, s(i))$, то

- ако $q_{i+1}^{\forall,\chi} \subseteq I_s^\chi \Leftrightarrow \delta_e^{\forall,\chi}(q, b_{i+1}) \subseteq I_s^\chi$, то

(1*) $d(\delta_e^{\forall,\chi}(q, b_{i+1}), s(i+1)) = \delta_e^{D,\chi}(\pi, x_{i+1})$

- ако $\neg(q_{i+1}^{\forall,\chi} \subseteq I_s^\chi \Leftrightarrow \delta_e^{\forall,\chi}(q, b_{i+1}) \subseteq I_s^\chi)$, то

(2*) $d(m_n(\delta_e^{\forall,\chi}(q, b_{i+1}), |b_{i+1}|), s(i+1)) = \delta_e^{D,\chi}(\pi, x_{i+1})$

Доказателство Нека $q \in q_i^{\forall,\chi}$ и $\pi = d(q, s(i))$. Нека $\pi = j^{\#e}$ или $\pi = j_t^{\#e}$ или $\pi = j_s^{\#e}$.

Ще докажем, че $!r_n(q, b_{i+1})$ и $r_n(q, b_{i+1}) = \beta(x_{i+1}, w_{[\pi]})$.

1) $q_i^{\forall,\chi} \subseteq I_s^\chi$

Следователно $s(i) = i$ и ($q = I + u^{\#e}$ или $q = I_t + u^{\#e}$ или $q = I_s + u^{\#e}$) за някое u, като $j = i + u$. Нека $b_{i+1} = y_1 y_2 ... y_k$ $(k > 0)$. Следователно

$$r_n(q, y_1 y_2 ... y_k) \stackrel{def}{=} \begin{cases} y_{n+u+1} y_{n+u+2} ... y_{n+u+h}, & \text{ако } h = min(n - e + 1, k - n - u) > 0 \\ \epsilon, & \text{ако } h = min(n - e + 1, k - n - u) = 0 \\ \neg ! & \text{иначе} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \beta(x_{i+1}, w_{i+1+u}w_{i+2+u}...w_{i+h+u}), & \text{ако } h > 0 \\ \epsilon, & \text{ако } h = 0 \\ \neg ! & \text{иначе} \end{cases}$$

$k = min(p, i+1+n+1) - (i+1-n) + 1 = min(p, i+n+2) + n - i$
$h = min(n-e+1, min(p, i+n+2) + n - i - n - u) =$
$min(n-e+1, min(p, i+n+2) - i - u) =$
$min(n-e+1, p-j, n-u+2)$
$q \in I_s^\chi$. Следователно $e \geq |u|$. Следователно $n-e+1 < n-u+2$.

Следователно $h = min(n-e+1, p-j) \geq 0$. Следователно $!r_n(q, b_{i+1})$ и $r_n(q, b_{i+1}) = \beta(x_{i+1}, w_{[\pi]})$.

2) $q_i^{\forall,\chi} \subseteq M_s^\chi$

Следователно $s(i) = p$ и ($q = M + u^{\#e}$ или $q = M_t + u^{\#e}$ или $q = M_s + u^{\#e}$) за някое u, като $j = p + u$. Нека $b_{i+1} = y_1y_2...y_k$ $(k > 0)$. Следователно

$$r_n(q, y_1y_2...y_k) \stackrel{def}{=} \begin{cases} y_{k+u+1}y_{k+u+2}...y_{k+u+h}, & \text{ако } h = min(n-e+1, -u) > 0 \\ \epsilon, & \text{ако } h = min(n-e+1, -u) = 0 \\ \neg ! & \text{иначе} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \beta(x_{i+1}, w_{i-n+k+u+1}w_{i-n+k+u+2}...w_{i-n+k+u+h}), & \text{ако } h > 0 \\ \epsilon, & \text{ако } h = 0 \\ \neg ! & \text{иначе} \end{cases}$$

$q_0^{\forall,\chi} \subseteq I_s^\chi$, $q_i^{\forall,\chi} \subseteq M_s^\chi$. Нека i' е такова, че $i' \in [0, i-1] \& q_{i'}^{\forall,\chi} \subseteq I_s^\chi \& q_{i'+1}^{\forall,\chi} \subseteq M_s^\chi$. Следователно $f_n(q', |b_{i'+1}|) = true$ за някое $q' \in I_s^\chi$. Следователно $|b_{i'+1}| \leq 2n+1$ и $|b_{i'+1}| = n + p - i'$. Следователно $|b_{i+1}| = k = n + p - i$. Следователно

$$r_n(q, y_1y_2...y_k) = \begin{cases} \beta(x_{i+1}, w_{p+u+1}w_{p+u+2}...w_{p+u+h}), & \text{ако } h > 0 \\ \epsilon, & \text{ако } h = 0 \\ \neg ! & \text{иначе} \end{cases}$$

$k = min(n-e+1, -u) = min(n-e+1, p-j) \geq 0$. Следователно $r_n(q, b_{i+1}) = \beta(x_{i+1}, w_{[\pi]})$.

Ще докажем, че
ако $q_{i+1}^{\forall,\chi} \subseteq I_s^\chi \Leftrightarrow \delta_e^{\forall,\chi}(q, b_{i+1}) \subseteq I_s^\chi$, то 1^* и
ако $\neg(q_{i+1}^{\forall,\chi} \subseteq I_s^\chi \Leftrightarrow \delta_e^{\forall,\chi}(q, b_{i+1}) \subseteq I_s^\chi)$, то 2^*

1) $q_i^{\forall,\chi} \subseteq I_s^\chi$

Следователно $s(i) = i$ и ($q = I + u^{\#e}$ или $q = I_t + u^{\#e}$ или $q = I_s + u^{\#e}$) за някое u, като $j = i + u$. ($j = i + u$, защото $d(q, s(i)) = \pi$.)

Нека

$$\Delta_I = \begin{cases} \delta_e^{D,\chi}(u^{\#e}, r_n(q, b_{i+1})), & \text{ако } q = I + u^{\#e} \\ \delta_e^{D,\chi}(u_t^{\#e}, r_n(q, b_{i+1})), & \text{ако } q = I_t + u^{\#e} \\ \delta_e^{D,\chi}(u_s^{\#e}, r_n(q, b_{i+1})), & \text{ако } q = I_s + u^{\#e} \end{cases}$$

Нека

$$\Delta'_I = \begin{cases} \delta_e^{D,\chi}(u + i^{\#e}, r_n(q, b_{i+1})), & \text{ако } q = I + u^{\#e} \\ \delta_e^{D,\chi}(u + i_t^{\#e}, r_n(q, b_{i+1})), & \text{ако } q = I_t + u^{\#e} \\ \delta_e^{D,\chi}(u + i_s^{\#e}, r_n(q, b_{i+1})), & \text{ако } q = I_s + u^{\#e} \end{cases}$$

От $i+u = j$ и $r_n(q, b_{i+1}) = \beta(x_{i+1}, w_{[\pi]})$ следва, че $\Delta'_I = \delta_e^{D,\chi}(\pi, \beta(x_{i+1}, w_{[\pi]})) = \delta_e^{D,\chi}(\pi, x_{i+1})$.

$\delta_e^{\forall,\chi}(q, b_{i+1}) = I^\chi(\Delta_I) \subseteq I_s^\chi$.

1.1) $q_{i+1}^{\forall,\chi} \subseteq I_s^\chi$

$s(i+1) = i+1$. Трябва да докажем 1^*. $d(\delta_e^{\forall,\chi}(q, b_{i+1}), s(i+1)) = d(I^\chi(\Delta_I), i+1) = d(\{I_{(t|s)}+a-1^{\#b} | a_{(t|s)}^{\#b} \in \Delta_I\}, i+1) = \{a+i_{(t|s)}^{\#b} | a_{(t|s)}^{\#b} \in \Delta_I\} =_{\textit{Твърдение 18}} \Delta'_I = \delta_e^{D,\chi}(\pi, x_{i+1})$.

1.2) $q_{i+1}^{\forall,\chi} \subseteq M_s^\chi$

Следователно $s(i+1) = p$ и $|b_{i+1}| = p - i + n$. Трябва да докажем 2^*. $d(m_n(\delta_e^{\forall,\chi}(q, b_{i+1}), |b_{i+1}|), s(i+1)) =$
$d(m_n(I^\chi(\Delta_I), p - i + n), p) =$
$d(m_n(\{I_{(t|s)} - 1 + a^{\#b} | a_{(t|s)}^{\#b} \in \Delta_I\}, p - i + n), p) =$
$d(\{M_{(s|t)} + n + 1 - (p - i + n) + a - 1^{\#b} | a_{(t|s)}^{\#b} \in \Delta_I\}, p) = \{a + i_{(s|t)}^{\#b} | a_{(t|s)}^{\#b} \in \Delta_I\} = \Delta'_I =_{\textit{Твърдение 18}} \delta_e^{D,\chi}(\pi, x_{i+1})$.

2) $q_i^{\forall,\chi} \subseteq M_s^\chi$

Следователно $s(i) = p$ и ($q = M+u^{\#e}$ или $q = M_t+u^{\#e}$ или $q = M_s+u^{\#e}$) за някое u, като $j = p + u$. ($j = p + u$, защото $d(q, s(i)) = \pi$.)

Нека

$$\Delta_M = \begin{cases} \delta_e^{D,\chi}(u^{\#e}, r_n(q, b_{i+1})), & \text{ако } q = M + u^{\#e} \\ \delta_e^{D,\chi}(u_t^{\#e}, r_n(q, b_{i+1})), & \text{ако } q = M_t + u^{\#e} \\ \delta_e^{D,\chi}(u_s^{\#e}, r_n(q, b_{i+1})), & \text{ако } q = M_s + u^{\#e} \end{cases}$$

Нека

$$\Delta'_M = \begin{cases} \delta_e^{D,\chi}(p + u^{\#e}, r_n(q, b_{i+1})), & \text{ако } q = M + u^{\#e} \\ \delta_e^{D,\chi}(p + u_t^{\#e}, r_n(q, b_{i+1})), & \text{ако } q = M_t + u^{\#e} \\ \delta_e^{D,\chi}(p + u_s^{\#e}, r_n(q, b_{i+1})), & \text{ако } q = M_s + u^{\#e} \end{cases}$$

От $p+u = j$ и $r_n(q, b_{i+1}) = \beta(x_{i+1}, w_{[\pi]})$ следва, че $\Delta'_M = \delta_e^{D,\chi}(\pi, \beta(x_{i+1}, w_{[\pi]})) = \delta_e^{D,\chi}(\pi, x_{i+1})$.

$\delta_e^{\forall,\chi}(q, b_{i+1}) = M^\chi(\Delta_M) \subseteq M_s^\chi$.

2.1) $q_{i+1}^{\forall,\chi} \subseteq M_s^\chi$.

Следователно $s(i+1) = p$. Трябва да докажем 1^*. $d(\delta_e^{\forall,\chi}(q, b_{i+1}), s(i+1)) = d(M^\chi(\Delta_M), p) = d(\{M_{(t|s)} + a^{\#b} | a_{(t|s)}^{\#b} \in \Delta_M\}, p) = \{p + a_{(t|s)}^{\#b} | a_{(t|s)}^{\#b} \in \Delta_M\} =_{\textit{Твърдение 18}} \Delta'_M = \delta_e^{D,\chi}(\pi, x_{i+1})$.

2.2) $q_{i+1}^{\forall,\chi} \subseteq I_s^\chi$

От $q_i^{\forall,\chi} \subseteq M_s^\chi$ следва, че $|b_{i+1}| = p - i + n$. $s(i+1) = i + 1$. Трябва да докажем 2^*. $d(m_n(\delta_e^{\forall,\chi}(q, b_{i+1}), |b_{i+1}|), s(i+1)) = d(m_n(M^\chi(\Delta_M), |b_{i+1}|), s(i+$

$1)) = d(m_n(\{M_{(t|s)} + a^{\#b} | a^{\#b}_{(t|s)} \in \Delta_M\}, p - i + n), i + 1) = d(\{I_{(t|s)} + p - i + n - n - 1 + a^{\#b} | a^{\#b}_{(t|s)} \in \Delta_M\}, i + 1) = \{p + a^{\#b}_{(t|s)} | a^{\#b}_{(t|s)} \in \Delta_M\} =_{\textit{Твърдение 18}} \Delta'_M = \delta^{D,\chi}_e(\pi, x_{i+1})$.

Помощното твърдение е доказано.

Ще докажем, че $d(q^{\forall,\chi}_{i+1}, s(i+1)) = q^{D,\chi}_{i+1}$.

Нека $\Delta = \bigsqcup_{q \in q_i} \delta^{\forall,\chi}_e(q, b_{i+1})$

1) $f_n(rm(\Delta), |b_{i+1}|) = false$

$d(q^{\forall,\chi}_{i+1}, s(i+1)) =$
$d(\bigsqcup_{q \in q^{\forall,\chi}_i} \delta^{\forall,\chi}_e(q, b_{i+1}), s(i+1)) =$
$\bigsqcup_{q \in q^{\forall,\chi}_i} d(\delta^{\forall,\chi}_e(q, b_{i+1}), s(i+1)) =_{1^* \,\&\, d(q^{\forall,\chi}_i, s(i)) = q^{D,\chi}_i}$
$\bigsqcup_{\pi \in q^{D,\chi}_i} \delta^{D,\chi}_e(\pi, x_{i+1}) = q^{D,\chi}_{i+1}$

2) $f_n(rm(\Delta), |b_{i+1}|) = true$

$d(q^{\forall,\chi}_{i+1}, s(i+1)) =$
$d(m_n(\bigsqcup_{q \in q^{\forall,\chi}_i} \delta^{\forall,\chi}_e(q, b_{i+1}), |b_{i+1}|), s(i+1)) =$
$\bigsqcup_{q \in q^{\forall,\chi}_i} d(m_n(\delta^{\forall,\chi}_e(q, b_{i+1}), |b_{i+1}|), s(i+1)) =_{2^* \,\&\, d(q^{\forall,\chi}_i, s(i)) = q^{D,\chi}_i}$
$\bigsqcup_{\pi \in q^{D,\chi}_i} \delta^{D,\chi}_e(\pi, x_{i+1}) = q^{D,\chi}_{i+1}$

II) е доказано.

I) индукция по i

1) $i = 0$

$!q^{\forall,\chi}_i$ и $!q^{D,\chi}_i$

2) Допускаме, че $!q^{\forall,\chi}_i \Leftrightarrow !q^{D,\chi}_i$

Ще докажем, че $!q^{\forall,\chi}_{i+1} \Leftrightarrow !q^{D,\chi}_{i+1}$.

2.1) $\neg !q^{\forall,\chi}_i$ и $\neg !q^{D,\chi}_i$

Следователно $\neg !q^{\forall,\chi}_{i+1}$ и $\neg !q^{D,\chi}_{i+1}$.

2.2) $!q^{\forall,\chi}_i$ и $!q^{D,\chi}_i$

Ще докажем, че $|b_{i+1}| \in \triangledown_a(q^{\forall,\chi}_i)$.

2.2.1) $q^{\forall,\chi}_i \subseteq I^{\chi}_s$

2.2.1.1) $q^{\forall,\chi}_i = \{I^{\#0}\}$

В доказателството на *Помощното твърдение* доказахме, че ако $q \in q^{\forall,\chi}_i$, то $!r_n(q, b_{i+1})$. Следователно $!r_n(I^{\#0}, b_{i+1})$. Следователно $|b_{i+1}| \geq n$. Следователно $|b_{i+1}| \in \triangledown_a(q^{\forall,\chi}_i)$.

2.2.1.2) $q^{\forall,\chi}_i \neq \{I^{\#0}\}$

Следователно $i > 0$ и $!q^{\forall,\chi}_{i-1}$. Допускаме, че $|b_{i+1}| \notin \triangledown_a(q^{\forall,\chi}_i)$. Следователно $|b_{i+1}| < 2n + i - e + 1$, където $rm(q^{\forall,\chi}_i) = I + i^{\#e}$. $e \geq |i|$. Следователно $|b_{i+1}| \leq 2n$. Следователно $|b_i| \leq 2n + 1$.

2.2.1.2.1) $q^{\forall,\chi}_{i-1} \subseteq I^{\chi}_s$

От дефиницията на $\delta^{\forall,\chi}_n$ следва, че $\neg f_n(rm(q^{\forall,\chi}_i), |b_i|)$. Следователно $\neg f_n(I + i^{\#e}, |b_i|)$. Но $|b_i| \leq 2n+1$ и $e \leq i + 2n + 1 - |b_i|$. Следователно $f_n(I + i^{\#e}, |b_i|)$. Противоречие.

2.2.1.2.2) $q_{i-1}^{\forall,\chi} \subseteq M_s^\chi$

От дефиницията на $\delta_n^{\forall,\chi}$ и $m_n(M+i+n+1-|b_i|^{\#e},|b_i|) = I+i^{\#e}$ следва, че $f_n(M+i+n+1-|b_i|^{\#e},|b_i|)$. Но от $|b_{i+1}| < 2n+i-e+1$, $|b_{i+1}| \leq 2n$ и $|b_i| \leq 2n+1$ следва, че $e \leq i+n+1-|b_i|+n$. Следователно $\neg f_n(M+i+n+1-|b_i|^{\#e},|b_i|)$. Противоречие.

2.2.2) $q_i^{\forall,\chi} \subseteq M_s^\chi$

Следователно $s(i) = p$ и $|b_{i+1}| = p-i+n$. Допускаме, че $|b_{i+1}| \notin \bigtriangledown_a(q_i^{\forall,\chi})$. Нека q е такова, че $q \in q_i^{\forall,\chi}$ и $if(|b_{i+1}| < n, M^{\#n-|b_{i+1}|}, M+n-|b_{i+1}|^{\#0}) \not\leq_s^\chi q$. (От $|b_{i+1}| \notin \bigtriangledown_a(q_i^{\forall,\chi})$ следва, че такова q съществува.) Нека $\pi = d(q,s(i))$. От II) следва, че $d(q_i^{\forall,\chi},s(i)) = q_i^{D,\chi}$. Следователно $\pi \in q_i^{D,\chi}$ и $if(p < i, p^{\#i-p}, i^{\#0}) \not\leq_s^\chi \pi$. От доказателството за коректност на $\delta_n^{D,\chi}$ следва, че $\forall\pi \in q_i^{D,\chi}(if(p<i,p^{\#i-p},i^{\#0}) \leq_s^\chi \pi)$. Противоречие.

Доказахме, че $|b_{i+1}| \in \bigtriangledown_a(q_i^{\forall,\chi})$. От $|b_{i+1}| \in \bigtriangledown_a(q_i^{\forall,\chi})$, II) и дефиницията на $\delta_n^{\forall,\chi}$ следва, че ако $\forall q \in q_i^{\forall,\chi}\forall\pi(\pi = d(q,s(i)) \Rightarrow (\delta_e^{\forall,\chi}(q,b_{i+1}) = \phi \Leftrightarrow \delta_e^{D,\chi}(\pi,x_{i+1}) = \phi))$, то $!q_{i+1}^{\forall,\chi} \Leftrightarrow !q_{i+1}^{D,\chi}$. Ще докажем $\forall q \in q_i^{\forall,\chi}\forall\pi(\pi = d(q,s(i)) \Rightarrow (\delta_e^{\forall,\chi}(q,b_{i+1}) = \phi \Leftrightarrow \delta_e^{D,\chi}(\pi,x_{i+1}) = \phi))$. Нека $q = I_{(t|s)} + u^{\#e} \in q_i^{\forall,\chi}$ или $q = M_{(t|s)} + u^{\#e} \in q_i^{\forall,\chi}$ и $\pi = d(q,s(i))$. В доказателството на *Помощното твърдение* доказахме, че $!r_n(q,b_{i+1})$ и $r_n(q,b_{i+1}) = \beta(x_{i+1},w_{[\pi]})$. Следователно $\delta_e^{\forall,\chi}(q,b_{i+1}) = \phi \Leftrightarrow \delta_e^{D,\chi}(u_{(s|t)}^{\#e}, r_n(q,b_{i+1})) = \phi \Leftrightarrow \delta_e^{D,\chi}(u+s(i)_{(s|t)}^{\#e}, r_n(q,b_{i+1})) = \phi \Leftrightarrow \delta_e^{D,\chi}(\pi,x_{i+1}) = \phi$. I) е доказано.

III) Нека $i > 0$, $!q_i^{\forall,\chi}$ и $!q_i^{D,\chi}$

$\Rightarrow$) Ще докажем, че $q_i^{\forall,\chi} \in F_n^{\forall,\chi} \Rightarrow q_i^{D,\chi} \in F_n^{D,\chi}$

Нека $q_i^{\forall,\chi} \in F_n^{\forall,\chi}$. Следователно $s(i) = p$ и $\exists q \in q_i^{\forall,\chi}(q \leq_s^\chi M^{\#n})$. Нека $M+u^{\#f} \in q_i^{\forall,\chi}$ и $M+u^{\#f} \leq_s^\chi M^{\#n}$. От II) следва, че $p+u^{\#f} \leq_s^\chi p^{\#n}$ и $p+u^{\#f} \in q_i^{D,\chi}$. Следователно $q_i^{D,\chi} \in F_n^{D,\chi}$.

$\Leftarrow$) Ще докажем, че $q_i^{\forall,\chi} \notin F_n^{\forall,\chi} \Rightarrow q_i^{D,\chi} \notin F_n^{D,\chi}$

Нека $q_i^{\forall,\chi} \notin F_n^{\forall,\chi}$. От $i > 0$ следва, че $!q_{i-1}^{\forall,\chi}$. От II) и от дефиницията на $\delta_n^{D,\chi}$ следва, че $\forall q \in q_{i-1}^{\forall,\chi}\exists\pi(\pi = d(q,s(i-1))\ \&\ \delta_e^{D,\chi}(\pi,x_i) \notin F_n^{D,\chi}) \Rightarrow q_i^{D,\chi} \notin F_n^{D,\chi}$. Ще докажем, че $\forall q \in q_{i-1}^{\forall,\chi}\exists\pi(\pi = d(q,s(i-1))\ \&\ \delta_e^{D,\chi}(\pi,x_i) \notin F_n^{D,\chi})$. Нека $q \in q_{i-1}^{\forall,\chi}$ и $\pi = d(q,s(i-1))$.

1) $q = I+u^{\#e}$ или $q = I_t+u^{\#e}$ или $q = I_s+u^{\#e}$

Следователно $q_{i-1}^{\forall,\chi} \subseteq I_s^\chi$

1.1) $\delta_e^{\forall,\chi}(q,b_i) = \phi$

От *Помощното твърдение* в доказателтсвото на II) следва, че $\delta_e^{D,\chi}(\pi,x_i) = \phi \notin F_n^{D,\chi}$

1.2) $\delta_e^{\forall,\chi}(q,b_i) \neq \phi$

Нека

$$\Delta_I = \begin{cases} \delta_e^{D,\chi}(u^{\#e}, r_n(I+u^{\#e},x)), & \text{ако } q = I+u^{\#e} \\ \delta_e^{D,\chi}(u_t^{\#e}, r_n(I_t+u^{\#e},x)), & \text{ако } q = I_t+u^{\#e} \\ \delta_e^{D,\chi}(u_s^{\#e}, r_n(I_s+u^{\#e},x)), & \text{ако } q = I_s+u^{\#e} \end{cases}$$

Следователно $\neg f_n(rm(I^\chi(\Delta_I)),|b_i|)$. (Ако $f_n(rm(I^\chi(\Delta_I)),|b_i|)$, то $f_n(rm(\bigsqcup_{\eta\in q_{i-1}^{\forall,\chi}}\delta_e^{\forall,\chi}(\eta,b_i)),|b_i|)$ и $q_i^{\forall,\chi}\in F_n^{\forall,\chi}$. Противоречие.)

1.2.1) $|b_i| = 2n+2$

Следователно $i+n+1\le p$. От II), $I^{\#0}\le_s^\chi q$ и $s(i-1)=i-1$ следва, че $i-1^{\#0}\le_s^\chi \pi$. От доказателството за коректност на $\delta_n^{D,\chi}$ следва, че $\forall x\in \delta_e^{D,\chi}(\pi,x_i)(i^{\#0}\le_s^\chi x)$. Следователно $\delta_e^{D,\chi}(\pi,x_i)\notin F_n^{D,\chi}$.

1.2.2) $|b_i|\le 2n+1$

Следователно $|b_i| = p+n-i+1$. Нека $rm(I^\chi(\Delta_I)) = I+a^{\#b}$. Следователно $b > a+2n+1-(p+n-i+1)$. Следователно $b>a+n+i-p$. Очевидно ако $d(I+a^{\#b},s(i))\notin F_n^{ND,\chi}$, то $\delta_e^{D,\chi}(\pi,x_i)\notin F_n^{D,\chi}$. Ще докажем, че $d(I+a^{\#b},s(i))\notin F_n^{ND,\chi}$. $s(i)=i$. $d(I+a^{\#b},s(i)) = i+a^{\#b}$. От $b>a+n+i-p$ следва, че $i+a^{\#b}\notin F_n^{ND,\chi}$. Следователно $\delta_e^{D,\chi}(\pi,x_i)\notin F_n^{D,\chi}$.

2) $q=M+u^{\#e}$ или $q=M_t+u^{\#e}$ или $q=M_s+u^{\#e}$

Следователно $q_{i-1}^{\forall,\chi}\subseteq M_s^\chi$

2.1) $\delta_e^{\forall,\chi}(q,b_i)=\phi$

От *Помощното твърдение* в доказателтсвото на II) следва, че $\delta_e^{D,\chi}(\pi,x_i) = \phi\notin F_n^{D,\chi}$

2.2) $\delta_e^{\forall,\chi}(q,b_i)\ne\phi$

Нека

$$\Delta_M = \begin{cases} \delta_e^{D,\chi}(i^{\#e}, r_n(M+i^{\#e},x)), & \text{ако } q=M+i^{\#e} \\ \delta_e^{D,\chi}(i_t^{\#e}, r_n(M_t+i^{\#e},x)), & \text{ако } q=M_t+i^{\#e} \\ \delta_e^{D,\chi}(i_s^{\#e}, r_n(M_s+i^{\#e},x)), & \text{ако } q=M_s+i^{\#e} \end{cases}$$

Следователно $f_n(rm(M^\chi(\Delta_M)),|b_i|)$. (Ако $\neg f_n(rm(M^\chi(\Delta_M)),|b_i|)$, то $\neg f_n(rm(\bigsqcup_{\eta\in q_{i-1}^{\forall,\chi}}\delta_e^{\forall,\chi}(\eta,b_i)),|b_i|)$ и $q_i^{\forall,\chi}\in F_n^{\forall,\chi}$. Противоречие.)

Нека $rm(I^\chi(\Delta_I)) = M+a^{\#b}$. Следователно $b>a+n$. Очевидно ако $d(m_n(M+a^{\#b},|b_i|),s(i))\notin F_n^{ND,\chi}$, то $\delta_e^{D,\chi}(\pi,x_i)\notin F_n^{D,\chi}$. Ще докажем, че $d(m_n(M+a^{\#b},|b_i|),s(i))\notin F_n^{ND,\chi}$. $s(i)=i$. $|b_i|=n+p-i+1$. $d(m_n(M+a^{\#b},|b_i|),s(i)) = d(I+a-n-1+|b_i|^{\#b},s(i)) = d(I+a+p-i^{\#b},s(i)) = a+p^{\#b}$. От $b>a+n$ следва, че $a+p^{\#b}\notin F_n^{ND,\chi}$. Следователно $\delta_e^{D,\chi}(\pi,x_i)\notin F_n^{D,\chi}$. III) е доказано.

5. Построяване на $A_n^{\forall,\epsilon}$, $A_n^{\forall,t}$ и $A_n^{\forall,ms}$.

5.1. Кратко описание на алгоритъма за построяване на $A_n^{\forall,\chi}$

```
procedure Build_Automaton( n, χ );
begin
  PUSH_IN_QUEUE( {I^#0} );
  while( not EMPTY_QUEUE() ) do begin
    st := POP_FROM_QUEUE();
    for b in Σ_n^∀ do begin
      if( LENGTH(b) ∈ ▽_a( st ) ) then begin
```

```
        nextSt := δ_n^{∀,χ}( st, b );
        if( not EMPTY_STATE( nextSt ) ) then begin
          if( HAS_NEVER_BEEN_PUSHED( nextSt ) ) then begin
            PUSH_IN_QUEUE( nextSt )
          end
          ADD_TRANSITION( < st, b, nextSt > )
        end
      end
    end
  end
end;
```

5.2. Подробно описание на алгоритъма за построяване на $A_n^{\forall,\chi}$

I) Типове

1) STATE : всяко крайно множество, елементите на което са от тип POSITION, е от тип STATE.

2) POSITION : всяка наредена четворка $< parameter, type, X, Y >$, където $parameter \in \{I, M\}$, $type \in \{usual, t, s\}$, $X, Y \in Z$ ($I = 0, M = 1, usual = 0, t = 1, s = 2$), е от тип POSITION.

3) SETOFPOINTS : всяко крайно множество, елементите на което са от тип POINT, е от тип SETOFPOINTS.

4) POINT : всяка наредена тройка $< type, X, Y >$, където $type \in \{usual, t, s\}$, $X, Y \in Z$, е от тип POINT.

II) API

```
1) PROCEDURE PUSH_IN_QUEUE( st : STATE );
```

Push-ва st в опашката $QUEUE$.

```
2) FUNCTION EMPTY_QUEUE() : BOOLEAN;
```

Връща $TRUE$, само ако опашката $QUEUE$ е празна.

```
3) FUNCTION POP_FROM_QUEUE() : STATE;
```

Pop-ва елемент от опашката $QUEUE$, ако тя не е празна. Ако тя е празна, връща $\{\}$.

```
4) FUNCTION HAS_NEVER_BEEN_PUSHED( st : STATE ) : BOOLEAN;
```

Връща $TRUE$, само ако st не е никога push-вано в опашката $QUEUE$.

```
5) FUNCTION NEW_POSITION( parameter : { I, M };
                          type : { usual, t, s };
                          x,y : INTEGER ) : POSITION;
```

Връща елемента от тип POSITION, определен от *parameter*, *type*, x и y.

```
6) FUNCTION GET_POSITION_PARAM( pos : POSITION ) : { I, M };
```

Връща *parameter*-а, на *pos*.

`7) FUNCTION GET_POSITION_TYPE( pos : POSITION ) : { usual, t, s };`

Връща *type*-а на *pos*.

`8) FUNCTION GET_POSITION_X( pos : POSITION ) : INTEGER;`

Връща X-а на *pos*.

`9) FUNCTION GET_POSITION_Y( pos : POSITION ) : INTEGER;`

Връща Y-а на *pos*.

`10) FUNCTION EMPTY_STATE( st : STATE ) : BOOLEAN;`

Връща $TRUE$, само ако *st* е празно.

`11) FUNCTION GET_FIRST_POSITION( st : STATE ) : POSITION;`

Връща някой (без значение кой) елемент на *st*.

`12) PROCEDURE ADD_TRANSITION( st : STATE; b : STRING; nextSt : STATE );`

Добавя $< st, b, nextSt >$ в автомата(графа) $AUTOMATON$.

`13) FUNCTION EMPTY_SET_OF_POINTS( set : SETOFPOINTS ) : BOOLEAN;`

Връща $TRUE$, само ако *set* е празно.

`14) FUNCTION NEW_POINT( type : { usual, t, s }; x,y : INTEGER ) : POINT;`

Връща елемента от тип POINT, определен от *type*, x и y.

`15) FUNCTION GET_POINT_TYPE( pt : POINT ) : { usual, t, s };`

Връща *type*-а на *pt*.

`16) FUNCTION GET_POINT_X( pt : POINT ) : INTEGER;`

Връща X-а на *pt*.

`17) FUNCTION GET_POINT_Y( pt : POINT ) : INTEGER;`

Връща Y-а на *pt*.

`18) FUNCTION SUB_STRING( s : STRING; startPos : INTEGER; length : INTEGER ) : STRING;`

Връща стринга $s[startPos]s[startPos+1]...s[startPos+length-1]$.

`19) VAR TYPE_OF_THE_AUTOMATON : { usual, t, ms };`

$usual = 0$, $t = 1$, $ms = 2$.

```
procedure Build_Automaton( n : INTEGER );
VAR st, nextSt : STATE;
    b          : STRING;
begin
  PUSH_IN_QUEUE( { NEW_POSITION( I, usual, 0, 0 ) } );
  while( not EMPTY_QUEUE() ) do begin
    st := POP_FROM_QUEUE();
    for b in { sym | sym : STRING and
```

```
                     1 <= LENGTH(sym) <= 2n+2 and
                     for all i( i in [1, LENGTH(sym)] =>
                                  ( sym[i] = 0 or sym[i] = 1 ) ) } do begin
      if( Length_Covers_All_The_Positions( n, LENGTH(b), st ) ) then begin
        nextSt := Delta( n, st, b );
        if( not EMPTY_STATE( nextSt ) ) then begin
          if( HAS_NEVER_BEEN_PUSHED( nextSt ) ) then begin
            PUSH_IN_QUEUE( nextSt )
          end
          ADD_TRANSITION( st, b , nextSt )
        end
      end
    end
  end
end;

function Length_Covers_All_The_Positions( n : INTEGER, k : INTEGER; st : STATE ) :
                                                                        BOOLEAN;
(* Length_Covers_All_The_Positions( n, k, st ) = true ⇔ k ∈ ▽a( st ) *)
VAR pos, pi, q : POSITION;
begin
  pos = GET_FIRST_POSITION(st);
  if( GET_POSITION_PARAM( pos ) = I ) then begin
    if( st = { NEW_POSITION( I, usual, 0, 0 ) } ) then begin
      return( k >= GET_POSITION_X( pos ) + n ) end
    else begin
      for pi in st do begin
        if( k < 2*n + GET_POSITION_X( pi ) - GET_POSITION_Y( pi ) + 1 ) then begin
          return( false )
        end
      end
    end
  else begin
    if( k < n ) then begin
      q := NEW_POSITION( M, usual, 0, n - k ) end
    else begin
      q := NEW_POSITION( M, usual, n - k, 0 )
    end
    for pi in st do begin
      if( pi <> q and ( not Less_Than_Subsume( q, pi ) ) ) then begin
        return( false )
      end
    end
  end
  return( true )
end;
```

```
function Delta( n : INTEGER; st : STATE; b : STRING ) : STATE;
(* Delta( n, st, b ) съответства на δn∀,χ( st, b ) *)
VAR bAdd           : BOOLEAN;
    nextSt, deltaE : STATE;
    q, pi, p       : POSITION;
begin
  nextSt := {};
  for q in st do begin
    deltaE = Delta_E( n, q, b );
    if( not EMPTY_STATE( deltaE ) ) then begin
      for pi in deltaE do begin
        bAdd := true;
        for p in nextSt do begin
          if( Less_Than_Subsume( pi, p ) ) then begin
            nextSt := nextSt \ {p} end
          else begin
            if( p = pi or Less_Than_Subsume( p, pi ) ) then begin
              bAdd := false;
              goto LABEL1
            end
          end
        end
        LABEL1 :
        if( bAdd ) then begin
          nextSt := nextSt U {pi}
        end
      end
    end
  end
  if( F( n, RM(nextSt), LENGTH(b) ) ) then begin
    nextSt := M( n, nextSt, LENGTH(b) )
  end
  return( nextSt )
end;

function Less_Than_Subsume( q1 : POSITION; q2 : POSITION ) : BOOLEAN;
(* Less_Than_Subsume( q1, q2 ) = true ⇔ q1 <sχ q2 *)
VAR m : INTEGER;
begin
  if( GET_POSITION_TYPE(q1) <> usual or GET_POSITION_Y(q2) <= GET_POSITION_Y(q1) )
  then begin
    return( false )
  end
  if( GET_POSITION_TYPE(q2) = t ) then begin
    m = GET_POSITION_X(q2) + 1 - GET_POSITION_X(q1) end
```

```
  else begin
    m = GET_POSITION_X(q2) - GET_POSITION_X(q1)
  end
  if( m < 0 ) then begin
    m = -m
  end
  return( m <= GET_POSITION_Y(q2) - GET_POSITION_Y(q1) )
end;

function Delta_E( n : INTEGER, q : POSITION, b : STRING ) : STATE;
(* Delta_E( n, q, b ) съответства на δ_e^{∀,χ}( q, b ) *)
var deltaED : SETOFPOINTS;
    st      : STATE;
    pi      : POINT;
begin
  deltaED := Delta_E_D( n,
                        NEW_POINT( GET_POSITION_TYPE(q),
                                   GET_POSITION_X(q),
                                   GET_POSITION_Y(q) ),
                        R(n, q, b) );
  if( EMPTY_SET_OF_POINTS( deltaED ) ) then begin
    return( {} )
  end
  st := {};
  if( GET_POSITION_PARAM( q ) = I ) then begin
    for pi in deltaED do begin
      st := st U { NEW_POSITION( I,
                                 GET_POINT_TYPE( pi ),
                                 GET_POINT_X( pi ) - 1,
                                 GET_POINT_Y( pi ) ) }
    end end
  else begin
    for pi in deltaED do begin
      st := st U { NEW_POSITION( M,
                                 GET_POINT_TYPE( pi ),
                                 GET_POINT_X( pi ),
                                 GET_POINT_Y( pi ) ) }
    end end
  end
  return( st )
end;

function M( n : INTEGER; st : STATE; k : INTEGER ) : STATE;
(* M( n, st, k ) съответства на m_n( st, k ) *)
VAR m  : STATE;
    pi : POSITION;
```

```
begin
  m = {};
  for pi in st do begin
    if( GET_POSITION_PARAM(pi) = I ) then begin
      m := m U { NEW_POSITION( M,
                               GET_POSITION_TYPE(pi),
                               GET_POSITION_X(pi) + n + 1 - k,
                               GET_POSITION_Y(pi) ) } end
    else begin
      m := m U { NEW_POSITION( I,
                               GET_POSITION_TYPE(pi),
                               GET_POSITION_X(pi) - n - 1 + k,
                               GET_POSITION_Y(pi) ) } end
    end
  end
  return(m)
end;

function R( n : INTEGER; pos : POSITION; b : STRING ) : STRING;
(* R( n, pos, b ) съответства на r_n( pos, b ) *)
VAR len : INTEGER;
begin
  if( GET_POSITION_PARAM( pos ) = I ) then begin
    if( n - GET_POSITION_Y(pos) + 1 < LENGTH(b) - n - GET_POSITION_X(pos) ) then begin
      len := n - GET_POSITION_Y(pos) + 1 end
    else begin
      len := LENGTH(b) - n - GET_POSITION_X(pos)
    end
    return( SUB_STRING( b, n + GET_POSITION_X(pos) + 1, len ) )
  end
  if( n - GET_POSITION_Y(pos) + 1 < -GET_POSITION_X(pos) ) then begin
    len := n - GET_POSITION_Y(pos) + 1 end
  else begin
    len := -GET_POSITION_X(pos)
  end
  return( SUB_STRING( b, LENGTH(b) + GET_POSITION_X(pos) + 1, len ) )
end;

function RM( st : STATE ) : POSITION;
(* RM( st ) съответства на rm( st ) *)
VAR pi, rm : POSITION;
begin
  for pi in st do begin
    if( GET_POSITION_TYPE(pi) = usual ) then begin
      rm := pi
    end
```

```
  end
  for pi in st do begin
    if( GET_POSITION_TYPE(pi) = usual and
        GET_POSITION_X(pi) - GET_POSITION_Y(pi) >
        GET_POSITION_X(rm) - GET_POSITION_Y(rm) ) then begin
      rm := pi
    end
  end
  return( rm )
end;

function F( n : INTEGER; pos : POSITION; k : INTEGER ) : BOOLEAN;
(* F( n, pos, k ) съответства на $f_n$( pos, k ) *)
begin
  if( GET_POSITION_PARAM(pos) = I ) then begin
    return( k <= 2*n + 1 and
            GET_POSITION_Y(pos) <= GET_POSITION_X(pos) + 2*n + 1 - k )
  end
  return( GET_POSITION_Y(pos) > GET_POSITION_X(pos) + n )
end;

function Delta_E_D( n : INTEGER; pt : POINT; h : STRING ) : SET_OF_POINTS;
(* Delta_E_D( n, pt, h ) съответства на $\delta_e^{D,\chi}$( pt, h ) *)
VAR x,y,j,posOfFirst1 : INTEGER;
begin
  x := GET_POINT_X(pt)
  y := GET_POINT_Y(pt)
  if( TYPE_OF_THE_AUTOMATON = usual ) then begin
    if( LENGTH(h) = 0 ) then begin
      if( y < n ) then begin
        return( { NEW_POINT(x, y+1, usual) } )
      end
      return( {} )
    end
    if( h[1] = 1 ) then begin
      return( { NEW_POINT(x+1, y, usual) } )
    end
    if( LENGTH(h) = 1 ) then begin
      if( y < n ) then begin
        return( { NEW_POINT(x, y+1, usual),
                  NEW_POINT(x+1, y+1, usual) } )
      end
      return( {} )
    end
    posOfFirst1 := 0;
    for j := 2 to LENGTH(h) do begin
```

```
    if( h[j] = 1 ) then begin
      posOfFirst1 := j;
      goto LABEL2
    end
  end
  LABEL2 :
  if( posOfFirst1 = 0 ) then begin
    return( { NEW_POINT(x, y+1, usual),
              NEW_POINT(x+1, y+1, usual) } )
  end
  return( { NEW_POINT(x, y+1, usual),
            NEW_POINT(x+1, y+1, usual),
            NEW_POINT(x+j, y+j-1, usual) } ) end
else begin
  if( TYPE_OF_THE_AUTOMATON = t ) then begin
    if( GET_POINT_TYPE(pt) = t ) then begin
      if( h[1] = 1 ) then begin
        return( { NEW_POINT(x+2, y) } )
      end
      return( {} )
    end
    if( LENGTH(h) = 0 ) then begin
      if( y < n ) then begin
        return( { NEW_POINT(x, y+1, usual) } )
      end
      return( {} )
    end
    if( h[1] = 1 ) then begin
      return( { NEW_POINT(x+1, y, usual) } )
    end
    if( LENGTH(h) = 1 ) then begin
      if( y < n ) then begin
        return( { NEW_POINT(x, y+1, usual),
                  NEW_POINT(x+1, y+1, usual) } )
      end
      return( {} )
    end
    if( h[2] = 1 ) then begin
      return( { NEW_POINT(x, y+1, usual),
                NEW_POINT(x+1, y+1, usual),
                NEW_POINT(x+2, y+1, usual),
                NEW_POINT(x, y+1, t) } )
    end
    posOfFirst1 := 0;
    for j := 3 to LENGTH(h) do begin
      if( h[j] = 1 ) then begin
```

```
        posOfFirst1 := j;
        goto LABEL3
      end
    end
    LABEL3 :
    if( posOfFirst1 = 0 ) then begin
      return( { NEW_POINT(x, y+1, usual),
                NEW_POINT(x+1, y+1, usual) } )
    end
    return( { NEW_POINT(x, y+1, usual),
              NEW_POINT(x+1, y+1, usual),
              NEW_POINT(x+j, y+j-1, usual) } )
  end
end
if( GET_POINT_TYPE(pt) = s ) then begin
  return( { NEW_POINT(x+1, y) } )
end
if( LENGTH(h) = 0 ) then begin
  if( y < n ) then begin
    return( { NEW_POINT(x, y+1, usual) } )
  end
  return( {} )
end
if( h[1] = 1 ) then begin
  return( { NEW_POINT(x+1, y, usual) } )
end
if( LENGTH(h) = 1 ) then begin
  if( y < n ) then begin
    return( { NEW_POINT(x, y+1, usual),
              NEW_POINT(x+1, y+1, usual),
              NEW_POINT(x, y+1, s) } )
  end
end
return( { NEW_POINT(x, y+1, usual),
          NEW_POINT(x+1, y+1, usual),
          NEW_POINT(x+2, y+1, usual),
          NEW_POINT(x, y+1, s) } )
end;
```

5.3. Оценка на сложността

Ще дадем оценка за броя на състоянията на $A_n^{\forall,\chi}$.
1) $\chi = \epsilon$
1.1) Ще дадем оценка за $|I^{\epsilon}_{states}|$
Нека $f : I^{\epsilon}_s \to [1, 2n+1]$, като

$f(I + i^{\#e}) \stackrel{def}{=} i + e + 1$.

Нека $g : I^{\epsilon}_{states} \rightarrow \{0, 1, ..., 2n+1\}^*$, като за всяко $A \in I^{\epsilon}_{states}$ и всяко $j \in [1, 2n+1]$ е изпълнено, че $|g(A)| = 2n+1$ и

$$g(A)_j = \begin{cases} 0, & \text{ако } A \bigcap A_j = \phi \\ f(\pi), & \text{ако } \pi \in A \bigcap A_j \end{cases}$$

където $A_j = \{I - n + j - 1 - t^{\#n-t} | 0 \leq t < j + 1 \ div \ 2\}$ и $a \ div \ b =$ цялата част, която получаваме, когато делим a на b.

Очевидно g е инекция и $\forall k \in [1, 2n+1] \forall A \in I_{states}(g(A)_k \neq 0 \ \& \ 1 \leq r < k \Rightarrow g(A)_k > g(A)_r)$.

Следователно $|I^{\epsilon}_{states}| \leq |W|$, където $W = \{w | w \in \{0, 1, ..., 2n+1\}^* \& |w| = 2n+1 \ \& \ \forall k \in [1, 2n+1] \forall r \in [1, k-1](w_k \neq 0 \Rightarrow w_k > w_r)\}$.

Очевидно

$$|W| = \sum_{k=1}^{2n+1} \left(\begin{array}{c} 2n+1 \\ k \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{c} 2(2n+1) \\ 2n+1 \end{array} \right) - 1 < \frac{[2(2n+1)]!}{(2n+1)!(2n+1)!}$$

Като използваме формулата на Стирлинг, получаваме, че

$$|W| = O(\frac{\sqrt{(2n+1)} \ (4n+2)^{4n+2} e^{-(4n+2)}}{(2n+1)(2n+1)^{4n+2} e^{-(4n+2)}}) = O(2^{4n - \log_2 \sqrt{2n+1}})$$

Следователно $|I^{\epsilon}_{states}| = O(2^{4n - \log_2 \sqrt{2n+1}})$

1.2) Ще дадем оценка за $|M^{\epsilon}_{states}|$

Очевидно

$$M^{\epsilon}_{states} = \bigcup_{k=0}^{n} \{A_k\}$$

където $A_k = \{A | A \in M^{\epsilon}_{states} \ \& \ \exists t (0 \leq t \leq k \ \& \ rm(A) = M - k + t^{\#t})\}$. Очевидно $\forall k \in [0, n](|A_k| < |A_n|)$ и $|A_n| < |I^{\epsilon}_{states}|$. $|A_0| = 1$. Следователно $|M^{\epsilon}_{states}| = O(n 2^{4n - \log_2 \sqrt{2n+1}})$.

2) $\chi = ms$

От *Твърдение* 21 следва, че

$$|I^{ms}_{states}| \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \left(\begin{array}{c} 2n+1 \\ k \end{array} \right)^2 2^k = O(2^{2n} \sum_{k=1}^{2n+1} \left(\begin{array}{c} 2n+1 \\ k \end{array} \right)^2) = O(2^{6n - \log_2 \sqrt{2n+1}})$$

Очевидно $|M^{ms}_{states}| = O(n 2^{6n - \log_2 \sqrt{2n+1}})$.

3) $\chi = t$

Очевидно $|I^{t}_{states}| = O(2^{6n - \log_2 \sqrt{2n+1}})$ и $|M^{t}_{states}| = O(n 2^{6n - \log_2 \sqrt{2n+1}})$.

Размерът на паметта, която ще използва процедурата $Build\_Automaton$ е $O(|I^{\chi}_{states}| + |M^{\chi}_{states}|)$. (Не отчитаме паметта, която се използва за записване на изхода $AUTOMATON$.) Броят стъпки, за които ще завърши процедурата $Build\_Automaton$, е $O(n^2(|I^{\chi}_{states}| + |M^{\chi}_{states}|))$.

5.4. Някои крайни резултати

$\chi = \epsilon$			
n	$\lvert I^{\epsilon}_{states}\rvert$	$\lvert M^{\epsilon}_{states}\rvert$	$\lvert\{< q_1, b, q_2 > \mid !\delta^{\forall,\epsilon}_n(q_1, b) \,\&\, q_2 = \delta^{\forall,\epsilon}_n(q_1, b)\}\rvert$
1	8	6	163
2	50	40	5073
3	322	280	144133
4	2187	2025	4067325
5	15510	15026	116976045
6	113633	113841	3445035693

$\chi = t$			
n	$\lvert I^{t}_{states}\rvert$	$\lvert M^{t}_{states}\rvert$	$\lvert\{< q_1, b, q_2 > \mid !\delta^{\forall,t}_n(q_1, b) \,\&\, q_2 = \delta^{\forall,t}_n(q_1, b)\}\rvert$
1	9	7	187
2	66	54	6805
3	508	448	229025
4	4155	3884	7730973
5	35584	34711	267593313
6	315199	317409	9515031337

$\chi = ms$			
n	$\lvert I^{ms}_{states}\rvert$	$\lvert M^{ms}_{states}\rvert$	$\lvert\{< q_1, b, q_2 > \mid !\delta^{\forall,ms}_n(q_1, b) \,\&\, q_2 = \delta^{\forall,ms}_n(q_1, b)\}\rvert$
1	9	8	197
2	76	75	8307
3	676	725	317039
4	6339	7214	12126471
5	61914	73566	476227735

6. Минималност на $A^{\forall,\epsilon}_n$, $A^{\forall,t}_n$ и $A^{\forall,ms}_n$.

Твърдение 20 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $n \in N$ и $A \in I^{\chi}_{states}$. Тогава $\exists b \in \Sigma^{\forall}_n(!\delta^{\forall,\chi}_n(A, b) \,\&\, \delta^{\forall,\chi}_n(A, b) \in M^{\chi}_{states})$.

Доказателство Нека k е най-малкият елемент на $\bigtriangledown_a(A)$. Очевидно $\delta^{\forall,\chi}_n(A, 1^k) \in M^{\chi}_{states}$.

Твърдение 21
1) $A \in I^{t}_{states} \,\&\, I + i^{\#e}_t \in A \Rightarrow I + i + 1^{\#e} \in A$
2) $A \in M^{t}_{states} \,\&\, M + i^{\#e}_t \in A \Rightarrow M + i + 1^{\#e} \in A$
3) $A \in I^{ms}_{states} \,\&\, I + i^{\#e}_s \in A \Rightarrow I + i^{\#e} \in A$
4) $A \in M^{ms}_{states} \,\&\, M + i^{\#e}_s \in A \Rightarrow M + i^{\#e} \in A$

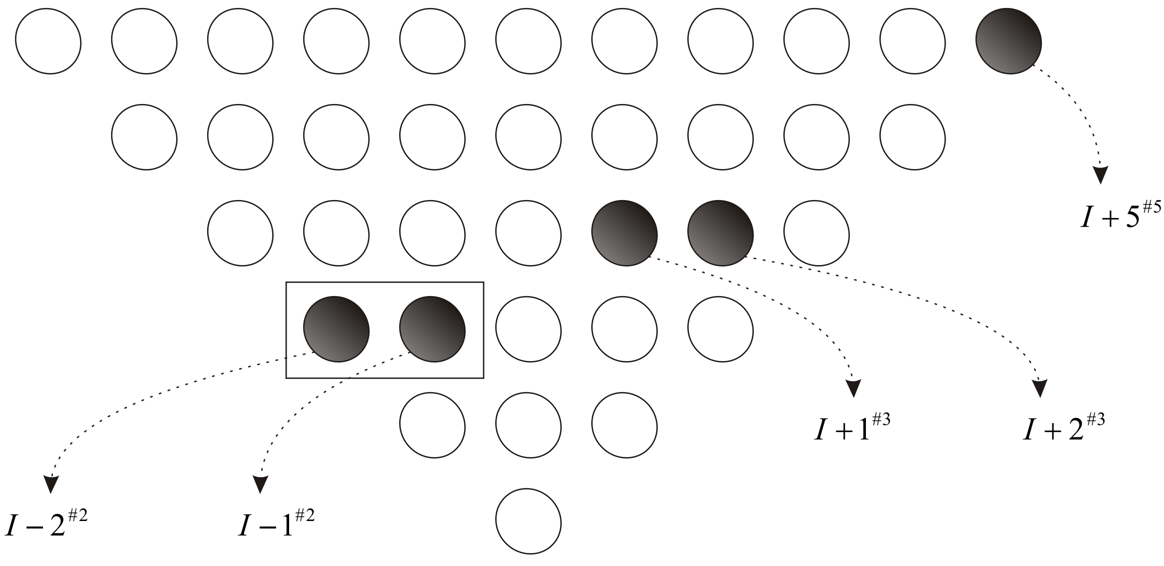
Доказателство

1) Нека $A \in I^t_{states}$ и $I + i^{\#e}_t$. Следователно $\exists B \in I^t_{states} \bigcup M^t_{states} \exists x \in \Sigma^{\forall}_n(\delta^{\forall,t}_n(B,x) = A)$. Нека $B \in I^t_{states} \bigcup M^t_{states}$ и $x \in \Sigma^{\forall}_n$ са такива, че $\delta^{\forall,t}_n(B,x) = A$. Следователно $\exists \pi \in B(I + i^{\#e}_t \in \delta^{\forall,t}_e(\pi,x) \vee I + i^{\#e}_t \in m_n(\delta^{\forall,t}_e(\pi,x),|x|))$. Нека $\pi \in B$, като $I + i^{\#e}_t \in \delta^{\forall,t}_e(\pi,x)$ или $I + i^{\#e}_t \in m_n(\delta^{\forall,t}_e(\pi,x),|x|))$. Следователно $I + i + 1^{\#e} \in \delta^{\forall,t}_e(\pi,x)$ или $I + i + 1^{\#e} \in m_n(\delta^{\forall,t}_e(\pi,x),|x|))$. От $I + i^{\#e}_t \in A$ следва, че $\neg\exists\pi' \in A(\pi' <^t_s I + i + 1^{\#e})$ (ако допуснем, че $\pi' \in A$ и $\pi' <^t_s I + i + 1^{\#e}$, то $\pi' <^t_s I + i^{\#e}_t$ - противоречие). Следователно $I + i + 1^{\#e} \in A$.

2), 3) и 4) се доказват аналогично на 1).

Твърдение 22 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $n \in N$. Тогава $\forall A, B \in I^{\chi}_{states}(L(A) = L(B) \Rightarrow A = B)$.

Доказателство
Ще дефинираме $y : I^{\chi}_s \to N$.
$y(I + i^{\#e}) \stackrel{def}{=} e$
$y(I + i^{\#e}_t) \stackrel{def}{=} e$
$y(I + i^{\#e}_s) \stackrel{def}{=} e$
Ще дефинираме $min : P(I^{\chi}_s) \to P(I^{\chi}_s)$.
$min(X) \stackrel{def}{=} \{\pi | \pi \in X \,\&\, \forall \pi' \in X(y(\pi') \geq y(\pi))\}$



Фиг. 18 $n = 5$,
$min(\{I - 2^{\#2}, I - 1^{\#2}, I + 1^{\#3}, I + 2^{\#3}, I + 5^{\#5}\}) = \{I - 2^{\#2}, I - 1^{\#2}\}$

Помощно твърдение $\forall A, B \in I^{\chi}_{states}(L(A) = L(B) \Rightarrow min(A) = min(B))$

Доказателство Нека $A, B \in I^{\chi}_{states}$ и $L(A) = L(B)$. Ще дефинираме $MIN : I^{\chi}_{states} \to N$.

$MIN(X) = e \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \pi \in min(X)(y(\pi) = e)$

(Очевидно дефиницията на MIN е коректна, защото $X \in I^{\chi}_{states} \Rightarrow min(X) \neq \phi$ и $\pi_1 \in min(X) \;\&\; \pi_2 \in min(X) \Rightarrow y(\pi_1) = y(\pi_2)$.)

Допускаме, че $min(A) \neq min(B)$.

1) $MIN(A) < MIN(B)$

Ще построим редици $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$, така че

$\forall i \in N($
$A_i \in I^{\chi}_{states} \;\&$
$B_i \in I^{\chi}_{states} \;\&$
$MIN(A_i) = MIN(A) + i \;\&$
$MIN(B_i) = MIN(B) + i \;\&$
$L(A_i) = L(B_i))$.

$A_0 = A$, $B_0 = B$. Нека A_i и B_i са построени, така че $A_i \in I^{\chi}_{states}$, $B_i \in I^{\chi}_{states}$, $MIN(A_i) = MIN(A) + i$, $MIN(B_i) = MIN(B) + i$ и $L(A_i) = L(B_i)$.

Ще построим A_{i+1} и B_{i+1}. Нека $b_1 = 0^{2n+2} \in \Sigma^{\forall}_n$. От $MIN(A_i) < MIN(B_i) \leq n$ следва, че $MIN(A_i) < n$.

1.1) $\chi = \epsilon$

Следователно $!\delta^{\forall,\epsilon}_n(A_i, b_1)$, $\delta^{\forall,\epsilon}_n(A_i, b_1) \in I^{\epsilon}_{states}$ и $MIN(\delta^{\forall,\epsilon}_n(A_i, b_1)) = MIN(A_i) + 1 = MIN(A) + i + 1$. Нека $A_{i+1} = \delta^{\forall,\epsilon}_n(A_i, b_1)$. Ще докажем, че $!\delta^{\forall,\epsilon}_n(B_i, b_1)$. Допускаме, че $\neg!\delta^{\forall,\epsilon}_n(B_i, b_1)$. Нека $b' \in \Sigma^{\forall}_n$ е такова, че $!\delta^{\forall,\epsilon}_n(A_{i+1}, b')$ и $\delta^{\forall,\epsilon}_n(A_{i+1}, b') \in M^{\epsilon}_{states}$. (От *Твърдение* 20 следва, че такова b' съществува.) Следователно $b_1 b' \in L(A_i)$, но $b_1 b' \notin L(B_i)$. Следователно $L(A_i) \neq L(B_i)$. Противоречие. Следователно $!\delta^{\forall,\epsilon}_n(B, b_1)$. Следователно $\delta^{\forall,\epsilon}_n(B, b_1) \in I^{\epsilon}_{states}$ и $MIN(\delta^{\forall,\epsilon}_n(B_i, b_1)) = MIN(B_i)+1 = MIN(B)+i+1$. Нека $B_{i+1} = \delta^{\forall,\epsilon}_n(B_i, b_1)$. Очевидно $L(A_{i+1}) = L(B_{i+1})$ (иначе $L(A_i) \neq L(B_i)$).

1.2) $\chi = t$

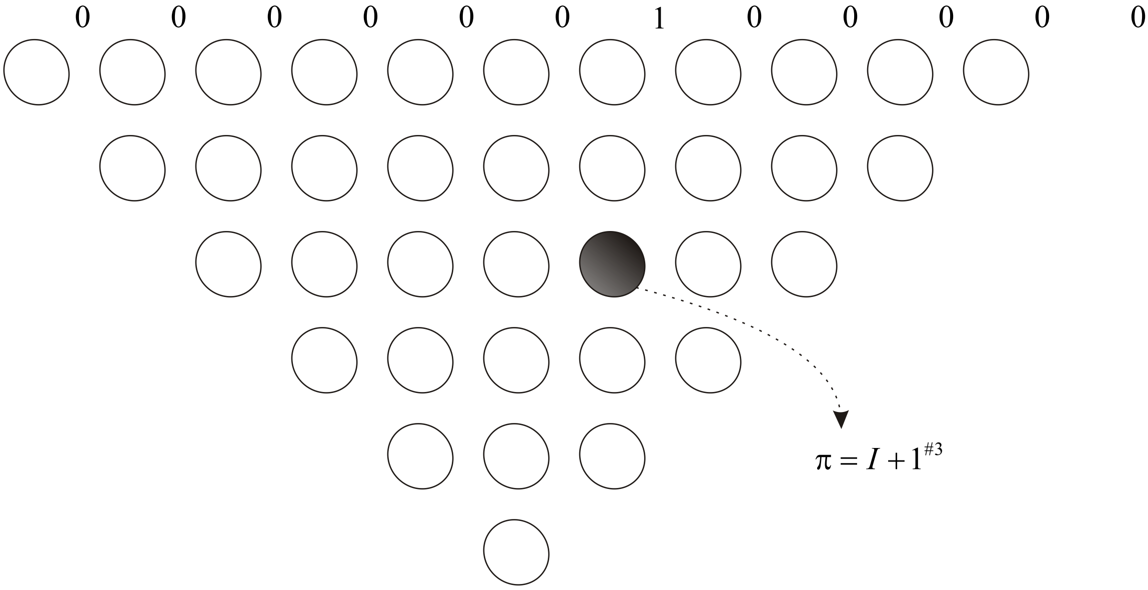
От *Твърдение* 21 следва, че $\exists j \exists e(I + j^{\#e} \in min(A_i))$. Следователно $!\delta^{\forall,t}_n(A_i, b_1)$, $\delta^{\forall,t}_n(A_i, b_1) \in I^{t}_{states}$ и $MIN(\delta^{\forall,t}_n(A_i, b_1)) = MIN(A_i) + 1 = MIN(A) + i + 1$. Следователно $!\delta^{\forall,t}_n(B_i, b_1)$, $\delta^{\forall,t}_n(B_i, b_1) \in I^{t}_{states}$ и $MIN(\delta^{\forall,t}_n(B_i, b_1)) = MIN(B_i)+1 = MIN(B)+i+1$. Нека $A_{i+1} = \delta^{\forall,t}_n(A_i, b_1)$ и $B_{i+1} = \delta^{\forall,t}_n(B_i, b_1)$.

1.3) $\chi = ms$

Нека $b' = 1^{2n+2}$. Очевидно $!\delta^{\forall,ms}_n(A_i, b')$, $\delta^{\forall,ms}_n(A_i, b') \in I^{ms}_{states}$, $MIN(\delta^{\forall,ms}_n(A_i, b')) = MIN(A_i)$, $\neg\exists \pi \in \delta^{\forall,ms}_n(A_i, b')\exists j \exists e(\pi = I + j^{\#e}_s)$, $!\delta^{\forall,ms}_n(B_i, b')$, $\delta^{\forall,ms}_n(B_i, b') \in I^{ms}_{states}$, $MIN(\delta^{\forall,ms}_n(B_i, b')) = MIN(B_i)$ и $\neg\exists \pi \in \delta^{\forall,ms}_n(B_i, b')\exists j \exists e(\pi = I + j^{\#e}_s)$. Нека $A' = \delta^{\forall,ms}_n(A_i, b')$ и $B' = \delta^{\forall,ms}_n(B_i, b')$. Следователно $!\delta^{\forall,ms}_n(A', b_1)$, $\delta^{\forall,ms}_n(A', b_1) \in I^{ms}_{states}$ и $MIN(\delta^{\forall,ms}_n(A', b_1)) = MIN(A')+1 = MIN(A_i)+1 = MIN(A)+i+1$. Очевидно $L(A') = L(B')$. Следователно $!\delta^{\forall,ms}_n(B', b_1)$ (иначе $L(A') \neq L(B')$). Следователно $\delta^{\forall,ms}_n(B', b_1) \in I^{ms}_{states}$ и $MIN(\delta^{\forall,ms}_n(B', b_1)) = MIN(B') + 1 = MIN(B) + i + 1$. Нека $A_{i+1} = \delta^{\forall,ms}_n(A', b_1)$ и $B_{i+1} = \delta^{\forall,ms}_n(B', b_1)$.

Редиците $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ са построени, но такива редици не може да съществуват. Противоречие.

2) $MIN(A) > MIN(B)$
Аналогично на 1) се стига до противоречие.
3) $MIN(A) = MIN(B) = m$
3.1) $\exists\pi \in min(A)(\pi \notin min(B))$
Нека $\pi \in min(A)$ и $\pi \notin min(B)$.
3.1.1) $\chi = \epsilon$
Нека $\pi = I + i^{\#m}$.
Нека $c = 0^{n+i}10^{n+1-i}$.



Фиг. 19 $n = 5$, $\pi = I + 1^{\#3}$, $c = 0^6 10^5$

3.1.1.1) $m < n$

От дефиницията на $\delta_n^{\forall,\epsilon}$ следва, че $MIN(\delta_n^{\forall,\epsilon}(A, c)) = m$ и $MIN(\delta_n^{\forall,\epsilon}(B, c)) = m + 1$. От 1) следва, че $\exists c' \in \Sigma_n^{\forall *}(c' \in L(\delta_n^{\forall,\epsilon}(A, c))\ \&\ c' \notin L(\delta_n^{\forall,\epsilon}(B, c)))$. Следователно $cc' \in L(A)$ и $cc' \notin L(B)$. Следователно $L(A) \neq L(B)$. Противоречие.

3.1.1.2) $m = n$

От дефиницията на $\delta_n^{\forall,\epsilon}$ следва, че $!\delta_n^{\forall,\epsilon}(A, c)$ и $\neg!\delta_n^{\forall,\epsilon}(B, c)$. Следователно $L(A) \neq L(B)$. Противоречие.

3.1.2) $\chi = t$

3.1.2.1) Нека $\pi = I + i^{\#m}$.

Нека $c = 0^{n+i}10^{n+1-i}$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,t}(A, c)$ и $\delta_n^{\forall,t}(A, c) \in I^t_{states}$. Нека $A' = \delta_n^{\forall,t}(A, c)$. Очевидно $MIN(A') = MIN(A) = m$, $\neg\exists\pi' \in min(A')\exists j(\pi' = I + j_t^m)$ и $\pi \in A'$. Следователно $!\delta_n^{\forall,t}(B, c)$ (иначе $L(A) \neq L(B)$). Нека $B' = \delta_n^{\forall,t}(B, c)$. Следователно $L(A') = L(B')$. Следователно $MIN(B') = m$ (ако $MIN(B') > m$, то от 1) следва, че $L(A') \neq L(B')$). Следователно $\pi \notin B'$ и $\neg\exists\pi' \in min(B')\exists j(\pi' = I + j_t^m)$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,t}(A', c)$ и $MIN(\delta_n^{\forall,t}(A', c)) = m$.

Следователно $!\delta_n^{\forall,t}(B',c)$ и $L(\delta_n^{\forall,t}(A',c)) = L(\delta_n^{\forall,t}(B',c))$. Очевидно $MIN(\delta_n^{\forall,t}(B',c)) = m+1$. От 1) следва, че $L(\delta_n^{\forall,t}(A',c)) \neq L(\delta_n^{\forall,t}(B',c))$. Противоречие.

3.1.2.2) Нека $\pi = I + i_t^{\#m}$.

Нека $c = 0^{n+i}10^{n+1-i}$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,t}(A,c)$, $\delta_n^{\forall,t}(A,c) \in I_{states}^t$, $MIN(\delta_n^{\forall,t}(A,c)) = m$, $I+i+1^{\#m} \in \delta_n^{\forall,t}(A,c)$, $!\delta_n^{\forall,t}(B,c)$, $\delta_n^{\forall,t}(B,c) \in I_{states}^t$, $MIN(\delta_n^{\forall,t}(B,c)) = m$, $I+i+1^{\#m} \notin \delta_n^{\forall,t}(B,c)$ и $L(\delta_n^{\forall,t}(A,c)) = L(\delta_n^{\forall,t}(B,c))$. Аналогично на 3.1.2.1) стигаме до противоречие.

3.1.3) $\chi = ms$

3.1.3.1) Нека $\pi = I + i^{\#m}$.

От *Твърдение* 21 следва, че $I + i_s^{\#m} \notin B$ (иначе $\pi = I + i^{\#m} \in B$). Нека $c = 0^{n+i}10^{n+1-i}$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,ms}(A,c)$ и $\delta_n^{\forall,ms}(A,c) \in I_{states}^{ms}$. Нека $A' = \delta_n^{\forall,ms}(A,c)$. Очевидно $MIN(A') = MIN(A) = m$, $\neg\exists\pi' \in min(A')\exists j(\pi' = I+j_s^m)$ и $\pi \in A'$. Следователно $!\delta_n^{\forall,ms}(B,c)$ (иначе $L(A) \neq L(B)$). Нека $B' = \delta_n^{\forall,ms}(B,c)$. Следователно $L(A') = L(B')$. Следователно $MIN(B') = m$ (ако $MIN(B') > m$, то от 1) следва, че $L(A') \neq L(B')$). Следователно $\pi \notin B'$ и $\neg\exists\pi' \in min(B')\exists j(\pi' = I+j_s^m)$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,ms}(A',c)$ и $MIN(\delta_n^{\forall,ms}(A',c)) = m$. Следователно $!\delta_n^{\forall,ms}(B',c)$ и $L(\delta_n^{\forall,ms}(A',c)) = L(\delta_n^{\forall,ms}(B',c))$. Очевидно $MIN(\delta_n^{\forall,ms}(B',c)) = m+1$. От 1) следва, че $L(\delta_n^{\forall,ms}(A',c)) \neq L(\delta_n^{\forall,ms}(B',c))$. Противоречие.

3.1.3.2) Нека $\pi = I + i_s^{\#m}$.

Нека $c = 0^{2n+2}$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,ms}(A,c)$, $\delta_n^{\forall,ms}(A,c) \in I_{states}^{ms}$, $MIN(\delta_n^{\forall,ms}(A,c)) = m$, $I+i^{\#m} \in \delta_n^{\forall,ms}(A,c)$, $!\delta_n^{\forall,ms}(B,c)$, $\delta_n^{\forall,ms}(B,c) \in I_{states}^{ms}$, $MIN(\delta_n^{\forall,ms}(B,c)) = m$, $I + i^{\#m} \notin \delta_n^{\forall,ms}(B,c)$ и $L(\delta_n^{\forall,ms}(A,c)) = L(\delta_n^{\forall,ms}(B,c))$. Аналогично на 3.1.3.1) стигаме до противоречие.

3.2) $\exists\pi \in min(B)(\pi \notin min(A))$

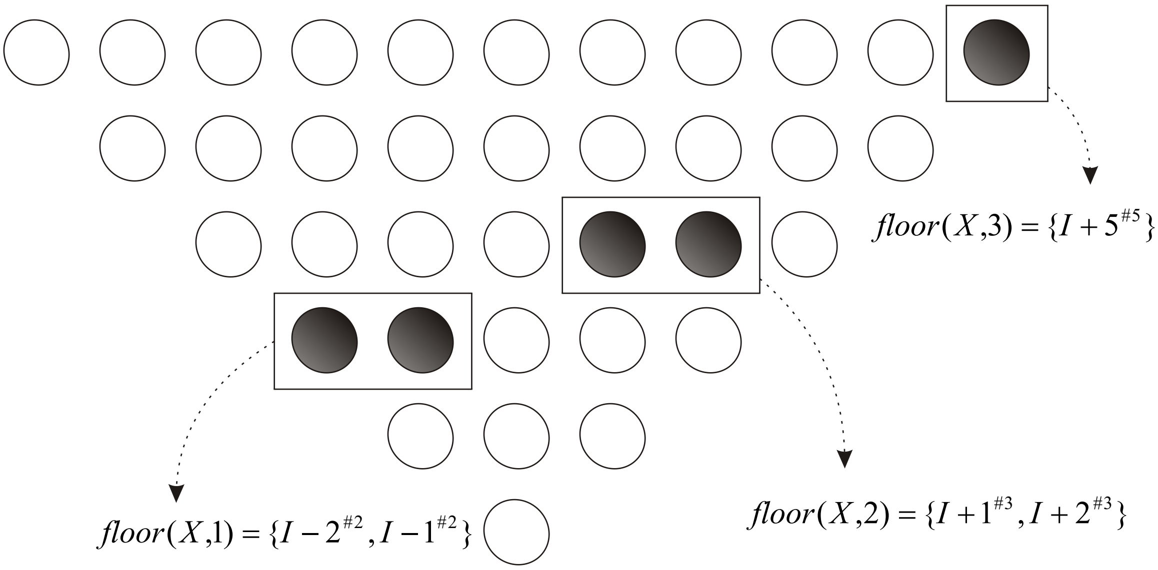
Аналогично на 3.1) се стига до противоречие.

Помощното твърдение е доказано.

Ще дефинираме $floor : P(I_s^\chi) \times N^+ \to P(I_s^\chi)$.

$$floor(X,1) \stackrel{def}{=} min(X)$$

$$floor(X,i+1) \stackrel{def}{=} min(X \backslash (\bigcup_{1 \leq j \leq i} floor(X,j)))$$



Фиг. 20 $n=5$, $X=\{I-2^{\#2}, I-1^{\#2}, I+1^{\#3}, I+2^{\#3}, I+5^{\#5}\}$

Ще дефинираме $FLOOR : I^{\chi}_{states} \times N^{+} \xrightarrow{\circ} N$.

$$FLOOR(X,s) \stackrel{def}{=} \begin{cases} e, & \text{ако } \exists\pi \in floor(X,s)(y(\pi)=e) \\ \neg!, & \text{ако } floor(X,s)=\phi \end{cases}$$

Ще докажем с индукция по i, че $\forall i \forall A,B \in I^{\chi}_{states}(L(A)=L(B) \Rightarrow floor(A,i)=floor(B,i))$.

1) $i=1$

Нека $A,B \in I^{\chi}_{states}$ и $L(A)=L(B)$. $floor(A,1)=min(A)=min(B)=floor(B,1)$

2) Индукционно предположение: $\forall j \leq i \forall A,B \in I^{\chi}_{states}(L(A)=L(B) \Rightarrow floor(A,j)=floor(B,j))$.

Ще докажем, че $\forall A,B \in I^{\chi}_{states}(L(A)=L(B) \Rightarrow floor(A,i{+}1)=floor(B,i{+}1))$. Нека $A,B \in I^{\chi}_{states}$ и $L(A)=L(B)$. Допускаме, че $floor(A,i+1) \neq floor(B,i+1)$.

2.1) $\exists\pi \in floor(A,i+1)(\pi \notin floor(B,i+1))$

2.1.1) $\exists\pi \in floor(A,i+1)\exists t\exists r(\pi \notin floor(B,i+1)\ \&\ \pi=I+t^{\#r})$

Нека $\pi=I+t^{\#r} \in floor(A,i+1)$ и $\pi \notin floor(B,i+1)$. Следователно $!FLOOR(A,i+1)$. Следователно $!FLOOR(A,1)$. Нека $f=FLOOR(A,i+1)-FLOOR(A,1)$. Нека $x=0^{n+t}1^{n+1-t}$. Ще построим редици $\{A_\alpha\}^{f}_{\alpha=0}$ и $\{B_\alpha\}^{f}_{\alpha=0}$, така че

$$\forall \alpha \in [0, f](\begin{array}{l} A_\alpha, B_\alpha \in I^\chi_{states} \,\&\\ L(A_\alpha) = L(B_\alpha) \,\&\\ \pi \in A_\alpha \,\&\, \pi \notin B_\alpha \,\&\\ \neg\exists \pi'(\pi' <^\chi_s \pi \,\&\, \pi' \in A_\alpha \bigcup B_\alpha) \,\&\\ MIN(A_\alpha) = MIN(B_\alpha) = MIN(A) + \alpha). \end{array}$$

$A_0 = A$, $B_0 = B$. От индукционното предположение следва, че $\neg\exists \pi'(\pi' <^\chi_s \pi \,\&\, \pi' \in A_0 \bigcup B_0)$. Нека A_α и B_α са построени, като

$$\begin{array}{l} \alpha < f \,\&\\ A_\alpha, B_\alpha \in I^\chi_{states} \,\&\\ L(A_\alpha) = L(B_\alpha) \,\&\\ \pi \in A_\alpha \,\&\, \pi \notin B_\alpha \,\&\\ \neg\exists \pi'(\pi' <^\chi_s \pi \,\&\, \pi' \in A_\alpha \bigcup B_\alpha) \,\&\\ MIN(A_\alpha) = MIN(B_\alpha) = MIN(A) + \alpha. \end{array}$$

Ще построим $A_{\alpha+1}$ и $B_{\alpha+1}$.

2.1.1.1) $\chi = \epsilon$

От дефиницията на $\delta^{\forall,\epsilon}_n$ следва, че $!\delta^{\forall,\epsilon}_n(A_\alpha, x)$. Нека $A_{\alpha+1} = \delta^{\forall,\epsilon}_n(A_\alpha, x)$. Очевидно $A_{\alpha+1} \in I^\epsilon_{states}$. От $\pi \in A_\alpha$ следва, че $\pi \in A_{\alpha+1}$ и $\neg\exists \pi'(\pi' <^\epsilon_s \pi \,\&\, \pi' \in A_{\alpha+1})$. Ще докажем, че $!\delta^{\forall,\epsilon}_n(B_\alpha, x)$. Допускаме, че $\neg!\delta^{\forall,\epsilon}_n(B_\alpha, x)$. Следователно $L(A_\alpha) \neq L(B_\alpha)$. Противоречие. Следователно $!\delta^{\forall,\epsilon}_n(B_\alpha, x)$. Нека $B_{\alpha+1} = \delta^{\forall,\epsilon}_n(B_\alpha, x)$. Очевидно $B_{\alpha+1} \in I^\alpha_{states}$ и $L(A_{\alpha+1}) = L(B_{\alpha+1})$. От $\neg\exists \pi'(\pi' <^\epsilon_s \pi \,\&\, \pi' \in B_\alpha)$ следва, че $\pi \notin B_{\alpha+1}$ и $\neg\exists \pi'(\pi' <^\epsilon_s \pi \,\&\, \pi' \in B_{\alpha+1})$. Очевидно $MIN(A_{\alpha+1}) = MIN(B_{\alpha+1}) = MIN(A_\alpha) + 1 = MIN(A) + \alpha + 1$.

2.1.1.2) $\chi = t$

От дефиницията на $\delta^{\forall,t}_n$ следва, че $!\delta^{\forall,t}_n(A_\alpha, x)$. Нека $A_{\alpha+1} = \delta^{\forall,t}_n(A_\alpha, x)$. Очевидно $A_{\alpha+1} \in I^t_{states}$. От $\neg\exists \pi'(\pi' <^t_s \pi \,\&\, \pi' \in A_\alpha)$ следва, че $\pi \in A_{\alpha+1}$ и $\neg\exists \pi'(\pi' <^t_s \pi \,\&\, \pi' \in A_{\alpha+1})$. (Ако допуснем, че $I + t^{\#b}_t \in A_\alpha$ и $b < r$, то от *Твърдение* 21 следва, че $I + t + 1^{\#b} \in A_\alpha$. Но $I + t + 1^{\#b} <^t_s \pi$. Противоречие.) Очевидно $!\delta^{\forall,t}_n(B_\alpha, x)$. Нека $B_{\alpha+1} = \delta^{\forall,t}_n(B_\alpha, x)$. Очевидно $B_{\alpha+1} \in I^t_{states}$ и $L(A_{\alpha+1}) = L(B_{\alpha+1})$. От $\neg\exists \pi'(\pi' <^t_s \pi \,\&\, \pi' \in B_\alpha)$ следва, че $\pi \notin B_{\alpha+1}$ и $\neg\exists \pi'(\pi' <^t_s \pi \,\&\, \pi' \in B_{\alpha+1})$. Очевидно $MIN(A_{\alpha+1}) = MIN(B_{\alpha+1}) = MIN(A_\alpha) + 1 = MIN(A) + \alpha + 1$.

2.1.1.3) $\chi = ms$

От дефиницията на $\delta^{\forall,ms}_n$ следва, че $!\delta^{\forall,ms}_n(A_\alpha, x)$.

2.1.1.3.1) $\exists \pi' \in min(A_\alpha) \exists i \exists e(\pi' = I + i^{\#e}_s)$

Очевидно $!\delta^{\forall,ms^*}_n(A_\alpha, xx)$. Нека $A_{\alpha+1} = \delta^{\forall,ms^*}_n(A_\alpha, xx)$. Следователно $!\delta^{\forall,ms^*}_n(B_\alpha, xx)$. Нека $B_{\alpha+1} = \delta^{\forall,ms^*}_n(B_\alpha, xx)$.

2.1.1.3.2) $\neg\exists \pi' \in min(A_\alpha) \exists i \exists e(\pi' = I + i^{\#e}_s)$

Нека $A_{\alpha+1} = \delta^{\forall,ms}_n(A_\alpha, x)$. Очевидно $!\delta^{\forall,ms}_n(B_\alpha, x)$. Нека $B_{\alpha+1} = \delta^{\forall,ms}_n(B_\alpha, x)$.

Очевидно $A_{\alpha+1} \in I^{ms}_{states}$, $B_{\alpha+1} \in I^{ms}_{states}$ и $L(A_{\alpha+1}) = L(B_{\alpha+1})$. Очевидно $MIN(A_{\alpha+1}) = MIN(B_{\alpha+1}) = MIN(A_\alpha) + 1 = MIN(A) + \alpha + 1$. От $\neg\exists \pi'(\pi' <^{ms}_s \pi \,\&\, \pi' \in A_\alpha)$ следва, че $\pi \in A_{\alpha+1}$ и $\neg\exists \pi'(\pi' <^{ms}_s \pi \,\&\, \pi' \in A_{\alpha+1})$. (Ако допуснем, че $I + a^{\#b}_s \in A_\alpha$, като $I + a^{\#b} <^{ms}_s \pi$, то от *Твърдение* 21 следва, че $I + a^{\#b} \in A_\alpha$. Противоречие.) От $\neg\exists\pi'(\pi' <_s^{ms} \pi \,\&\, \pi' \in B_\alpha)$ следва, че $\pi \notin B_{\alpha+1}$ и $\neg\exists\pi'(\pi' <_s^{ms} \pi \,\&\, \pi' \in B_{\alpha+1})$. (Ако допуснем, че $I + t_s^{\#r} \in B_\alpha$, то от *Твърдение* 21 следва, че $\pi \in B_\alpha$. Противоречие.)

2.1.2) $\chi = t$ и $\exists\pi \in floor(A, i+1)\exists t\exists r(\pi \notin floor(B, i+1) \,\&\, \pi = I + t_t^{\#r})$

Нека $\pi = I + t_t^{\#r}$, $\pi \in floor(A, i+1)$ и $\pi \notin floor(B, i+1)$. От *Твърдение* 21 следва, че $I + t + 1^{\#r} \in A$. Следователно $\neg\exists\pi'(\pi' <_s^t I + t + 1^{\#r} \,\&\, \pi' \in A)$. От индукционното предположение следва, че $\neg\exists\pi'(\pi' <_s^t I + t + 1^{\#r} \,\&\, \pi' \in B)$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,t}(A, 0^{n+t}1^{n+1-t})$. Следователно $!\delta_n^{\forall,t}(B, 0^{n+t}1^{n+1-t})$. Нека $A' = \delta_n^{\forall,t}(A, 0^{n+t}1^{n+1-t})$ и $B' = \delta_n^{\forall,t}(B, 0^{n+t}1^{n+1-t})$. Очевидно $MIN(A') = MIN(B')$, $I+t+1^{\#r} \in A'$ и $I+t+1^{\#r} \notin B'$, като $\neg\exists\pi'(\pi' <_s^t I+t+1^{\#r} \,\&\, \pi' \in A' \bigcup B')$. Нека $f = r - FLOOR(A', 1)$. Нека $x = 0^{n+t+1}1^{n-t}$. Аналогично на 2.1.1.2) построяваме редици $\{A_\alpha\}_{\alpha=0}^f$ и $\{B_\alpha\}_{\alpha=0}^f$, като $A_0 = A'$ и $B_0 = B'$.

2.1.3) $\chi = ms$ и $\exists\pi \in floor(A, i+1)\exists t\exists r(\pi \notin floor(B, i+1) \,\&\, \pi = I + t_s^{\#r})$

Нека $\pi = I + t_s^{\#r}$, $\pi \in floor(A, i+1)$ и $\pi \notin floor(B, i+1)$. От *Твърдение* 21 следва, че $I + t^{\#r} \in A$. Следователно $\neg\exists\pi'(\pi' <_s^{ms} I + t^{\#r} \,\&\, \pi' \in A)$. От индукционното предположение следва, че $\neg\exists\pi'(\pi' <_s^{ms} I + t^{\#r} \,\&\, \pi' \in B)$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,ms}(A, 0^{2n+2})$. Следователно $!\delta_n^{\forall,ms}(B, 0^{2n+2})$. Нека $A' = \delta_n^{\forall,ms}(A, 0^{2n+2})$ и $B' = \delta_n^{\forall,ms}(B, 0^{2n+2})$. Очевидно $MIN(A') = MIN(B')$, $I + t^{\#r} \in A'$ и $I + t^{\#r} \notin B'$, като $\neg\exists\pi'(\pi' <_s^{ms} I + t^{\#r} \,\&\, \pi' \in A' \bigcup B')$. Нека $f = r - FLOOR(A', 1)$. Нека $x = 0^{n+t}1^{n+1-t}$. Аналогично на 2.1.1.3) построяваме редици $\{A_\alpha\}_{\alpha=0}^f$ и $\{B_\alpha\}_{\alpha=0}^f$, като $A_0 = A'$ и $B_0 = B'$.

Редиците $\{A_\alpha\}_{\alpha=0}^f$ и $\{B_\alpha\}_{\alpha=0}^f$ са построени. Следователно $MIN(A_f) = MIN(B_f) = MIN(A_0) + f = MIN(A_0) + r - FLOOR(A_0, 1) = y(\pi)$. Следователно $\pi \in min(A_f)$, $\pi \notin min(B_f)$ и $L(A_f) = L(B_f)$. Противоречие. Следователно $floor(A, i+1) = floor(B, i+1)$.

2.2) $\exists\pi \in floor(B, i+1)(\pi \neq floor(A, i+1))$

Аналогично на 2.1) се стига до противоречие.

Доказахме, че $\forall i\forall A, B \in I_{states}^\chi(L(A) = L(B) \Rightarrow floor(A, i) = floor(B, i))$.

Следователно $\forall A, B \in I_{states}^\chi(L(A) = L(B) \Rightarrow A = B)$.

Твърдение 23 Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $n \in N$. Тогава $\forall A, B \in M_{states}^\chi(L(A) = L(B) \Rightarrow A = B)$.

Доказателство Ще дефинираме $y : M_s^\chi \to N$.

$y(M + i^{\#e}) \stackrel{def}{=} e$

$y(M + i_t^{\#e}) \stackrel{def}{=} e$

$y(M + i_s^{\#e}) \stackrel{def}{=} e$

Ще дефинираме $min : P(M_s^\chi) \to P(M_s^\chi)$.

$min(X) \stackrel{def}{=} \{\pi | \pi \in X \,\&\, \forall\pi' \in X(y(\pi') \geq y(\pi))\}$

Помощно твърдение $\forall A, B \in M_{states}^\chi(L(A) = L(B) \Rightarrow min(A) = min(B))$

Доказателство Нека $A, B \in M^{\chi}_{states}$ и $L(A) = L(B)$. Ще дефинираме $MIN : M^{\chi}_{states} \to N$.

$MIN(X) = e \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \pi \in min(X)(y(\pi) = e)$

Допускаме, че $min(A) \neq min(B)$.

1) $MIN(A) < MIN(B)$

Ще построим редици $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$, така че

$\forall i \in N($
$A_i \in M^{\chi}_{states}$ &
$B_i \in M^{\chi}_{states}$ &
$MIN(A_{i+1}) > MIN(A_i)$ &
$MIN(B_{i+1}) > MIN(B_i)$ &
$MIN(A_i) < MIN(B_i)$ &
$L(A_i) = L(B_i))$.

$A_0 = A$, $B_0 = B$. Нека A_i и B_i са построени, така че

$A_i \in M^{\chi}_{states}$, $B_i \in M^{\chi}_{states}$, $i > 0 \Rightarrow MIN(A_i) > MIN(A_{i-1})$, $i > 0 \Rightarrow MIN(B_i) > MIN(B_{i-1})$, $MIN(A_i) < MIN(B_i)$ и $L(A_i) = L(B_i)$.

Ще построим A_{i+1} и B_{i+1}. От $MIN(A_i) < MIN(B_i) \leq n$ следва, че $MIN(A_i) < n$. Нека $b_1 = 0^k$, като k е някой (например най-малкият) елемент на $\bigtriangledown_a(A_i)$.

1.1) $\chi = \epsilon$

Следователно $!\delta^{\forall,\epsilon}_n(A_i, b_1)$ $(MIN(A_i) < n)$ и $MIN(\delta^{\forall,\epsilon}_n(A_i, b_1)) = MIN(A_i)+1$. Нека $A_{i+1} = \delta^{\forall,\epsilon}_n(A_i, b_1)$. Ще докажем, че $!\delta^{\forall,\epsilon}_n(B_i, b_1)$. Допускаме, че $\neg!\delta^{\forall,\epsilon}_n(B_i, b_1)$. Следователно $L(A_i) \neq L(B_i)$. Противоречие. Следователно $!\delta^{\forall,\epsilon}_n(B, b_1)$. Следователно $MIN(\delta^{\forall,\epsilon}_n(B_i, b_1)) = MIN(B_i) + 1$. Нека $B_{i+1} = \delta^{\forall,\epsilon}_n(B_i, b_1)$. Очевидно $L(A_{i+1}) = L(B_{i+1})$ (иначе $L(A_i) \neq L(B_i)$). Ще докажем, че $A_{i+1} \in M^{\epsilon}_{states}$ и $B_{i+1} \in M^{\epsilon}_{states}$. Очевидно $A_{i+1} \in M^{\epsilon}_{states} \Leftrightarrow B_{i+1} \in M^{\epsilon}_{states}$ (иначе $L(A_i) \neq L(B_i)$). Допускаме, че $A_{i+1} \in I^{\epsilon}_{states}$ и $B_{i+1} \in I^{\epsilon}_{states}$. От $MIN(A_{i+1}) = MIN(A) + i + 1$, $MIN(B_{i+1}) = MIN(B) + i + 1$ и $MIN(A) < MIN(B)$ следва, че $A_{i+1} \neq B_{i+1}$. От *Твърдение* 22 следва, че $L(A_{i+1}) \neq L(B_{i+1})$. Противоречие. Следователно $A_{i+1} \in M^{\epsilon}_{states}$ и $B_{i+1} \in M^{\epsilon}_{states}$. Очевидно $MIN(A_{i+1}) < MIN(B_{i+1})$.

1.2) $\chi = t$

Очевидно $\exists j \exists e(M + j^{\#e} \in min(A_i))$. (От *Твърдение* 21 следва, че ако $M + j^{\#e}_t \in min(A_i)$, то $M + j + 1^{\#e} \in min(A_i)$.) Следователно $!\delta^{\forall,t}_n(A_i, b_1)$ и $MIN(\delta^{\forall,t}_n(A_i, b_1)) = MIN(A_i)+1$. Следователно $!\delta^{\forall,t}_n(B_i, b_1)$ и $MIN(\delta^{\forall,t}_n(B_i, b_1)) = MIN(B_i) + 1$. Нека $A_{i+1} = \delta^{\forall,t}_n(A_i, b_1)$ и $B_{i+1} = \delta^{\forall,t}_n(B_i, b_1)$. Очевидно $L(A_{i+1}) = L(B_{i+1})$, $A_{i+1} \in M^{t}_{states}$ и $B_{i+1} \in M^{t}_{states}$ и $MIN(A_{i+1}) < MIN(B_{i+1})$.

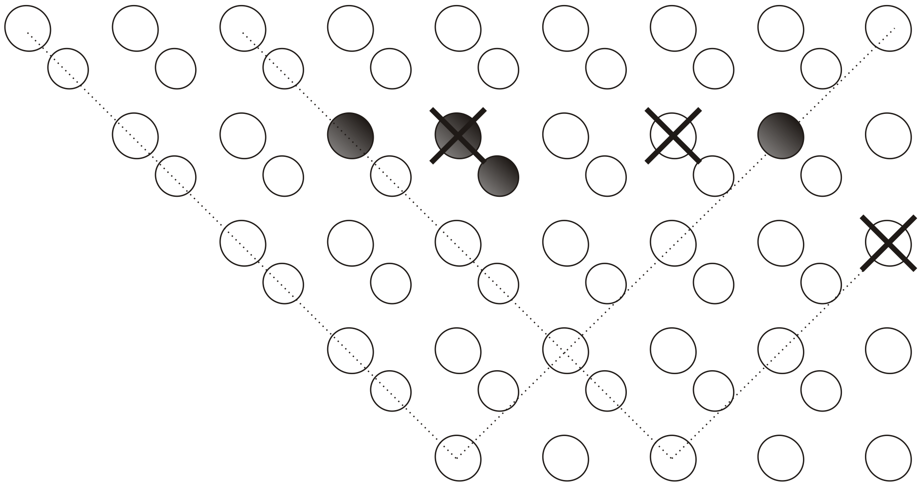
1.3) $\chi = ms$

1.3.1) $min(A_i) \neq \{M^{\#MIN(A_i)}\}$

Нека $b' = 1^{k_1}$, като k_1 е някой (например най-малкият) елемент на $\bigtriangledown_a(A_i)$. Очевидно $!\delta^{\forall,ms}_n(A_i, b')$. Нека $A' = \delta^{\forall,ms}_n(A_i, b')$. Очевидно $MIN(A') = MIN(A_i)$ и $\neg\exists \pi \in min(A')\exists j \exists e(\pi = M + j^{\#e}_s)$. Нека $B' = \delta^{\forall,ms}_n(B_i, b')$ (очевидно $!\delta^{\forall,ms}_n(B_i, b')$). Очевидно $MIN(B') = MIN(B_i)+1$ или $(MIN(B') = MIN(B_i)$ и $\neg\exists \pi \in min(B')\exists j \exists e(\pi = M + j^{\#e}_s))$. Очевидно $A' \in M^{ms}_{states}$ и $B' \in M^{ms}_{states}$. Нека $b'' = 0^{k_2}$, като k_2 е някой (например най-малкият) елемент на $\bigtriangledown_a(A')$. Следователно $!\delta_n^{\forall,ms}(A',b'')$ и $!\delta_n^{\forall,ms}(B',b'')$. Нека $A_{i+1} = \delta_n^{\forall,ms}(A',b'')$ и $B_{i+1} = \delta_n^{\forall,ms}(A',b'')$. Очевидно $MIN(A_{i+1}) = MIN(A_i)+1$ и $MIN(B_{i+1}) \geq MIN(B_i)+1$.

1.3.2) $min(A_i) = \{M^{\#MIN(A_i)}\}$

Очевидно $max(\bigtriangledown_a(A_i)) = MIN(A_i)+n < max(\bigtriangledown_a(B_i))$ (фиг. 20).



Фиг. 21 $n = 4$, $A_i = \{M^{\#2}, M-2^{\#3}, M-4^{\#3}\}$,
$B_i = \{M-1^{\#3}, M-4^{\#3}, M-5^{\#3}, M_s-4^{\#3}\}$,
$max(\bigtriangledown_a(A_i)) = 6$, $max(\bigtriangledown_a(B_i)) = 8$

1.3.2.1) $B_i = \{M^{\#n}\}$

Очевидно $L(A_i) \neq L(B_i)$. Противоречие.

1.3.2.2) $B_i \neq \{M^{\#n}\}$

Нека $b = 1^{max(\bigtriangledown_a(B_i))}$. Следователно $!\delta_n^{\forall,ms}(B_i,b)$ и $\neg!\delta_n^{\forall,ms}(A_i,b)$. Следователно $L(A_i) \neq L(B_i)$. Противоречие.

Редиците $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ са построени, но такива редици не може да съществуват. Противоречие.

2) $MIN(B) < MIN(A)$

Аналогично на 1) се стига до противоречие.

3) $MIN(A) = MIN(B) = m$

3.1) $\exists\pi \in min(A)(\pi \notin min(B))$

Нека $\pi \in min(A)$ и $\pi \notin min(B)$.

3.1.1) $\chi = \epsilon$

Нека $\pi = M + i^{\#m}$.

3.1.1.1) $i < 0$

Нека $c = 0^{k+i}10^{-i-1}$, като k е някой (например най-малкият) елемент на $\bigtriangledown_a(A)$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,\epsilon}(A,c)$ и $MIN(\delta_n^{\forall,\epsilon}(A,c)) = m$. Следователно $!\delta_n^{\forall,\epsilon}(B,c)$. Следователно $MIN(\delta_n^{\forall,\epsilon}(B,c)) = m+1$. Следователно $MIN(\delta_n^{\forall,\epsilon}(A,c)) <$

$MIN(\delta_n^{\forall,\epsilon}(B,c))$. Очевидно $\delta_n^{\forall,\epsilon}(A,c) \in M^{\epsilon}_{states}$, $\delta_n^{\forall,\epsilon}(B,c) \in M^{\epsilon}_{states}$ и $L(\delta_n^{\forall,\epsilon}(A,c)) = L(\delta_n^{\forall,\epsilon}(B,c))$. Аналогично на 1) достигаме до противоречие.

3.1.1.2) $i = 0$

Ще докажем, че $m < n$. Допускаме, че $m = n$. Следователно $M^{\#n} \notin min(B)$. Следователно $\neg\exists\pi \in B\exists j\exists f(\pi = M + j^{\#f} \& f \leq j+n)$. Следователно $B \notin M^{\epsilon}_{states}$. Противоречие. Следователно $m < n$. Очевидно $max(\bigtriangledown_a(A)) = m + n < max(\bigtriangledown_a(B))$. Нека $b = 1^{max(\bigtriangledown_a(B))}$. Следователно $!\delta_n^{\forall,\epsilon}(B,b)$ и $\neg!\delta_n^{\forall,\epsilon}(A,b)$. Следователно $L(A) \neq L(B)$. Противоречие.

3.1.2) $\chi = t$

3.1.2.1) Нека $\pi = M + i^{\#m}$.

3.1.1.1.1) $i < 0$

Нека $c = 0^{k+i}10^{-i-1}$, като k е някой (например най-малкият) елемент на $\bigtriangledown_a(A)$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,t}(A,c)$ и $MIN(\delta_n^{\forall,t}(A,c)) = m$. Следователно $!\delta_n^{\forall,t}(B,c)$. Следователно $MIN(\delta_n^{\forall,t}(B,c)) = m$ (иначе $L(A) \neq L(B)$). Следователно $M + i_t^{\#m} \in B$ и $i \leq -2$. Нека $A' = \delta_n^{\forall,t}(A,c)$ и $B' = \delta_n^{\forall,t}(B,c)$. Очевидно $A' \neq B'$ и $L(A') = L(B')$. Следователно $A' \in M^t_{states}$ и $B' \in M^t_{states}$. Очевидно $M + i + 1^{\#m} \in A'$, $M + i + 1^{\#m} \notin B'$ и $\neg\exists\pi'\exists j(\pi' = M + j_t^{\#m} \& \pi' \in min(A') \bigcup min(B'))$. Нека $c' = 0^{k+i+1}10^{-i-2}$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,t}(A',c')$. Следователно $!\delta_n^{\forall,t}(B',c')$. Очевидно $MIN(\delta_n^{\forall,t}(A',c')) = m$, $MIN(\delta_n^{\forall,t}(B',c')) = m + 1$ и $L(\delta_n^{\forall,t}(A',c')) = L(\delta_n^{\forall,t}(B',c'))$. Аналогично на 1) достигаме до противоречие.

3.1.1.1.2) $i = 0$

Аналогично на 3.1.1.2) достигаме до противоречие.

3.1.2.2) Нека $\pi = M + i_t^{\#m}$.

Нека $c = 0^{k+i}10^{-i-1}$, като k е някой (например най-малкият) елемент на $\bigtriangledown_a(A)$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,t}(A,c)$, $MIN(\delta_n^{\forall,t}(A,c)) = m$, $!\delta_n^{\forall,t}(B,c)$, $MIN(\delta_n^{\forall,t}(B,c)) = m$, $\delta_n^{\forall,t}(A,c) \in M^t_{states}$, $\delta_n^{\forall,t}(B,c) \in M^t_{states}$, $M + i + 2^{\#m} \in \delta_n^{\forall,t}(A,c)$, $M + i + 2^{\#m} \notin \delta_n^{\forall,t}(B,c)$ и $L(\delta_n^{\forall,t}(A,c)) = L(\delta_n^{\forall,t}(B,c))$. Аналогично на 3.1.2.1) стигаме до противоречие.

3.1.3) $\chi = ms$

3.1.3.1) Нека $\pi = M + i^{\#m}$.

3.1.3.1.1) $i < 0$

Нека $c = 0^{k+i}10^{-i-1}$, като k е някой (например най-малкият) елемент на $\bigtriangledown_a(A)$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,ms}(A,c)$ и $MIN(\delta_n^{\forall,ms}(A,c)) = m$. Следователно $!\delta_n^{\forall,ms}(B,c)$. Следователно $MIN(\delta_n^{\forall,ms}(B,c)) = m$ (иначе $L(A) \neq L(B)$). Нека $A' = \delta_n^{\forall,ms}(A,c)$ и $B' = \delta_n^{\forall,ms}(B,c)$. Очевидно $A' \neq B'$ и $L(A') = L(B')$. Следователно $A' \in M^{ms}_{states}$ и $B' \in M^{ms}_{states}$. Очевидно $M + i + 1^{\#m} \in A'$ и $M + i + 1^{\#m} \notin B'$. (Ако допуснем, че $M + i_s^{\#m} \in B$, то от *Твърдение* 21 следва, че $M + i^{\#m} = \pi \in B$. Противоречие.) Очевидно $\neg\exists\pi'\exists j(\pi' = M + j_s^{\#m} \& \pi' \in min(A') \bigcup min(B'))$. Ще докажем, че $i+1 < 0$. Допускаме, че $i + 1 = 0$. Аналогично на 3.1.1.2) достигаме до противоречие. Следователно $i + 1 < 0$. Нека $c' = 0^{k+i+1}10^{-i-2}$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,ms}(A',c')$. Следователно $!\delta_n^{\forall,ms}(B',c')$. Очевидно $MIN(\delta_n^{\forall,ms}(A',c')) = m$, $MIN(\delta_n^{\forall,ms}(B',c')) = m+1$ и $L(\delta_n^{\forall,ms}(A',c')) = L(\delta_n^{\forall,ms}(B',c'))$. Аналогично на 1) достигаме до противоречие.

3.1.3.1.2) $i = 0$

Аналогично на 3.1.1.2) достигаме до противоречие.

3.1.3.2) Нека $\pi = M + i_s^{\#m}$.

Нека $c = 0^k$, като k е някой (например най-малкият) елемент на $\bigtriangledown_a(A)$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,ms}(A,c)$, $MIN(\delta_n^{\forall,ms}(A,c)) = m$, $!\delta_n^{\forall,ms}(B,c)$, $MIN(\delta_n^{\forall,ms}(B,c)) = m$, $\delta_n^{\forall,ms}(A,c) \in M_{states}^{ms}$, $\delta_n^{\forall,ms}(B,c) \in M_{states}^{ms}$, $M + i + 1^{\#m} \in \delta_n^{\forall,ms}(A,c)$, $M + i + 1^{\#m} \notin \delta_n^{\forall,ms}(B,c)$ и $L(\delta_n^{\forall,ms}(A,c)) = L(\delta_n^{\forall,ms}(B,c))$. Аналогично на 3.1.3.1) стигаме до противоречие.

3.2) $\exists \pi \in min(B)(\pi \notin min(A))$

Аналогично на 3.1) се стига до противоречие.

Помощното твърдение е доказано.

Ще дефинираме $floor : P(M_s^\chi) \times N^+ \to P(M_s^\chi)$.

$$floor(X,1) \stackrel{def}{=} min(X)$$

$$floor(X,i+1) \stackrel{def}{=} min(X \backslash (\bigcup_{1\le j\le i} floor(X,j)))$$

Ще дефинираме $FLOOR : M_{states}^\chi \times N^+ \not\to N$.

$$FLOOR(X,s) \stackrel{def}{=} \begin{cases} e, & \text{ако } \exists \pi \in floor(X,s)(y(\pi) = e) \\ \neg!, & \text{ако } floor(X,s) = \phi \end{cases}$$

Ще докажем с индукция по i, че $\forall i \forall A,B \in M_{states}^\chi(L(A) = L(B) \Rightarrow floor(A,i) = floor(B,i))$.

1) $i = 1$

Нека $A,B \in M_{states}^\chi$ и $L(A) = L(B)$. $floor(A,1) = min(A) = min(B) = floor(B,1)$

2) Индукционно предположение: $\forall j \le i \forall A,B \in M_{states}^\chi(L(A) = L(B) \Rightarrow floor(A,j) = floor(B,j))$.

Ще докажем, че $\forall A,B \in M_{states}^\chi(L(A) = L(B) \Rightarrow floor(A,i+1) = floor(B,i+1))$. Нека $A,B \in M_{states}^\chi$ и $L(A) = L(B)$. Допускаме, че $floor(A,i+1) \neq floor(B,i+1)$.

2.1) $\exists \pi \in floor(A,i+1)(\pi \notin floor(B,i+1))$

2.1.1) $\exists \pi \in floor(A,i+1)\exists t \exists r(\pi \notin floor(B,i+1)\ \&\ \pi = M + t^{\#r})$

Нека $\pi = M + t^{\#r} \in floor(A,i+1)$ и $\pi \notin floor(B,i+1)$. Ще построим редици $\{A_\alpha\}_{\alpha=0}^{-t}$ и $\{B_\alpha\}_{\alpha=0}^{-t}$, така че

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in [0,-t](& \\ & A_\alpha, B_\alpha \in M_{states}^\chi\ \& \\ & L(A_\alpha) = L(B_\alpha)\ \& \\ & M + t + \alpha^{\#r} \in A_\alpha\ \&\ M + t + \alpha^{\#r} \notin B_\alpha\ \& \\ & \neg\exists \pi'(\pi' <_s^\chi M + t + \alpha^{\#r}\ \&\ \pi' \in A_\alpha \bigcup B_\alpha)). \end{aligned}$$

$A_0 = A$, $B_0 = B$. От индукционното предположение следва, че $\neg\exists\pi'(\pi' <_s^\chi$

$M + t^{\#r} \,\&\, \pi' \in A_0 \bigcup B_0)$. Нека A_α и B_α са построени, като

$$\begin{array}{l} \alpha < -t \,\& \\ A_\alpha, B_\alpha \in M^\chi_{states} \,\& \\ L(A_\alpha) = L(B_\alpha) \,\& \\ M + t + \alpha^{\#r} \in A_\alpha \,\&\, M + t + \alpha^{\#r} \notin B_\alpha \,\& \\ \neg\exists\pi'(\pi' <^\chi_s M + t + \alpha^{\#r} \,\&\, \pi' \in A_\alpha \bigcup B_\alpha). \end{array}$$

Ще построим $A_{\alpha+1}$ и $B_{\alpha+1}$. Нека $x = 0^{k+t}10^{-t-1}$, като k е някой (например най-малкият) елемент на $\bigtriangledown_a(A_\alpha)$.

2.1.1.1) $\chi = \epsilon$

От дефиницията на $\delta^{\forall,\epsilon}_n$ следва, че $!\delta^{\forall,\epsilon}_n(A_\alpha, x)$. Следователно $!\delta^{\forall,\epsilon}_n(B_\alpha, x)$. Нека $A_{\alpha+1} = \delta^{\forall,\epsilon}_n(A_\alpha, x)$ и $B_{\alpha+1} = \delta^{\forall,\epsilon}_n(B_\alpha, x)$. От $M+t+\alpha^{\#r} \in A_\alpha$, $M+t+\alpha^{\#r} \notin B_\alpha$ и $\neg\exists\pi'(\pi' <^\chi_s M+t+\alpha^{\#r} \,\&\, \pi' \in A_\alpha \bigcup B_\alpha)$ следва, че $A_{\alpha+1} \neq B_{\alpha+1}$. Следователно $A_{\alpha+1} \in M^\epsilon_{states}$ и $B_{\alpha+1} \in M^\epsilon_{states}$. От $\neg\exists\pi'(\pi' <^\epsilon_s M + t + \alpha^{\#r} \,\&\, \pi' \in A_\alpha)$ и $M + t + \alpha^{\#r} \in A_\alpha$ следва, че $M + t + \alpha + 1^{\#r} \in A_{\alpha+1}$ и $\neg\exists\pi'(\pi' <^\epsilon_s M+t+\alpha+1^{\#r} \,\&\, \pi' \in A_{\alpha+1})$. От $\neg\exists\pi'(\pi' <^\epsilon_s M+t+\alpha^{\#r} \,\&\, \pi' \in B_\alpha)$ и $M + t + \alpha^{\#r} \notin B_\alpha$ следва, че $M + t + \alpha + 1^{\#r} \notin B_{\alpha+1}$ и $\neg\exists\pi'(\pi' <^\epsilon_s M + t + \alpha + 1^{\#r} \,\&\, \pi' \in B_{\alpha+1})$. Очевидно $L(A_{\alpha+1}) = L(B_{\alpha+1})$.

2.1.1.2) $\chi = t$

От дефиницията на $\delta^{\forall,t}_n$ следва, че $!\delta^{\forall,t}_n(A_\alpha, x)$. Следователно $!\delta^{\forall,t}_n(B_\alpha, x)$. Нека $A_{\alpha+1} = \delta^{\forall,t}_n(A_\alpha, x)$ и $B_{\alpha+1} = \delta^{\forall,t}_n(B_\alpha, x)$. Очевидно $A_{\alpha+1} \neq B_{\alpha+1}$. Следователно $A_{\alpha+1} \in M^t_{states}$ и $B_{\alpha+1} \in M^t_{states}$. От $\neg\exists\pi'(\pi' <^t_s M + t + \alpha^{\#r} \,\&\, \pi' \in A_\alpha)$ и $M + t + \alpha^{\#r} \in A_\alpha$ следва, че $M + t + \alpha + 1^{\#r} \in A_{\alpha+1}$ и $\neg\exists\pi'(\pi' <^t_s M+t+\alpha+1^{\#r} \,\&\, \pi' \in A_{\alpha+1})$. (Ако допуснем, че $M+t+\alpha^{\#b}_t \in A_\alpha$ и $b < r$, то от *Твърдение* 21 следва, че $M + t + \alpha + 1^{\#b} \in A_\alpha$. Но $M + t + \alpha + 1^{\#b} <^t_s M + t + \alpha^{\#r}$. Противоречие.) От $\neg\exists\pi'(\pi' <^t_s M + t + \alpha^{\#r} \,\&\, \pi' \in B_\alpha)$ и $M + t + \alpha^{\#r} \notin B_\alpha$ следва, че $M + t + \alpha + 1^{\#r} \notin B_{\alpha+1}$ и $\neg\exists\pi'(\pi' <^t_s M + t + \alpha + 1^{\#r} \,\&\, \pi' \in B_{\alpha+1})$. Очевидно $L(A_{\alpha+1}) = L(B_{\alpha+1})$.

2.1.1.3) $\chi = ms$

От дефиницията на $\delta^{\forall,ms}_n$ следва, че $!\delta^{\forall,ms}_n(A_\alpha, x)$. Следователно $!\delta^{\forall,ms}_n(B_\alpha, x)$. Нека $A_{\alpha+1} = \delta^{\forall,ms}_n(A_\alpha, x)$ и $B_{\alpha+1} = \delta^{\forall,ms}_n(B_\alpha, x)$. Очевидно $A_{\alpha+1} \neq B_{\alpha+1}$. Следователно $A_{\alpha+1} \in M^{ms}_{states}$ и $B_{\alpha+1} \in M^{ms}_{states}$. От $\neg\exists\pi'(\pi' <^{ms}_s M + t + \alpha^{\#r} \,\&\, \pi' \in A_\alpha)$ и $M + t + \alpha^{\#r} \in A_\alpha$ следва, че $M + t + \alpha + 1^{\#r} \in A_{\alpha+1}$ и $\neg\exists\pi'(\pi' <^{ms}_s M+t+\alpha+1^{\#r} \,\&\, \pi' \in A_{\alpha+1})$. (Ако допуснем, че $M+t+\alpha^{\#b}_s \in A_\alpha$ и $b < r$, то от *Твърдение* 21 следва, че $M+t+\alpha^{\#b} \in A_\alpha$. Но $M+t+\alpha^{\#b} <^{ms}_s M + t + \alpha^{\#r}$. Противоречие.) От $\neg\exists\pi'(\pi' <^{ms}_s M + t + \alpha^{\#r} \,\&\, \pi' \in B_\alpha)$ и $M + t + \alpha^{\#r} \notin B_\alpha$ следва, че $M + t + \alpha + 1^{\#r} \notin B_{\alpha+1}$ и $\neg\exists\pi'(\pi' <^{ms}_s M + t + \alpha + 1^{\#r} \,\&\, \pi' \in B_{\alpha+1})$. (Ако допуснем, че $M + t + \alpha^{\#r}_s \in B_\alpha$, то от *Твърдение* 21 следва, че $M + t + \alpha^{\#r} \in B_\alpha$. Противоречие.) Очевидно $L(A_{\alpha+1}) = L(B_{\alpha+1})$.

2.1.2) $\chi = t$ и $\exists\pi \in floor(A, i + 1)\exists t\exists r(\pi \notin floor(B, i + 1) \,\&\, \pi = M + t^{\#r}_t)$

Нека $\pi = M+t^{\#r}_t$, $\pi \in floor(A, i+1)$ и $\pi \notin floor(B, i+1)$. От *Твърдение* 21 следва, че $M+t+1^{\#r} \in A$. Следователно $\neg\exists\pi'(\pi' <^t_s M+t+1^{\#r} \,\&\, \pi' \in A)$. От индукционното предположение следва, че $\neg\exists\pi'(\pi' <^t_s M + t + 1^{\#r} \,\&\, \pi' \in B)$. Нека k_1 е някой (например най-малкият) елемент на $\bigtriangledown_a(A)$. Очевидно

$!\delta_n^{\forall,t}(A, 0^{k_1+t+1}10^{-t-2})$. Следователно $!\delta_n^{\forall,t}(B, 0^{k_1+t+1}10^{-t-2})$. Нека $A' = \delta_n^{\forall,t}(A, 0^{k_1+t+1}10^{-t-2})$ и $B' = \delta_n^{\forall,t}(B, 0^{k_1+t+1}10^{-t-2})$. Очевидно $M + t + 2^{\#r} \in A'$ и $M + t + 2^{\#r} \notin B'$, като $\neg\exists\pi'(\pi' <_s^t M + t + 2^{\#r} \,\&\, \pi' \in A' \bigcup B')$. Аналогично на 2.1.1.2) построяваме редици $\{A_\alpha\}_{\alpha=0}^{-t-2}$ и $\{B_\alpha\}_{\alpha=0}^{-t-2}$, като $A_0 = A'$ и $B_0 = B'$.

2.1.3) $\chi = ms$ и $\exists\pi \in floor(A, i+1)\exists t\exists r(\pi \notin floor(B, i+1) \,\&\, \pi = M + t_s^{\#r})$

Нека $\pi = M + t_s^{\#r}$, $\pi \in floor(A, i+1)$ и $\pi \notin floor(B, i+1)$. От *Твърдение* 21 следва, че $M + t^{\#r} \in A$. Следователно $\neg\exists\pi'(\pi' <_s^{ms} M + t^{\#r} \,\&\, \pi' \in A)$. От индукционното предположение следва, че $\neg\exists\pi'(\pi' <_s^{ms} M + t^{\#r} \,\&\, \pi' \in B)$. Нека k_1 е някой (например най-малкият) елемент на $\bigtriangledown_a(A)$. Очевидно $!\delta_n^{\forall,ms}(A, 0^{k_1})$. Следователно $!\delta_n^{\forall,ms}(B, 0^{k_1})$. Нека $A' = \delta_n^{\forall,ms}(A, 0^{k_1})$ и $B' = \delta_n^{\forall,ms}(B, 0^{k_1})$. Очевидно $M+t+1^{\#r} \in A'$ и $M+t+1^{\#r} \notin B'$, като $\neg\exists\pi'(\pi' <_s^{ms} M + t + 1^{\#r} \,\&\, \pi' \in A' \bigcup B')$. Аналогично на 2.1.1.3) построяваме редици $\{A_\alpha\}_{\alpha=0}^{-t-1}$ и $\{B_\alpha\}_{\alpha=0}^{-t-1}$, като $A_0 = A'$ и $B_0 = B'$.

Редиците $\{A_\alpha\}_{\alpha=0}^{-t}$ и $\{B_\alpha\}_{\alpha=0}^{-t}$ са построени. Следователно $M^{\#r} \in A_{-t}$, $M^{\#r} \notin B_{-t}$ и $\neg\exists\pi'(\pi' <_s^\chi M^{\#r} \,\&\, \pi' \in A_\alpha \bigcup B_\alpha)$. Очевидно $r < n$ (иначе $M^{\#n} \notin min(B_{-t})$ и $B_{-t} \notin M_{states}^\chi$). Очевидно $max(\bigtriangledown_a(A_{-t})) = r + n < max(\bigtriangledown_a(B_{-t}))$. Нека $b = 1^{max(\bigtriangledown_a(B_{-t}))}$. Следователно $!\delta_n^{\forall,\epsilon}(B_{-t}, b)$ и $\neg!\delta_n^{\forall,\epsilon}(A_{-t}, b)$. Следователно $L(A) \neq L(B)$. Противоречие. Следователно $floor(A, i+1) = floor(B, i+1)$.

2.2) $\exists\pi \in floor(B, i+1)(\pi \neq floor(A, i+1))$

Аналогично на 2.1) се стига до противоречие.

Доказахме, че $\forall i\forall A, B \in M_{states}^\chi(L(A) = L(B) \Rightarrow floor(A, i) = floor(B, i))$.

Следователно $\forall A, B \in M_{states}^\chi(L(A) = L(B) \Rightarrow A = B)$.

Следствие Нека $\chi \in \{\epsilon, t, ms\}$. Нека $n \in N$. От *Твърдение* 22 и *Твърдение* 23 следва, че $A_n^{\forall,\chi}$ е минимален.

7. Някои свойства на $A_n^{\forall,\epsilon}$.

Твърдение 24 Нека $n \in N$. Нека $Q \subseteq I_s^\epsilon$, $Q \neq \phi$ и $\forall q_1, q_2 \in Q(q_1 \not<_s^\epsilon q_2)$. Тогава $\exists b \in \Sigma_n^{\forall *}(\delta_n^{\forall,\epsilon *}(\{I^{\#0}\}, b) = Q)$.

Доказателство

1) $Q = \{I^{\#0}\}$

$b = \epsilon$

2) $Q \neq \{I^{\#0}\}$

Ще построим редици $\{b_i\}_{i=1}^{n+1}$ и $\{q_i\}_{i=1}^{n+1}$.

2.1) Нека $b_1 = 0^n010^n$ и $q_1 = \delta_n^{\forall,\epsilon}(\{I^{\#0}\}, b_1)$

2.2) Нека сме постоили b_i и q_i

Нека $b_{i+1} = x_1x_2...x_{2n+2}$, като при $0 \leq j \leq 2n+2$

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{ако } I + j - n - 1^{\#e} \in Q \text{ за някое } e \leq i \text{ или } j = n+2+i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Нека $q_{i+1} = \delta_n^{\forall,\epsilon}(q_i, b_{i+1})$.

Очевидно $\delta_n^{\forall,\epsilon *}(\{I^{\#0}\}, b) = Q$.

Твърдение 25 Нека $n \in N$. Нека $Q \subseteq M_s^\epsilon$, $\forall q_1, q_2 \in Q(q_1 \not<_s^\epsilon q_2)$, $\exists q \in Q(q \leq_s^\epsilon M^{\#n})$ и $\exists i \in [-n, 0] \forall q \in Q(M + i^{\#0} \leq_s^\epsilon q)$. Тогава $\exists b \in \Sigma_n^{\forall *}(\delta_n^{\forall,\epsilon *}(\{I^{\#0}\}, b) = Q)$.

Доказателство

1) $Q = \{M^{\#0}\}$

$\delta_n^{\forall,\epsilon}(\{I^{\#0}\}, 0^n 1) = Q$

2) $Q \neq \{M^{\#0}\}$

Нека $i \in [-n, 0]$ е такова, че $\forall q \in Q(M + i^{\#0} \leq_s^\epsilon q)$. Нека $Q_0 = \{I + j - i^{\#f} | M + j^{\#f} \in Q\}$. Ще дефинираме $s : I_{states}^\epsilon \rightarrow \Sigma_n^\forall$.

$s(A) \stackrel{def}{=} 1^m$, където $m = n + max\{x - y | I + x^{\#y} \in A\} + n + 1$.

Нека $k = |s(Q_0)|$. Нека $M_0 = \delta_n^{\forall,\epsilon}(Q_0, s(Q_0))$ и $M_{i+1} = \delta_n^{\forall,\epsilon}(M_i, 1^{k-(i+1)})$. Очевидно $\exists p \in N(M_p = Q)$. Следователно $\exists b \in \Sigma_n^{\forall *}(\delta_n^{\forall,\epsilon *}(\{I^{\#0}\}, b) = Q)$.

Следствие Нека $n \in N$. От *Твърдение* 24 и *Твърдение* 25 следва, че

I) $Q \in I_{states}^\epsilon \Leftrightarrow Q \subseteq I_s^\epsilon \,\&\, Q \neq \phi \,\&\, \forall q_1, q_2 \in Q(q_1 \not<_s^\epsilon q_2)$

II) $Q \in M_{states}^\epsilon \Leftrightarrow Q \subseteq M_s^\epsilon \,\&\, Q \neq \phi \,\&\, \forall q_1, q_2 \in Q(q_1 \not<_s^\epsilon q_2) \,\&\, max\{x - y | M + x^{\#y} \in Q\} \leq min\{x + y | M + x^{\#y} \in Q\} \,\&\, max\{x - y | M + x^{\#y} \in Q\} \geq -n$

Следствие $A_n^{\forall,\epsilon}$ може да бъде построен, като паметта, която се използва, е $O(n^2)$. (Не отчитаме паметта, която се използва за записване на изхода $AUTOMATON$.)

```
procedure Build_Automaton( n : INTEGER );
VAR st, nextSt : STATE;
    b          : STRING;
begin
  for st in P( { pos | pos : POSITION and
                       GET_POSITION_PARAM(pos) = I and
                       GET_POSITION_TYPE(pos) = usual and
                       GET_POSITION_Y(pos) >= GET_POSITION_X(pos) and
                       GET_POSITION_Y(pos) >= -GET_POSITION_X(pos) and
                       0 <= GET_POSITION_Y(pos) <= n } ) do begin
    if( Belongs_To_I_States(st) ) then begin
      for b in { sym | sym : STRING and
                       1 <= LENGTH(sym) <= 2n+2 and
                       for all i( i in [1, LENGTH(sym)] =>
                                  ( sym[i] = 0 or sym[i] = 1 ) ) } do begin
        if( Length_Covers_All_The_Positions( n, LENGTH(b), st ) ) then begin
          nextSt := Delta( n, st, b );
          if( not EMPTY_STATE( nextState ) ) then begin
            if( HAS_NEVER_BEEN_PUSHED( nextSt ) ) then begin
              PUSH_IN_QUEUE( nextState )
            end
```

```
          ADD_TRANSITION( st, b , nextSt )
        end
      end
    end
  end
end

for st in P( { pos | pos : POSITION and
                     GET_POSITION_PARAM(pos) = M and
                     GET_POSITION_TYPE(pos) = usual and
                     GET_POSITION_Y(pos) >= -GET_POSITION_X(pos) - n and
                     0 <= GET_POSITION_Y(pos) <= n and
                     GET_POSITION_X(pos) <= 0 } ) do begin
  if( Belongs_To_M_States(st) ) then begin
    for b in { sym | sym : STRING and
                     1 <= LENGTH(sym) <= 2n+2 and
                     for all i( i in [1, LENGTH(sym)] =>
                                ( sym[i] = 0 or sym[i] = 1 ) ) } do begin
      if( Length_Covers_All_The_Positions( n, LENGTH(b), st ) ) then begin
        nextSt := Delta( n, st, b );
        if( not EMPTY_STATE( nextState ) ) then begin
          if( HAS_NEVER_BEEN_PUSHED( nextSt ) ) then begin
            PUSH_IN_QUEUE( nextState )
          end
          ADD_TRANSITION( st, b , nextSt )
        end
      end
    end
  end
end
end;

function Belongs_To_I_States( st : STATE ) : BOOLEAN;
VAR q1, q2 : POSITION;
begin
  if( EMPTY_STATE( st : STATE ) ) then begin
    return( false )
  end
  for q1 in st do begin
    for q2 in st do begin
      if( Less_Than_Subsume( q1, q2 ) ) then begin
        return( false )
      end
    end
  end
  return( true )
```

```
end;

function Belongs_To_M_States( st : STATE ) : BOOLEAN;
VAR q1, q2, leftMost, rightMost : POSITION;
begin
  if( EMPTY_STATE( st : STATE ) ) then begin
    return( false )
  end
  leftMost := GET_FIRST_POSITION(st);
  rightMost := GET_FIRST_POSITION(st);
  for q1 in st do begin
    if( GET_POSITION_X(q1) + GET_POSITION_Y(q1) <
        GET_POSITION_X(leftMost) + GET_POSITION_Y(leftMost) ) then begin
      leftMost := q1
    end
    if( GET_POSITION_X(q1) - GET_POSITION_Y(q1) >
        GET_POSITION_X(rightMost) - GET_POSITION_Y(rightMost) ) then begin
      rightMost := q1
    end
    for q2 in st do begin
      if( Less_Than_Subsume( q1, q2 ) ) then begin
        return( false )
      end
    end
  end
  if( GET_POSITION_X(leftMost) + GET_POSITION_Y(leftMost) <
      GET_POSITION_X(rightMost) - GET_POSITION_Y(rightMost) ) then begin
    return( false )
  end
  return( true )
end;
```

Използвани статии

[SMFSCLA] Schulz KU, Mihov S (2001) Fast String Correction with Levenshtein-Automata. CIS-Report, CIS, University of Munich

[MSFASLD] Mihov S, Schulz KU (2004) Fast approximate search in large dictionaries.